

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.023

一种计算核子-核子散射可观测量的方法

王健峰

(四川大学物理学院, 成都 610064)

摘要: 对M矩阵进行参数化是一种计算核子-核子弹性散射可观测量的方法. M矩阵由于核子-核子相互作用的对称性, 可以参数化为5个参数, 可观测量可以由这5个参数得到. 本文介绍一种不需要对M矩阵参数化, 直接使用总自旋和总自旋 z 分量表象下的M矩阵元计算可观测量的方法.

关键词: 核子-核子散射; 散射矩阵; 可观测量

中图分类号: O413.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2020)04-0769-05

A method for calculating nucleon-nucleon scattering observable

WANG Jian-Feng

(College of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: M-matrix parameterization is a way to calculate nucleon-nucleon elastic scattering observable. The M-matrix can be parameterized as 5 scattering amplitudes because of symmetry, and observables can be calculated from these amplitudes. In this paper, we introduce a way to calculate observable from M-matrix elements in total spin and total spin z component representation without parameterization.

Keywords: Nucleon-nucleon scattering; Scattering matrix; Observable

1 引言

核子-核子相互作用一直是核物理中大家关心的主题. 对核子相互作用的精确计算, 直接影响到其他领域的应用, 如可控核聚变, 天体物理中的核物理, 等等.

核子-核子相互作用的理论, 例如一些唯像理论或有效场论, 需要计算出可观测量并拟合实验数据. 20世纪50年代角动量表象下的核子-核子散射形式理论被提出^[1], 在角动量表象下可以方便地计算可观测量的值.

传统的核子-核子弹性散射可观测量计算方法, 是对散射矩阵进行参数化, 利用散射矩阵的对称性, 使用几个参数来表示散射矩阵, 并用这些参数计算可观测量. 常用的角动量表象下的M矩阵

的参数化方法有 Wolfenstein 参数化方法^[2], Hoshizaki 参数化方法^[3], Saclay 参数化方法^[4-5]. 使用参数化方法计算可观测量比较清晰简洁, 在公式推导上也比较方便, 是比较常用的方法.

不对M矩阵进行参数化, 直接由M矩阵计算可观测量也是可行的, 并且计算更加直接, 本文将介绍一种从角动量表象下M矩阵出发, 直接由M矩阵元计算核子-核子弹性散射可观测量的方法.

2 散射矩阵元的计算

2.1 S矩阵元的计算

在核子-核子弹性散射过程中, S矩阵具有么正性, 且体系的总角动量和总自旋守恒. 由于核子具有 $1/2$ 的自旋, 两个核子的体系可以有总自旋为0和1两种情况.

当总自旋为 0 时,体系总角动量等于轨道角动量. 当总自旋为 1 时,由于自旋轨道耦合,体系的轨道角动量可以等于总角动量,也可以与总角动量相差 1. 散射过程轨道角动量不守恒,轨道角动量为总角动量正负一的两个态的总角动量和总自旋相等,宇称也相同,这两个态可以相互混合.

常用的表示 S 矩阵的方法是 Stapp 参数化方法^[6],通过反应道的分波相移来表示 S 矩阵,非混合的反应道的 S 矩阵为

$$S = e^{2i\delta} \quad (1)$$

其中 δ 为该反应道的分波相移.

对于相互混合的反应道,也就是总自旋相等,总角动量相等,轨道角动量为总角动量正负一的反道,其 S 矩阵为

$$S = \begin{pmatrix} S_{j-1,j-1} & S_{j-1,j+1} \\ S_{j+1,j-1} & S_{j+1,j+1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} S_{j-1,j-1} &= e^{2i\delta_{j-1}} \cos^2 \epsilon_j \\ S_{j+1,j+1} &= e^{2i\delta_{j+1}} \cos^2 \epsilon_j \\ S_{j-1,j+1} &= S_{j+1,j-1} = i \sin \epsilon_j e^{i(\delta_{j-1} + \delta_{j+1})} \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 M 矩阵元的计算

