

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2020.03.017

基于积分方法的外掠平板湍流温度场的解析解

李开勇, 赵 波, 王翼鹏

(四川大学机械工程学院 空天动力燃烧与冷却教育部工程研究中心, 成都 610065)

摘 要: 外掠平板湍流流动特性是研究湍流传热特性的基本问题之一, 具有重要的理论意义和工程应用价值. 本文将外掠平板湍流温度边界层划分为层流底层和湍流核心区, 分别采用三次多项式和 $1/5$ 次幂函数描述温度场的分布规律, 用积分方法建立能量方程, 利用四阶龙格-库塔算法得到湍流温度场理论解. 与 Blackwell、Moffat 和 Kays 等人的试验结果对比表明本文解析解的正确性, 获得的理论解与经典普朗特-泰勒二层理论模型也具有较好的一致性.

关键词: 湍流温度边界层; 积分法; 温度场; 解析解

中图分类号: O533 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2020)03-0526-05

The analytical solutions of temperature field based on an integral method for turbulent thermal boundary layer flows over a flat plate

LI Kai-Yong, ZHAO Bo, WANG Yi-Peng

(Engineering Research Center of Combustion and Cooling for Aerospace Power, Ministry of Education,
School of Mechanical Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: A steady turbulent flow over a flat plate is one of the basic problems of convective heat transfer processes, with the key theoretical significance and wide engineering applications. In this paper, the thermal boundary layer for steady turbulent flows over a flat plate is divided into the laminar sublayer and turbulent core zone. The temperature profile in respective zone is described by the cubic polynomial and $1/5$ power function, respectively. Accordingly, the energy equations are established for the thermal boundary layer based on the integral method, and the analytical solutions of the integro-differential equation groups are obtained by employing the fourth-order Runge-Kutta method. Compared with the experimental results measured by Blackwell, Moffat and Kays, respectively, it is indicated that the analytical solutions in this paper are correct, and these theoretical solutions also agree well with those obtained from the classical Prandtl-Taylor's turbulent two-layer theoretical model.

Keywords: Turbulent thermal boundary layer; Integral approach; Distribution of temperature field; Analytical solutions

1 引 言

外掠平板湍流流动特性是研究湍流传热特性的基本问题之一, 具有重要的理论意义和工程应用

价值, 比如航空发动机中高温部件的冷却, 以及飞机机翼和高超音速航天器表面冷却等^[1-4]. 前人对外掠平板湍流问题的研究主要采用试验和数值仿真分析的方法^[5-11], 采用理论研究方法的文献还相

收稿日期: 2019-12-31
作者简介: 李开勇(1994—), 男, 四川广元人, 硕士研究生, 主要从事对流换热理论研究. E-mail: gylikaiyong@126.com
通讯作者: 赵波. E-mail: zhaobo@scu.edu.cn

对较少,主要包括:Schulz-Jander^[12]针对可压缩湍流边界层问题,用Walz处理湍流流场的积分方法来确定热边界层,但需热流密度的积分作为已知边界条件. Thomas^[13]采用van-Driest壁面定律,用积分法研究了湍流外掠平板的对流换热. Mautner^[14]将非定常流动动量方程通过相似变换转化为无量纲形式,提出一种动量积分方程的计算方法,但需壁面切应力作为输入条件. Sucec^[15]考虑尾流效应,采用积分法求解动量和能量方程,与不考虑尾流区影响相比,除严重的逆压力梯度情况外,计算结果一致度较好. Khademi^[16-17]利用积分法,将湍流边界层划分为层流底层和湍流核心区,并采用多项式对速度场和温度场加以近似,但实际计算中收敛性相对较差. 上述研究大多模型复杂、计算量大,或依赖先期试验结果获得输入参数,难以获得一致的温度场. 本文在前人研究基础上,将湍流温度边界层划分为层流底层和湍流核心区,分别采用三次多项式和1/5次幂函数代表它们的温度分布,利用积分方法获得湍流热边界层温度场的解析解,与以往的试验和理论模型对比表明,本文提出的理论解具有较好的一致性,便于工程应用.

