doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 01. 007

三阶无穷多点边值问题正解的存在性

高 婷，韩晓玲
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文研究了如下三阶微分方程的无穷多点边值问题

$$\begin{cases} u''' + \lambda a(t) f(u) = 0, t \in (0,1), \\ u(0) = \beta u'(0), u(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u(\xi_i), u'(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中参数 $\lambda > 0$ ，$\xi_i \in (0,1)$ ，$\alpha_i \in (0, \infty]$，且满足 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i > 1$ ，$0 < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i) < 1$. $a(t) \in C([0,1],[0,\infty))$ ，$f \in C([0,\infty),[0,\infty))$. 运用锥拉伸与压缩不动点定理，在 f 满足超线性和次线性的情况下，本文不仅得到了该边值问题正解的存在性，同时还得到了使得问题有解的特征值 λ 的取值范围.

关键词：无穷多点边值问题；特征值；正解；锥拉伸与压缩不动点定理
中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2016)01-0035-07

Positive solutions of third-order ∞-point boundary value problems

GAO Ting, *HAN Xiao-Ling*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive solutions to the following third-order ∞-point boundary value problem

$$\begin{cases} u''' + \lambda a(t) f(u) = 0, t \in (0,1), \\ u(0) = \beta u'(0), u(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u(\xi_i), u'(1) = 0 \end{cases}$$

where $\lambda > 0$ is a parameter, $\xi_i \in (0,1)$, $\alpha_i \in (0, \infty]$, satisfying $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i > 1$, $0 < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i) < 1$. $a(t) \in C([0,1],[0,\infty))$, $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$. By using Krasnoselskii's fixed point theorem in cones, we obtain the existence of the positive solution and the eigenvalue intervals on which there exists a positive solution if f is either superlinear or sublinear.

Key words: ∞-point boundary value problems; Eigenvalue; Positive solutions; Krasnoselskii's fixed point theorem
(2010 MSC 34B10)

收稿日期：2015-03-19
基金项目：国家自然科学基金(11101335)
作者简介：高婷(1990－)，女，甘肃民勤人，硕士研究生，主要研究方向为常微分边值问题，E-mail：939832645@qq.com.
通讯作者：韩晓玲，E-mail：hanxiaoling9@163.com.

1 引 言

本文考虑如下奇异三阶无穷多点边值问题

$$\begin{cases} u''' + \lambda a(t) f(u) = 0, t \in (0,1), \\ u(0) = \beta u'(0), u(1) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u(\xi_i), u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性. 其中 $\beta > 0$,$\lambda > 0$ 是参数,$\xi_i \in (0,1)$,$\alpha_i \in (0,\infty]$ 且满足 $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i > 1$,$0 < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i) < 1$. $a(t) \in C([0,1],[0,\infty))$, $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$. 由于三阶微分方程在理论研究和实际应用领域,比如流体力学边界层理论[1]等,中具有重要作用,近年来它一直受到广大学者的密切关注. 许多理论,比如上下解方法[1-4],打靶法[5],单调迭代理论[6]不动点指数[7]都被用来研究各类边值条件下的三阶微分方程边值,这里的边值条件主要包括两点边值条件[1-5,7],三点边值条件[8-10],周期边值条件[6]等. 但对于非线性三阶微分方程无穷多点边值问题的可解性以及正解的存在性则很少有人研究.

受以上文献的启发并结合文献[11],[12],本文中我们讨论奇异三阶无穷多点边值问题正解的存在性. 在 f 满足超线性或次线性的情况下,运用锥拉伸与压缩不动点定理,我们不仅得到了问题(1)正解的存在性,同时还得到了使得问题存在正解的特征值 λ 的取值范围.