在总自旋与总自旋的 z 分量表象下, M 矩阵为

$$\langle Sm'_s | M(p_f, p_i) | Sm_s \rangle = \frac{2\pi}{ik} \langle \theta_f \phi_f, Sm'_s | S-1 | Sm_s, \theta_i \phi_i \rangle \quad (4)$$

向其中插入角动量的完备集,可以得到 M 矩阵元的表达式

$$\begin{aligned} \langle Sm'_s | M | Sm_s \rangle = & \frac{\sqrt{\pi(2L+1)}}{ik} \sum Y_{L'}^{m_s - m'_s} \cos(\theta) C(L'SJ; \\ & m_s - m'_s, m'_s, m_s) \times C(LSJ; 0, m'_s, m_s) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 m_s 和 m'_s 分别表示体系散射前和散射后自旋的 z 分量.

当总自旋为 0 时,散射前后的 z 分量只能为 0,用 M_s 表示此时的 M 矩阵. 当总自旋为 1 时 m_s 和 m'_s 的取值可以为 0 和 ± 1 ,总共有 9 种不同的 M 矩阵元,但考虑到势场为球对称势,可以取 ϕ 角为 0,此时共有 5 个独立的 M 矩阵元,加上总自旋为 0 时的 M 矩阵元,共有 6 个独立的 M 矩阵元: $M_s, M_{00}, M_{11}, M_{10}, M_{01}, M_{1-1}$.

现在得到的 M 矩阵元的表象是总自旋和总自旋的 z 分量表象. 为了方便计算可观测量,需要将 M 矩阵转换为入射粒子和靶粒子的自旋 z 分量表象. 利用 Clebsch-Gordan 系数可以得到两种表象的关系:

$$M_{m'_1 m'_2 m_1 m_2} = \begin{pmatrix} M_{11} & \frac{1}{\sqrt{2}} M_{10} & \frac{1}{\sqrt{2}} M_{10} & M_{1-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} M_{01} & \frac{1}{2} (M_{00}^0 + M_{00}^1) & \frac{1}{2} (-M_{00}^0 + M_{00}^1) & \frac{1}{\sqrt{2}} M_{0-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} M_{01} & \frac{1}{2} (-M_{00}^0 + M_{00}^1) & \frac{1}{2} (M_{00}^0 + M_{00}^1) & \frac{1}{\sqrt{2}} M_{0-1} \\ M_{1-1} & \frac{1}{\sqrt{2}} M_{1-10} & \frac{1}{\sqrt{2}} M_{1-10} & M_{1-1-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

3 可观测量的计算

可观测量与散射角度有关,定义可观测量通常的做法是先定义三个基矢^[7]:

$$l = \frac{\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_i|}, m = \frac{\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i|}, n = \frac{\mathbf{k}_f \times \mathbf{k}_i}{|\mathbf{k}_f \times \mathbf{k}_i|} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f$ 分别为质心系中入射粒子散射前和散射后的动量. 可观测量可以由这些基矢定义.

按照通用的做法,可以用四个下标的符号表示可观测量^[4]: X_{pqik} , 其中 p, q, i, k 分别表示入射粒子散射后,靶粒子散射后,入射粒子散射前,靶粒子

散射前的自旋朝向. 方向可以是 l, m, n 或 0, 其中 0 表示初态无极化或末态不测量其极化方向.

在入射粒子和靶粒子均未极化时,质心系中的微分散射截面可以由 M 矩阵得到:

$$\sigma \equiv I_{0000} = \frac{\text{Tr}(\rho_f)}{\text{Tr}(\rho_i)} = \frac{1}{4} \text{Tr}(MM^+) \quad (8)$$

其中 ρ_i, ρ_f 分别表示初态和末态的自旋密度矩阵. 其余和自旋相关的可观测量可以由下式得到:

$$\langle \hat{O} \rangle \sigma = \frac{1}{4} \text{Tr}(M \rho_i M^+ O) \quad (9)$$