2 理论数学模型

2.1 能量积分方程组

图1为外掠平板湍流温度边界层示意,将其划分为层流底层和湍流核心区^[18-19],并假设:不可压缩流体且物性参数为常数,零压力梯度,忽略耗散热,湍流从层流末端开始,取临界雷诺数 5×10^5 ^[16-17],在湍流初始处($x=0$)湍流边界层中的层流底层厚度为零,湍流温度边界层的总厚度 Δ^* 与该临界位置处层流温度边界层厚度相等^[14],如图1.

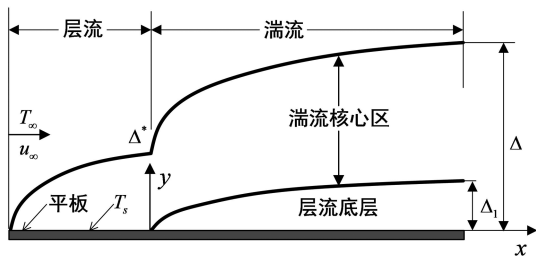


图1 外掠平板湍流温度边界层示意图

Fig. 1 Schematic of turbulent thermal boundary layer flows over a flat plate

图2为湍流控制体积示意图,区域1-2-3-4为层流底层,3-4-5-6为湍流核心区, l 是流体厚

度, dx 是沿 x 方向微元. 采用与层流边界层完全类似的积分方法^[14-15],得能量积分方程如下

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \rho c_P \int_0^{\Delta_1} u_1 (T_1 - T_L) dy + \rho c_P \frac{dT_L}{dx} \int_0^{\Delta_1} u_1 dy + \\ \lambda \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=0} - \lambda \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=\Delta_1} = 0 \text{ (层流底层)} \\ \frac{d}{dx} \rho c_P \int_{\Delta_1}^{\Delta} (T_2 - T_\infty) u_2 dy + \rho c_P \frac{dT_L}{dx} \int_0^{\Delta_1} (T_L - T_\infty) u_1 dy - \\ \rho c_P \frac{dT_L}{dx} \int_0^{\Delta_1} u_1 dy + \lambda \left. \frac{\partial T_1}{\partial y} \right|_{y=\Delta_1} = 0 \text{ (湍流核心区)} \end{cases} \quad (1)$$

式中 ρ 为流体密度, c_P 为定压比热容, μ 为动力粘度, λ 是导热系数, T_∞ 和 u_∞ 为主流区流速和温度, T_s 为壁面温度, u_1 和 T_1 、 u_2 和 T_2 分别为层流底层、湍流核心区的速度和温度, u_L 和 T_L 分别为速度和温度边界层中层流底层外缘处的速度和温度, δ_1 (Δ_1)是速度(温度)边界层中层流底层厚度, δ (Δ)是湍流速度(温度)边界层的总厚度,如图1和图2. 需特殊说明的是,因 dx 极小,认为 dx 距离内温度边界层层流底层厚度沿 x 方向不变,并忽略速度和温度边界层中层流底层处的速度差异.

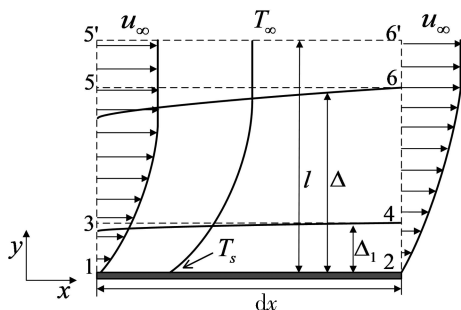


图2 外掠平板湍流的控制体积

Fig. 2 The control volume of turbulent flows over a flat plate

2.2 温度分布函数

认为湍流边界层沿 x 方向具有相似的速度和温度分布^[14],经反复计算比较,决定采用三次多项式和1/5次幂函数分别代表层流底层和湍流核心区的速度和温度分布:

$$\begin{cases} u_1 = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + a_4 y^3 & (0 \leq y < \delta_1) \\ u_2 = a_5 y^{1/5} & (\delta_1 \leq y \leq \delta) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\theta_1}{\theta_\infty} = b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3 & (0 \leq y < \Delta_1) \\ \frac{\theta_2}{\theta_\infty} = b_5 y^{1/5} & (\Delta_1 \leq y < \Delta) \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\theta = T - T_s$, $\theta_1 = T_1 - T_s$, $\theta_2 = T_2 - T_s$, $\theta_\infty =$

$T_{\infty}-T_s$.