2 预备知识

假设 $E = C[0,1]$,$C^3[0,1]$ 分别是赋范为 $\| u \| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$ 和 $\| u \|_3 = \sup_{t \in [0,1]} \{ \| u(t) \|, \| u'(t) \|, \| u''(t) \|, \| u'''(t) \| \}$ 的 Banach 空间. 设 $\sigma \in (0,1)$ 是一个常数. 令

$$K = \{ u \in C[0,1] \mid u \geqslant 0, \min_{t \in [\sigma, 1-\sigma]} u(t) \geqslant \sigma \| u \| \}.$$

易见 K 是 $C[0,1]$ 中的非负锥. 以下我们假设:

(H_1) f :$[0,1] \to [0,\infty]$ 连续;

(H_2) $a(t)$:$[0,1] \to [0,\infty]$ 连续,且在 $(0,1)$ 的任意子区间内 $a(t)$ 不恒为 0;

(H_3) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i > 1$,$0 < \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i) < 1$,且

$$\beta > \frac{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i - 1}.$$

对任意给定的 $n \in \mathbf{N}$,考虑问题

$$\begin{cases} u''' + y(t) = 0, t \in (0,1), \\ u(0) = \beta u'(0), u(1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\xi_i), \\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

引理 2.1 设 $\beta \neq \dfrac{1 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i - 1}$. 则对任意的 $y \in C[0,1]$ 且 $y \geqslant 0$,边值问题(2)的唯一解 u 满足

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) y(s) \mathrm{d}s + \frac{-t^2 + 2t + 2\beta}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i) - 1 + 2\beta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right)} \int_0^1 G(1,s) y(s) \mathrm{d}s - \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (-t^2 + 2t + 2\beta)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i (2 - \xi_i) - 1 + 2\beta\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right)} \int_0^1 G(\xi_i, s) y(s) \mathrm{d}s \tag{3}$$

其中

$$G(t,s) = \frac{1}{2} \begin{cases} (1-s)t^2, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ (-t^2 + 2t - s)s, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

为了讨论正解的存在性,我们需要得到 $G(t,s)$ 的一些性质:

引理 2.2[11] 对于上面给出的 $G(t,s)$,我们可以得到以下性质:

(i) $0 \leqslant t^2 G(1,s) \leqslant G(t,s) \leqslant G(1,s)$;

(ii) $G(\xi_i,s)\leqslant(-\xi_i^2+2\xi_i)G(1,s)$.

引理 2.3　设(H_3)成立，则对任意的 $y\in C[0,1]$ 且 $y\geqslant 0$，边值问题(2)的唯一解 u 非负且满足 $\min\limits_{t\in[\sigma,1-\sigma]}u(t)\geqslant\sigma u$，其中

$$\sigma=\frac{2\beta\left[1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)\right]}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)+2\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

定义一个算子 $T:K\to K$，

$$(Tu)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s-\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(-t^2+2t+2\beta)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \tag{5}$$

定理 2.4[13]　设 X 是一个实 Banach 空间，$Q\subset X$ 是一个锥. Ω_1,Ω_2 是 X 的有界开子集，且 $0\in\Omega_1,\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$，令 $T:Q\cap(\overline{\Omega_2}/\Omega_1)\to Q$ 是一个全连续算子，并且满足：

(i) $\|Tx\|\leqslant\|x\|$，$x\in Q\cap\partial\Omega_1$，$\|Tx\|\geqslant\|x\|$，$x\in Q\cap\partial\Omega_2$，

或者

(ii) $\|Tx\|\geqslant\|x\|$，$x\in Q\cap\partial\Omega_1$，$Tx\leqslant x$，$x\in Q\cap\partial\Omega_2$，

则 T 在 $Q\cap(\overline{\Omega_2}/\Omega_1)\to Q$ 中有一个不动点.

