doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.021

相干矢量表象中的量子相干性度量

丁 磊
(西南交通大学物理科学与技术学院，成都 610031)

摘 要：量子相干性度量最近是量子资源理论中的热点任务. Baumgratz 等人已经于 2014 年提出严格的相干性度量框架. 在该框架中，相干性度量的定义要求把量子态固定在希尔伯特空间中一组特定基矢上，其结果是在同一度量下，基矢的变换会引起同一量子态的相干性发生改变. 在相干矢量表象中利用相干矢量的旋转性质，一种基于相干矢量归一化模长的相干性度量被提出. 在该度量中，同一量子态的相干性独立于基矢的选择. 基于该度量的非相干态和非相干算符已经分别定义为经典最大混合态和酉算符. 同时，三条重要性质已经得到，分别为非负性、凸性和非相干操作不变性.

关键词：量子相干性；相干矢量；度量
中图分类号：O413.1 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2020)04-0759-04

Measuring quantum coherence in coherence-vector representation

DING Lei
(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract：Recently, how to measure quantum coherence is a hot topic in the quantum resource theory. In 2014, Baumgratz *et al*. proposed a rigorous framework to quantify coherence. In this framework, a particular basis of the Hilbert space is required to define the coherence measure, and hence, the proposed coherence measure of the same quantum state does not remain the same under the basis transformations. In this paper, a measure of coherence based on the normalized modulus of the coherent vector is proposed in coherent vector representation, where the property of the coherent vector under basis transformation is considered. The measure of coherence proposed here is independent of the choice of the basis. The incoherent states and incoherent operators based on this measure can also be well defined as the classical maximal mixed states and the unitary operators respectively. And three important properties can be obtained, namely, non-negativity, convexity and invariance on the incoherent operators.

Keywords：Quantum coherence; Coherent vector; Measure

1 引 言

由量子态叠加原理产生的量子相干性是量子力学中最重要的基本特征之一，是量子世界从经典领域中分离出来的标志. 在跨学科领域中，量子相干性扮演着极其重要的角色，比如纳米热力学[1]，量子度量学[2]，量子生物学[3]等. 在物理学中，它更是发挥着核心作用，能实现经典物理学和射线光学无法实现的一些应用. 量子相干性是量子物理和量子信息科学中的一个热门的研究课题，是一些量子应用的基础条件，如量子隐形传态[4]，量子信息分裂的量子参数估计等.

收稿日期：2019-3-12
基金项目：国家自然科学基金 (11847307)
作者简介：丁磊(1989－)，男，四川泸州人，硕士，主要研究领域为量子计算与量子信息. E-mail：lding@my.swjtu.edu.cn

量子相干性度量是最近几年量子资源理论的热点任务. 2014 年,Baumgratz 等人[5]提出一个严格而适用于 N 维 Hilbert 空间 H 中的任意量子态 ρ_N 的相干性度量框架. 在该框架中,固定于 Hilbert 空间 H 中的一组特定的正交规范计算基$\{|i\rangle,(i=1,2,\cdots,n)\}$下的非相干态 $\delta=\sum_{i=1}^{N}\delta_i|i\rangle\langle i|$(满足$\delta_i\in[0,1]$, $\sum_i\delta_i=1$)已经定义;基于满足$\sum_n K_n^{\dagger}K_n=I$ 的一组 Kraus 算符$\{K_n\}$下的作用于非相干态之后不会产生相干态的两类非相干算符也已经定义,即非相干完全正定保迹映射Φ_{ICPTP}和选择性测量非相干算符. 同时,量子相干性度量 C 满足的四个基本条件也已经提出,它们分别为:(C1)非负性:$C(\rho_N)\geqslant 0$;(C2a)非相干完全正定保迹映射Φ_{ICPTP}下的单调性:$C(\rho_N)\geqslant C(\Phi_{\mathrm{ICPTP}}(\rho_N))$;(C2b)选择性测量下的平均值强单调性:$C(\rho_N)\geqslant\sum_n P_nC(\rho_{Nn})$,其中满足$\rho_{Nn}=K_n\rho_NK_n^{\dagger}/P_n$, $P_n=Tr(K_n\rho_NK_n^{\dagger})$;(C3)态混合非增性:$\sum_n p_nC(\rho_{Nn})\geqslant C(\sum_n p_n\rho_{Nn})$对任意量子态集合$\{\rho_{Nn}\}$和$\sum_n p_n=1$, $p_n\in[0,1]$成立. 在文献[5]中,两种符合以上四个条件的直观而易于计算的度量已经提出,分别是相对熵相干性和 l_1 范数相干性. 最近几年,基于此框架的其他度量方式也不断提出,比如可蒸馏相干性[6],鲁棒性相干性[7],最大相对熵相干性[8],Hellinger 距离相干性[9]等.