此外,湍流边界层内的边界条件为: $T_1|_{y=0}=T_s, T_2|_{y=\Delta}=T_{\infty}, T_1|_{y=\Delta_1}=T_2|_{y=\Delta_1}, \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}\bigg|_{y=0}=0, \lambda \frac{\partial T_1}{\partial y}\bigg|_{y=\Delta_1}=(\lambda+\rho c_p a_t) \frac{\partial T_2}{\partial y}\bigg|_{y=\Delta_1}$, 式中 μ_t 为湍流动力粘度, a_t 为湍流热扩散率. 根据普朗特混合长度理论,有 $\mu_t=\rho l^2 \left|\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|$, 其中 $l=0.41y$, 而湍流热扩散率 $a_t=\frac{\mu_t}{\rho Pr_t}$, 取湍流普朗特数 $Pr_t=0.82$ ^[18]. 由上述边界条件可确定温度分布函数

(3)的系数为 $b_1=b_3=0, b_2=\left(\frac{7}{5}-\frac{\rho c_p a_t}{10\lambda}\right)\Delta_1^{-4/5}b_5, b_4=\left(-\frac{2}{5}+\frac{\rho c_p a_t}{10\lambda}\right)\Delta_1^{-14/5}b_5$ 和 $b_5=\Delta^{-1/5}$. 速度分布函数的详细模型将另具文报道.

2.3 积分方程组求解

将式(2)和(3)分别代入到能量积分方程组(1),在 MATLAB 程序中采用四阶龙格-库塔算法同时对下述两个微分方程求解: $\frac{d\Delta_1}{dx}=f_{t1}(\delta_1,\delta, \Delta_1,\Delta)$ 和 $\frac{d\Delta}{dx}=f_{t2}(\delta_1,\delta, \Delta_1,\Delta)$,得到 Δ_1 和 Δ 后代到方程(3),最终得到温度场的理论分布.

3 结果讨论

3.1 温度场的理论分布

图 3 是本文温度解析解与 Blackwell^[18] 的实验结果对比情况,发现无论在层流底层还是湍流核心区二者均符合得较好,最大相对误差仅为 0.2%.

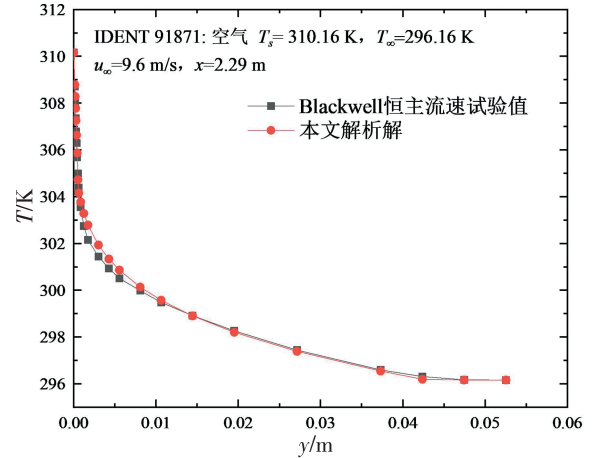


图 3 本文温度解析解与以往试验结果比较
Fig. 3 Comparison between the proposed analytical solutions of temperature and the existing experiment measurements

由图可见,温度在近壁面区域变化极快,温度梯度剧烈,随着远离壁面程度增加温度梯度持续减小,直至主流区后温度不再发生变化.

图 4 是本文温度解析解与普朗特-泰勒二层理论模型^[18, 21] 的对比情况,可见在 $y^+ \leq 100$ 的范围内,本文解析解与普朗特-泰勒二层模型符合得较为满意,包括在层流底层和湍流核心区交界处,二者最大相对误差为 3.7%.