可以把初态的密度矩阵和末态的测量算符表

示为两个泡利矩阵的张量积，以便于公式推导：

$$\sigma X_{pqik} = \frac{1}{4} \text{Tr}[M(\sigma_i \otimes \sigma_k)M^+(\sigma_p \otimes \sigma_q)] \quad (10)$$

其中 $\sigma_i, \sigma_k, \sigma_p, \sigma_q$ 表示入射粒子散射前，靶粒子散射前，入射粒子散射后，靶粒子散射后自旋方向的泡利矩阵，方向可以是 l, m, n 或 0。

有了可观测量的定义，并求解出 M 矩阵，便可以计算可观测量的值。泡利矩阵的张量积是线性独立的，并且具有完备性，因此可以将 M 矩阵表示为泡利矩阵的张量积的线性叠加。

在核子-核子相互作用中，有宇称守恒和时间反演不变的对称性。在宇称变换下， l, m 的方向由其定义，会变成原来的相反。在时间反演变换下，泡利矩阵会变为原来的相反数， l, n 方向会变为原来的相反。M 矩阵需在这两种变换下应保持不变。

仅有下列 6 个泡利矩阵的张量积满足对称性的要求，M 矩阵由它们的线性组合表示：

$$\sigma_l \otimes \sigma_l, \sigma_m \otimes \sigma_m, \sigma_n \otimes \sigma_n$$

$$\sigma_0 \otimes \sigma_0, \sigma_n \otimes \sigma_0, \sigma_0 \otimes \sigma_n$$

并且由于同位旋对称，交换两个粒子，散射过程应保持不变的， $\sigma_n \otimes \sigma_0$ 与 $\sigma_0 \otimes \sigma_n$ 的线性叠加系数应该相同。

线性叠加系数可以通过以下公式求出：

$$M = \frac{1}{4} \sum (\sigma_i \otimes \sigma_j) \text{Tr}[M(\sigma_i \otimes \sigma_j)] \quad (11)$$

有了这些关系，便可以使用总自旋与总自旋 z 分量下的 6 个 M 矩阵元求解可观测量。利用泡利矩阵的性质可以方便地推导出可观测量的公式。

质心系下总共有 25 个线性独立的可观测量，本文采用 Bystricky 文章中对核子-核子散射可观测量的定义^[4]，并求解出这 25 个可观测量的公式，如下表。任何质心系或下的可观测量可以由 25 个质心系下线性独立的可观测量线性叠加得到。