值得关注的是,人们已经注意到,在 Baumgratz 等人[5]提出的框架中,如果对量子态进行基矢变换,那么就会出现相干态与非相干态相互转换的情况[10]. 进一步说就是基矢的变换,会导致同一量子态的相干性在同一度量下发生变化. 从物理学的角度出发,物理系统量子态的物理特性在相同度量下不应该随基矢变换而改变,但是允许其数值随度量方式的改变而改变. 王伟臣等人[10]已经提出独立于基矢选择的度量方式,重新定义的非相干态为经典最大混合态.

本工作在相干矢量表象下提出另一种独立于基矢选择的量子相干性度量,称为相干矢量相干性. 给出了符合相干矢量相干性的非相干态、非相干算符和性质.

2 量子态的相干矢量

在介绍相干矢量相干性之前,本部分将简短回顾量子态的相干矢量描述及其部分性质. 众所周知,N 维 Hilbert 空间 H 中的量子态用密度矩阵 ρ_N 来描述,ρ_N 满足厄米性、正定性和单位迹性. 同时,离散 N 维 Hilbert 空间 H 中的量子态ρ_N还可以用一个单位算符I_N和 $SU(N)$群的生成元展开并得到发展和广泛应用[11-18]. 其中 $SU(N)$群生成元由如下过程构成[17].

首先,在离散 N 维 Hilbert 空间 H 中的一组正交规范基$\{|i\rangle,(i=1,2,\cdots,n)\}$下引入一组转换投影算符:

$$P_{ij}=|i\rangle\langle j| \tag{1}$$

然后,利用以下这三组算符

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_l&=-\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}(P_{11}+P_{22}+\cdots+\\&\quad P_{ll}-l\,P_{l+1,l+1})\\\hat{\mu}_{jk}&=P_{jk}+P_{kj}\\\hat{\upsilon}_{jk}&=i(P_{jk}-P_{kj})\end{aligned} \tag{2}$$

来构造生成元,其中 $1\leqslant l\leqslant N-1$, $1\leqslant j<k\leqslant N$. 最后,$(N^2-1)$个生成元可写成集合

$$\{\hat{\lambda}_i\}=\{\hat{\mu}_{12},\hat{\mu}_{13},\cdots,\hat{\upsilon}_{12},\hat{\upsilon}_{13},\cdots,\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2,\cdots,\hat{\omega}_{N-1}\} \tag{3}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N^2-1$,并满足如下关系:

$$\hat{\lambda}_i^{\dagger}=\hat{\lambda}_i,\ Tr(\hat{\lambda}_i)=0,\ Tr(\hat{\lambda}_i\hat{\lambda}_j)=2\,\delta_{ij} \tag{4}$$

利用 $Tr(\rho_N)=1$,密度矩阵ρ_N可以表示成如下形式:

$$\rho_N=\frac{1}{N}I_N+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N^2-1}\lambda_i\hat{\lambda}_i \tag{5}$$

其中$\lambda_i=Tr(\rho\hat{\lambda}_i)$. (N^2-1)维实矢量 $\boldsymbol{\lambda}=\{\lambda_i\}$可以完整地描述 N 维物理系统的量子态的特性,称为相干矢量或者广义 Bloch 矢量,对应的表象称为相干矢量表象 $B(\mathbf{R}^{N^2-1})$.

根据文献[16]中的球坐标观点,在(N^2-1)维相干矢量表象 $B(\mathbf{R}^{N^2-1})$中,所有可描述密度矩阵的相干矢量形成一个闭合有界凸集,到达该闭合有界凸集边界上的相干矢量的模长并不相等. 其中纯态所对应的相干矢量的模长最大,为:

$$|\boldsymbol{\lambda}|_{\max}=\sqrt{\frac{2(N-1)}{N}} \tag{6}$$

同时,Schlienz 等人[11]已经证明,当对 N 维 Hilbert 空间 H 中的密度矩阵ρ_N做一个酉变换U_N时,该密度矩阵在相干矢量表象中对应的相干矢量做了一个(N^2-1)维的转动 $O(U_N)$.