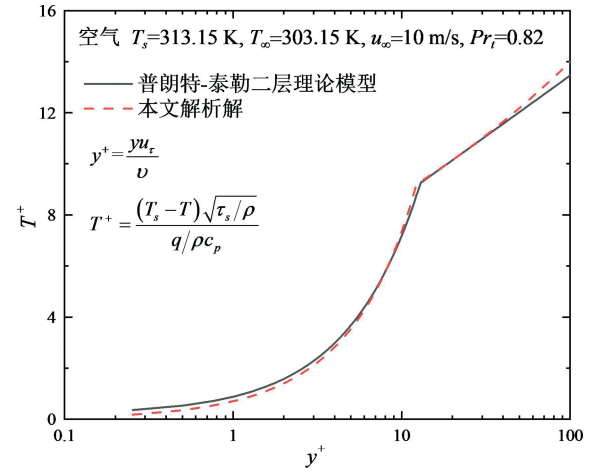


图 4 本文解析解与普朗特-泰勒二层理论模型的比较
Fig. 4 Comparison between the proposed analytical solutions of temperature and the Prandtl-Taylor's turbulent two-layer theoretical model

图 5 给出对应不同位置的雷诺数 (Re) 变化时,温度沿流体厚度方向的理论分布. 如图,随着湍流温度边界层的不断发展,温度边界层逐渐变厚,层流底层和湍流核心区的温度梯度也随之减小.

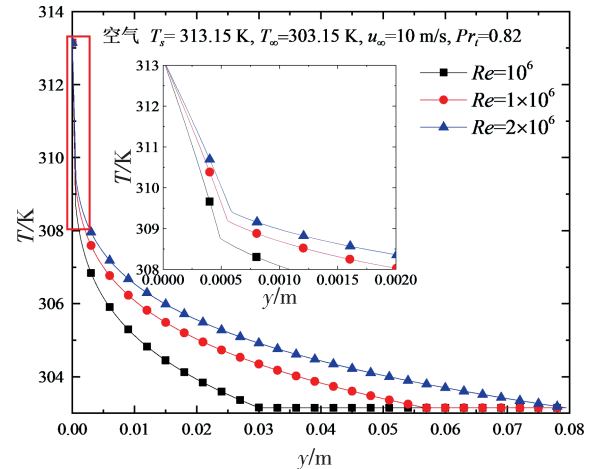


图 5 雷诺数变化时的温度理论分布
Fig. 5 Temperature fields for different Reynolds numbers

3.2 对热换热特性分析

本文解析解确定的斯坦顿数为 $St = \frac{\lambda b_2}{\rho u_\infty c_p}$, 将其与 Moffat 和 Kays^[22] 的试验结果对比情况如图 6. 发现本文解析解与 Moffat 和 Kays 试验结果大体符合, 最大相对误差为 7.6%.

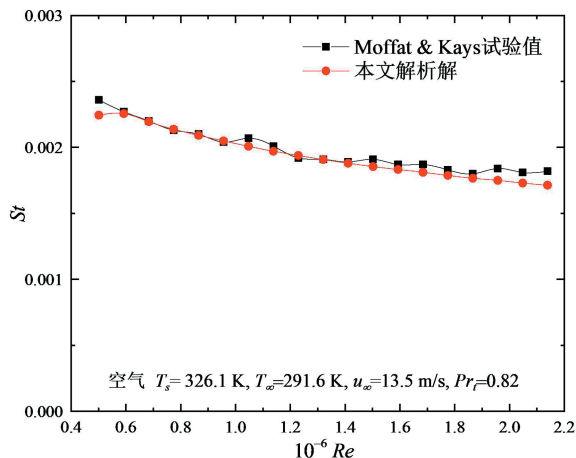


图 6 本文解析解确定的斯坦顿数与试验比较

Fig. 6 Comparison between the proposed analytical solutions of Stanton numbers and the existing experiment measurements

4 结 论

利用积分方法, 将湍流温度边界层划分为层流底层和湍流核心区两部分, 分别采用三次多项式和 $1/5$ 次幂函数对温度分布进行描述, 针对外掠平板湍流温度场进行理论研究, 建立了温度边界层的能量积分方程, 通过四阶龙格-库塔算法获得温度场的解析解, 并与以往的试验、理论和经验结果进行了对比验证分析. 结果表明, 本文获得的温度场解析解与 Blackwell 试验、普朗特-泰勒二层理论模型和 Moffat 和 Kays 的 St 数试验结果最大相对误差分别为 0.2%、3.7% 和 7.6%, 证明了理论模型的准确性. 此外, 该模型还有易于计算、便于使用等优点, 同时为后续多孔表面的喷注/吸出等边界层控制、气膜和发散冷却等对流换热特性研究奠定了理论基础.