表 1 质心系下 25 个可观测量的公式

Tab. 1 The formula of 25 center of mass observable

可观测量	公式
I_{0000}	$\frac{3}{8} M_{11} ^2 + \frac{1}{8} M_{00} ^2 + \frac{1}{4} M_s ^2 + \frac{3}{8} M_{1-1} ^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(M_{11}^* M_{00} - M_{00}^* M_{1-1} + M_{11}^* M_{1-1}) +$ $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \sin^2 \theta}\right) (M_{10} ^2 + M_{01} ^2) + \frac{1}{2 \tan^2 \theta} \text{Re}(M_{10}^* M_{01})$
σC_{m00}	$-\frac{1}{8} M_{11} ^2 + \frac{1}{8} M_{00} ^2 - \frac{1}{4} M_s ^2 - \frac{1}{8} M_{1-1} ^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(M_{11}^* M_{00} - M_{00}^* M_{1-1} - 3 M_{11}^* M_{1-1}) +$ $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \sin^2 \theta}\right) (M_{10} ^2 + M_{01} ^2) + \frac{1}{2 \tan^2 \theta} \text{Re}(M_{10}^* M_{01})$
σD_{n0n0}	$\frac{1}{8} M_{11} ^2 + \frac{1}{8} M_{00} ^2 + \frac{1}{8} M_{1-1} ^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(M_{11}^* M_{00} - M_{00}^* M_{1-1} - M_{11}^* M_{1-1} + 2 M_{11}^* M_s + 2 M_s^* M_{1-1}) -$ $\frac{1}{4 \tan^2 \theta} (M_{10} ^2 + M_{01} ^2) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin^2 \theta}\right) \text{Re}(M_{10}^* M_{01})$
σK_{0m0}	$\frac{1}{8} M_{11} ^2 + \frac{1}{8} M_{00} ^2 + \frac{1}{8} M_{1-1} ^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(M_{11}^* M_{00} - M_{00}^* M_{1-1} - M_{11}^* M_{1-1} - 2 M_{11}^* M_s - 2 M_s^* M_{1-1}) -$ $\frac{1}{4 \tan^2 \theta} (M_{10} ^2 + M_{01} ^2) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin^2 \theta}\right) \text{Re}(M_{10}^* M_{01})$
σC_{lll}	$\frac{3}{8} M_{11} ^2 + \frac{1}{8} M_{00} ^2 + \frac{1}{4} M_s ^2 + \frac{3}{8} M_{1-1} ^2 + \frac{1}{4} \text{Re}(M_{11}^* M_{00} - M_{00}^* M_{1-1} + M_{11}^* M_{1-1}) +$ $\frac{1}{4 \tan^2 \theta} (M_{10} ^2 + M_{01} ^2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \sin^2 \theta}\right) \text{Re}(M_{10}^* M_{01})$
σP_{r000}	$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Im}(M_{11} + M_{00} - M_{1-1})^* (M_{10} - M_{01})$
σC_{llm}	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Re}(M_{11} + M_{00} - M_{1-1})^* (M_{10} - M_{01})$
σC_{lnl0}	$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Im}(M_{11} + M_s + M_{1-1})^* (M_{10} - M_{01})$
σD_{l0m0}	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Re}(M_{11} + M_s + M_{1-1})^* (M_{10} - M_{01})$
σC_{nl0}	$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Im}(M_{11} - M_s + M_{1-1})^* (M_{10} - M_{01})$

(续表 1)

可观测量	公式
σK_{0bn0}	$\frac{1}{2\sqrt{2}}Re(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}-M_{01})$
σC_{ibn0}	$\frac{1}{\sin\theta}Im(M_{01}^*M_{10})$
σC_{bn00}	$\frac{1}{2\sin\theta}(M_{01} ^2 - M_{10} ^2)$
σD_{m0m0}	$\frac{1}{4}Re[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1}) - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{mm0}	$\frac{1}{4}Im[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1}) - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σD_{l0l0}	$\frac{1}{4}Re[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{lbn0}	$-\frac{1}{4}Im[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σK_{0mm0}	$\frac{1}{4}Re[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{ml0}	$\frac{1}{4}Im[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σK_{0ll0}	$\frac{1}{4}Re[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{rln0}	$-\frac{1}{4}Im[(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{mm00}	$\frac{1}{4}Re[(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{lbn0}	$-\frac{1}{4}Im[(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) - \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{ll00}	$\frac{1}{4}Re[(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$
σC_{mln0}	$\frac{1}{4}Im[(M_{11}+M_{ss}+M_{1-1})^*(M_{11}-M_{ss}+M_{1-1}) + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}(M_{11}+M_{00}-M_{1-1})^*(M_{10}+M_{01})]$

4 结 论

有了质心系下的核子-核子散射可观测量公式,就可以求解可观测量的理论值. 接下以实验室参考系能量 50 MeV 下的质子-中子散射的微分散射截面为例,计算可观测量的值. 理论相移采用 PWA 93 模型^[8]的理论值. 计算结果与 BO85^[9], FI90^[10], MO71^[11] 三组实验数据对照,由于 FI90 和 MO71 并非 absolute data,因此对其进行了归一化^[12].

本文推导了从核子-核子弹性散射 M 矩阵元直接计算可观测量的公式. 首先从角动量表象下的相移出发,计算出 S 矩阵元,再从 S 矩阵元计算出总自旋和总自旋 z 分量表象下的 M 矩阵元,利用核子-核子相互作用中的对称性将其化简,得到 6 个线性独立的 M 矩阵元. 并利用两个核子自旋 z 分量表象下的 M 矩阵推导出通过这 6 个线性独

立的 M 矩阵元计算可观测量的公式.