3　相干矢量相干性度量

基于对密度矩阵做酉变换时，其在相干矢量表象中对应的相干矢量做旋转的独特性质，本文在相干矢量表象中利用相干矢量的归一化模定义了一种新的量子相干性度量：

$$C_{cv}(\rho_N)=\sqrt{\frac{N}{2(N-1)}}\,|\boldsymbol{\lambda}| \tag{7}$$

其中$|\boldsymbol{\lambda}|=(\sum_{i=1}^{N^2-1}\lambda_i^2)^{1/2}$是相干矢量的模长，称为相干矢量相干性．这样定义正好可以避免对量子态的表示需要固定在特殊的基矢上的问题．在相干矢量相干性度量中，当且仅当$\rho_N=I_N/N$，即$\lambda_i=0$时，$C_{cv}(\rho_N)=C_{cv}(I_N/N)=0$，所以本文定义非相干态为：

$$\rho_N^{in}=\frac{1}{N}I_N \tag{8}$$

即为经典最大混合态．实际上，这样定义的非相干态是 Baumgratz 等人[5]定义的非相干态中δ_i全部相等时的那一类．王伟臣[10]已经证明，把经典最大混合态作为非相干态时，非相干算符就只能是酉算符U_N．在本文定义的相干矢量相干性度量中，也是把非相干态定义为经典最大混合态，因此本文定义的非相干算符也是酉算符U_N．

4　相干矢量相干性的性质

虽然本文定义的非相干态和非相干算符与文献[5]中的不同，但是其提出的四个条件却是普适的，所以本文依然需要依据其条件讨论相干矢量相干性的性质．

性质 a：非负性，即

$$0\leqslant C_{cv}(\rho_N)\leqslant 1$$

当且仅当$\rho_N=\rho_N^{in}$时，$C_{cv}(\rho_N)=0$．显然，相干矢量的模长是非负的，再结合公式(6)的相干矢量最大模长，对相干矢量的模长归一化后就可以得到相干矢量相干性的大小范围．

性质 b：凸性，量子态的混合态的相干矢量相干性不增大，即

$$\sum_n p_n C_{cv}(\rho_n)\geqslant C_{cv}(\sum_n p_n\rho_n)$$

对 N 维 Hilbert 空间 H 中任意量子态集合$\{\rho_n\}$和$\sum_n p_n=1$，$p_n\in[0,1]$成立．

证明：假设在 N 维 Hilbert 空间 H 中存在一组任意量子态集合$\{\rho_n\}$，且存在p_n满足$\sum_n p_n=1$，$p_n\in[0,1]$．则由实矢量的几何性质有：

$$\sum_n p_n C_{cv}(\rho_n)=\sum_n p_n\sqrt{N/2(N-1)}\,|\lambda_n|=$$
$$\sum_n\sqrt{N/2(N-1)}\,p_n|\lambda_n|\geqslant$$
$$\sum_n\sqrt{N/2(N-1)}\,|p_n\lambda_n|=$$
$$C_{cv}(\sum_n p_n\rho_n),$$

证毕．

性质 c：非相干算符作用下的不变性，即

$$C_{cv}(\rho_N)=C_{cv}(U_N\rho_N U_N^{\dagger})$$

在本文定义的相干矢量相干性度量中，非相干算符只能是酉算符U_N，而在相干矢量表象 $B(\mathbf{R}^{N^2-1})$中，对密度矩阵的酉操作只能使对应的相干矢量旋转，并不改变其模长．在文献[5]中的(C2a)条件下，相干矢量相干性度量就只满足其特殊的等号部分，即在满足$\sum_n K_n^{\dagger}K_n=I$的一组 Kraus 算符$\{K_n\}$中，$C_{cv}(\Phi_{\text{ICPTP}}(\rho_N))=C_{cv}(\sum_n K_n\rho_N K_n^{\dagger})=C_{cv}(U_N\rho_N U_N^{\dagger})=C_{cv}(\rho_N)$．而在(C2b)条件下，$N$ 维 Hilbert 空间 H 中的密度矩阵ρ_N在选择性测量算符作用后，系统的量子态会塌缩到其本征值所对应的本正态，这些本正态为 N 维纯态．即在保留测量结果的前提下，以概率P_n得到测量结果 n 所对应的 N 维纯态的相干矢量相干性的平均值为：

$$\sum_n P_n C_{cv}(\rho_n)=$$
$$Tr(U_N\rho_N U_N^{\dagger})C_{cv}(U_N\rho_N U_N^{\dagger}/Tr(U_N\rho_N U_N^{\dagger}))=$$
$$C_{cv}(\rho_N)$$