为了说明方便，我们给出以下的记号：

$$f^0=\limsup_{x\to 0^+}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(x)}{x},\quad f^\infty=\limsup_{x\to\infty}\max_{t\in[0,1]}\frac{f(x)}{x}$$

$$f_0=\liminf_{x\to 0^+}\max_{t\in[\sigma,1-\sigma]}\frac{f(x)}{x},\quad f_\infty=\liminf_{x\to\infty}\max_{t\in[\sigma,1-\sigma]}\frac{f(x)}{x}$$

$$A=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)+2\beta\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)\right]}\int_0^1(1-s)sa(s)\mathrm{d}s,$$

$$B=\frac{\left[1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)\right]\left(2\beta-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\beta\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}{2\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)\right]}\int_\sigma^{1-\sigma}(1-s)sa(s)\mathrm{d}s.$$

3　主要结论

定理 3.1　假设$(H_1)\sim(H_3)$成立，如果 $\frac{1}{Bf_\infty}<\frac{1}{Af^0}$，则对任意 $\lambda\in\left(\frac{1}{Bf_\infty},\frac{1}{Af^0}\right)$，问题(1)至少存在一个正解.

证明　首先考虑

$$\begin{cases}u'''+\lambda a(t)f(u)=0,t\in(0,1),\\ u(0)=\beta u'(0),u(1)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i u(\xi_i),u'(1)=0\end{cases}\tag{6}$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，问题(6)就转化为问题(1). 而问题(6)有解当且仅当 u 是算子方程 $Tu=u$ 的解，其中

$G(t,s)$ 由(4)式定义,由引理2.3知 $T(K)\subset K$.

下证 $T:K\to K$ 是全连续的.我们先证 $T:K\to K$ 的连续性.设 y_n, $y^*\in K$ 满足 $y_n-y^*\to 0$ ($n\to\infty$),则存在常数 $M_0>0$,使得 $\sup\{\|y_n\|,\|y^*\|\}\leqslant M_0$.并且

$$Ty_n(t)-Ty^*(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)\left|f(y_n(s))-f(y^*(s))\right|\mathrm{d}s+$$

$$\frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(1,s)a(s)\left|f(y_n(s))-f(y^*(s))\right|\mathrm{d}s-$$

$$\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)\left|f(y_n(s))-f(y^*(s))\right|\mathrm{d}s.$$

根据 f 在 $[-M_0,M_0]$ 上的一致连续性可推知 $Ty_n-Ty^*\to 0$ ($n\to\infty$).

再证 $T:K\to K$ 是紧的.设 $B\subset C[0,1]$ 有界,即存在 $M>0$,使得 $x\leqslant M$, $\forall x\in B$.从而

$$(Tu)(t)\leqslant\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+$$

$$\frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s=$$

$$\lambda\left[1+\frac{-t^2+2t+2\beta}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\right]\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

这表明 $T(B)$ 为 K 中的有界集,又由于 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上一致连续,故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$,当 t_1, $t_2\in[0,1]$ 满足 $|t_1-t_2|<\delta$ 时, $|G(t_1,s)-G(t_2,s)|<\varepsilon$.因此对任意 $x\in B$,有

$$|Tu(t_1)-Tu(t_2)|\leqslant\lambda\int_0^1|G(t_1,s)-G(t_2,s)|a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+$$

$$\frac{\lambda\left|-t_1^2+t_2^2+2(t_1-t_2)\right|}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\lambda\varepsilon c^*\left[1+\frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-1\right)}\int_0^1 G(1,s)\mathrm{d}s\right]$$

其中 $c^*=\max\{|a(t)f(u(t))|:t\in[0,1],x\in B\}$,故 $T(B)$ 中的函数族等度连续.综上所述,$T:K\to K$ 是全连续.

最后验证:对任意的 $n\in\mathbf{N}$,算子 T 满足定理2.4的其余条件.首先由条件(H_3)我们可以证明 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)\mathrm{d}s$ 收敛.这是因为 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i^2(1-\xi_i)$,而 $\alpha_i\xi_i^2(1-\xi_i)<\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)$,由($H_3$)知 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)$ 收敛.从而 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)\mathrm{d}s$ 收敛.又因 $a(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数,因此 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)\mathrm{d}s$ 收敛.