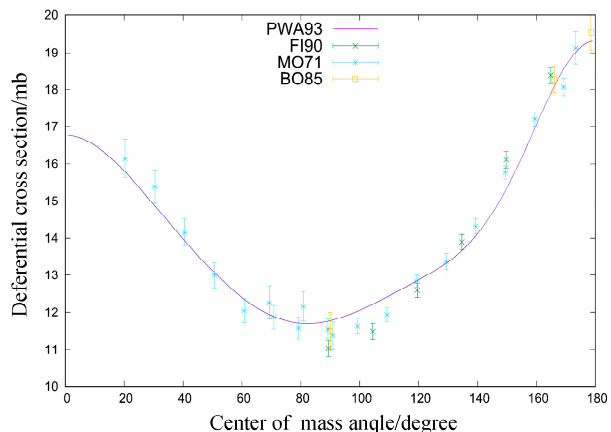


图 1 50 MeV 质子-中子散射的微分散射截面
Fig. 1 50 MeV NP differential cross section

与过去的参数化方法不同的是,本文没有对两

个核子自旋 z 分量表象下的 M 矩阵进行参数化, 而是直接从 6 个线性独立的总自旋与总自旋 z 分量表象的 M 矩阵元计算可观测量, 省去了一些冗余的计算. 在拟合实验数据进行大批量的数值计算时, 这种方法可以避免许多不必要的计算和过多的函数调用, 加快计算速度.

参考文献:

- [1] Moravcsik M J, Pauschenwein J, Goldstein G R. Amplitude systems for spin-1/2 particles [J]. J Phys France, 1989, 50, 1167.
- [2] Wolfenstein L, Ashkin J. Invariance conditions on the scattering amplitudes for spin 1/2 particles [J]. Phys Rev, 1952, 85: 947.
- [3] Hoshizaki N. Formalism of nucleon-nucleon scattering [J]. Prog Theor Phys Suppl, 1969, 42: 107.
- [4] Bystricky J, Lehar F, Winternitz P. Formalism of nucleon-nucleon elastic scattering experiments [J]. J Phys France, 1978, 39: 1.
- [5] La France P, Winternitz P. Scattering formalism for nonidentical spinor particles [J]. J Phys, 1980, 41: 1391.
- [6] Stapp H P, Ypsilantis T J, Metropolis N. Phase shift analysis of 310-Mev proton-proton scattering experiments [J]. Phys Rev, 1956, 105: 302.
- [7] Oehme R. Scattering of polarized nucleon beams [J]. Phys Rev, 1955, 98: 147.
- [8] Stoks V G, Klomp R A, Rentmeester M C, *et al.* Partial-wave analysis of all nucleon-nucleon scattering data below 350 MeV [J]. Phys Rev C, 1993, 48: 792.
- [9] Bol A, Dupont C, Leleux P, *et al.* Measurement of the backward-to-90° neutron-proton elastic cross section ratio between 40 and 75 MeV [J]. Phys Rev C, 1985, 32: 308.
- [10] Fink G, Doll P, Ford T D, *et al.* Backward angle np differential cross sections from 22 to 50 MeV [J]. Nucl Phys A, 1990, 518: 561.
- [11] Montgomery T C, Bonner B E, Brady F P, *et al.* Neutron-proton differential cross section measurements at 25.8 and 50.0 MeV [J]. Phys Rev C, 1977, 16: 499.
- [12] Gross F, Stadler A. Scattering: phase shifts obtained from precision fits to data below 350 MeV [J]. Phys Rev C, 2008, 78: 014005.

引用本文格式:

中文: 王健峰. 一种计算核子-核子散射可观测量的方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 769.

英文: Wang J F. A method for calculating nucleon-nucleon scattering observable [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 769.