其中 $Tr(U_N\rho_N U_N^{\dagger})=Tr(\rho_N)=1$．

总的来说，相干矢量相干性度量完全符合 Baumgratz 框架的条件(C1)和(C3)．而量子态在非相干算符酉算符U_N作用后，不管测量与否，其相干矢量相干性都保持不变．

5　结　论

本文在相干矢量表象中提出了一种新的量子相干性度量，即相干矢量相干性，其实质就是采用相干矢量的归一化模长来度量量子相干性．相干矢量相干性能避开相干态与非相干态随基矢的选择而相互转换的问题，也就是对量子态进行幺正变换后其相干矢量相干性保持不变．本文还在这种度量方式下讨论了把非相干态定义为经典最大混合态和把非相干算符定义为酉算符的可行性．最后，本文还得到了相干矢量相干性的三条性质：非负性、凸性和非相干算符，即幺正算符，作用下的量

子相干性不变性. 这对探索量子相干性更好地度量和丰富量子资源理论具有一定的积极意义.

参考文献:

[1] ć wikliński P, Studziński P, Horodecki M, *et al*. Limitations on the evolution of quantum coherences: towards fully quantum second laws of thermodynamics [J]. Phys Rev Lett, 2015, 115: 210403.

[2] Demkowicz-Dobrzański R, Maccone L. Using entanglement against noise in quantum metrology [J]. Phys Rev Lett, 2014, 113: 250801.

[3] Huelgaa S F, Plenio M B. Vibrations, quanta and biology [J]. Contemp Phys, 2013, 54: 181.

[4] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, *et al*. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. Phys Rev Lett, 1993, 70: 1895.

[5] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B. Quantifying coherence [J]. Phys Rev Lett, 2014, 113: 140401.

[6] Winter A, Yang D. Operational resource theory of coherence [J]. Phys Rev Lett, 2016, 116: 120404.

[7] Napoli C, Bromley T R, Cianciaruso M, *et al*. Robustness of coherence: an operational and observable measure of quantum coherence [J]. Phys Rev Lett, 2016, 116: 150502.

[8] Bu K F, Singh U, Fei S M, *et al*. Maximum relative entropy of coherence: an operational coherence measure [J]. Phys Rev Lett, 2017, 119: 150405.

[9] Jin Z X, Fei S M. Quantifying quantum coherence and nonclassical correlation based on Hellinger distance [J]. Phys Rev A, 2018, 97: 062342.

[10] 王伟臣. 基矢无关量子相干性度量与 PT-对称系统量子相干性研究[D]. 长沙: 湖南师范大学, 2017: 26.

[11] Schlienz J, Mahler G. Description of entanglement [J]. Phys Rev A, 1995, 5: 4396.

[12] Jakóbczyk L, Siennicki M. Geometry of Bloch vectors in two-qubit system [J]. Phys Lett A, 2001, 286: 383.

[13] Byrd M S, Khaneja N. Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation [J]. Phys Lett A, 2001, 286: 383.

[14] Kimura G. The Bloch vector for N-level systems [J]. Phys Lett A, 2003, 314: 339.

[15] Byrd1 M S, Boya L J, Mims M, *et al*. Geometry of n-state systems, pure and mixed [J]. J Phys: Conf Ser, 2007, 87: 012006.

[16] Kimura G, Kossakowski A. The Bloch-vector space for n-level systems: the spherical-coordinate point of view [J]. Open Sys Inf Dyn, 2005, 12: 207.

[17] Zhou T. Quantum measurement in coherence-vector representation [J]. Sci China Phys Mech Astron, 2016, 59: 640301.

[18] Zhou T, Cui J X, Long G L. Measure of nonclassical correlation in coherence-vector representation [J]. Phys Rev A, 2011, 84: 062105.

引用本文格式:

中 文: 丁磊. 相干矢量表象中的量子相干性度量[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 759.

英 文: Ding L. Measuring quantum coherence in coherence-vector representation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 759.