参考文献:

[1] 姚伟, 李勇, 范春石, 等. 复杂热环境下平流层飞艇高空驻留热动力学特性[J]. 宇航学报, 2013, 34: 1309.
[2] 唐新姿, 李鹏程, 彭锐涛, 等. 湍流工况小型风力机翼型气动特性及稳健优化[J]. 机械工程学报,

2020, 56: 192.

[3] 高莹莹, 杨凯威, 孔维萱, 等. 高超声速飞行器尖化前缘气动热环境研究[J]. 导弹与航天运载技术, 2019(6): 112.
[4] 徐世南, 吴催生. 高超声速飞行器热防护结构研究进展[J]. 飞航导弹, 2019(4): 48.
[5] 戎操, 王地灵. 湍流强度对风机叶片风效应影响的试验研究[J]. 建筑结构, 2019, 49: 357.
[6] 谭公礼, 吴学群, 刘则良, 等. 飞行器高空下落散热数值模拟及试验研究[J]. 科学技术与工程, 2018, 18: 120.
[7] Chu X, Yang G, Pandey S, *et al.* Direct numerical simulation of convective heat transfer in porous media [J]. Int J Heat Mass Tran, 2019, 133: 11.
[8] Hwang H G, Lee J H. Secondary flows in turbulent boundary layers over longitudinal surface roughness [J]. Phys Rev Fluid, 2018, 3: 1.
[9] Qiao Z X, Xu S J, Zhou Y. On the measurement of wall-normal velocity derivative in a turbulent boundary layer [J]. Flow Turbul Combust, 2019, 103: 369.
[10] Marchetto C, Maxit L, Robin O, *et al.* Experimental prediction of the vibration response of panels under a turbulent boundary layer excitation from sensitivity functions [J]. J Acoust Soc Am, 2018, 143: 2954.
[11] Methel J, Forte M, Vermeersch O, *et al.* An experimental study on the effects of two-dimensional positive surface defects on the laminar-turbulent transition of a sucked boundary layer [J]. Exp Fluids, 2019, 60: 93.
[12] Schulz-Jander B. Heat transfer calculations in turbulent boundary layers using integral relations [J]. Acta Mech, 1975, 21: 301.
[13] Thomas L C. A simple integral approach to turbulent thermal boundary layer flow [J]. J Heat Trans, 1978, 100: 744.
[14] Mautner T S, van Atta C W. An unsteady momentum integral calculation for the turbulent spot [J]. Phys Fluids, 1985, 28: 1043.
[15] Sucec J. Modern integral method calculation of turbulent boundary layers [J]. J Thermophys Heat Tr, 2006, 20: 552.
[16] Khademi M H, Hezave A Z, Mowla D, *et al.* A simple model for turbulent boundary layer momentum transfer on a flat plate [J]. Chem Eng Technol, 2010, 33: 867.
[17] Khademi M H, Mozafari A. Integral energy equa-

tion model for heat convection to turbulent boundary layer on a flat plate [J]. Front Heat Mass Transfer, 2016, 7: 33.

[18] Kays W M, Crawford M E. Convective heat and mass transfer [M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1993.

[19] 杨世铭. 传热学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[20] 余振苏, 唐帆, 肖梦娟. 面向精准工程湍流模型的理论研究[J]. 空气动力学学报, 2019, 37: 1.

[21] 张靖周. 高等传热学[M]. 北京: 科学教育出版社, 2009.

[22] Moffat R J, Kays W M. The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental heat transfer with uniform blowing and suction [J]. Int J Heat Mass Tran, 1968, 11: 1547.

引用本文格式:

中 文: 李开勇, 赵波, 王翼鹏. 基于积分方法的外掠平板湍流温度场的解析解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 526.

英 文: Li K Y, Zhao B, Wang Y P. The analytical solutions of temperature field based on an integral method for turbulent thermal boundary layer flows over a flat plate [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 526.