当 $\lambda\in\left(\frac{1}{Bf_\infty},\frac{1}{Af^0}\right)$ 时,选择 $\varepsilon>0$,使得

$$\frac{1}{B(f_\infty-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{A(f^0+\varepsilon)}\tag{7}$$

由 f^0 的定义可知,存在 $R_1>0$,使得

$$f(u)\leqslant(f^0+\varepsilon)u,\ u\in[0,R_1]\tag{8}$$

令 $\Omega_{R_1}=\{u\in K\,|\,u<R_1\}$.则对任意 $u\in\partial\Omega_{R_1}$,由(7),(8)式和引理2.2可得

$$(Tu)(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))ds+$$
$$\frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{\lambda\sum_{i=1}^n\alpha_i(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\left[1+\frac{1+2\beta}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\right]\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)+2\beta\sum_{i=1}^n\alpha_i}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\int_0^1 G(1,s)a(s)(f^0+\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)+2\beta\sum_{i=1}^n\alpha_i}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}(f^0+\varepsilon)\int_0^1 G(1,s)a(s)\mathrm{d}s\,\|u(s)\|=$$
$$\lambda A(f^0+\varepsilon)u\leqslant u.$$

因此，$\forall u\in\partial\Omega_{R_1}$，$Tu\leqslant u$. 由 f_∞ 的定义可知，存在 $R_2>\frac{1}{\sigma}R_1$，使得

$$f(u)\geqslant(f_\infty-\varepsilon)u,\ t\in[\sigma,1-\sigma],\ u\in[\sigma R_2,\infty) \tag{9}$$

令 $\Omega_{R_2}=\{u\in K\,|\,u<R_2\}$，则对任意 $u\in\partial\Omega_{R_2}$，有 $\min_{t\in[\sigma,1-\sigma]}u(t)\geqslant\sigma u\geqslant\sigma R_2$. 结合(7)，(9)式和引理 2.2，可得

$$(Tu)\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant\lambda\left[\frac{1}{4}+\frac{2\beta-2\beta\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\right]\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\frac{\left[1-\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)\right]\left(2\beta-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}{\sum_{i=1}^n\alpha_i\xi_i(2-\xi_i)-1+2\beta(\sum_{i=1}^n\alpha_i-1)}\int_\sigma^{1-\sigma}G(1,s)a(s)(f_\infty-\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s=$$
$$\lambda B(f_\infty-\varepsilon)u(s)\geqslant u$$

因此，$\forall u\in\partial\Omega_{R_2}$，$Tu\geqslant u$. 综上，根据定理 2.4 可得算子 T 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$ 中有一个不动点 u. 于是，当 $n\to\infty$ 时，得到一列解 $\{u_n\}_{n=1}^\infty\in C^3[0,1]$ 满足

$$u_n'''+\lambda a(t)f(u_n)=0,\ t\in(0,1) \tag{10}$$

$$u_n(0)=\beta u_n'(0),\ u_n(1)=\sum_{i=1}^n\alpha_i u_n(\xi_i),$$
$$u_n'(1)=0,\ n\in\mathbf{N} \tag{11}$$

从上面的证明过程可知，对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 都有

$$H_1\leqslant u_n\leqslant H_2,\ t\in[0,1] \tag{12}$$

由上式结合(10)式知，存在 $H_3>0$，使得

$u_n'''\leqslant H_3$，$t\in[0,1]$，其中

$$H_3 = \max\{a(t)f(u_n(t)) \mid t \in [0,1],\ 0 \leqslant u_n(t) \leqslant H_2\}.$$

又由拉格朗日中值定理知,存在 $d_n \in (0,1)$,使得

$$u_n''(d_n) = u_n'(1) - u_n'(0) = -\frac{1}{\beta}u_n(0),$$

即

$$u_n''(d_n) \leqslant \frac{1}{\beta}H_2 = H_4.$$

而

$$u_n''(t) = u_n''(d_n) - \int_{d_n}^{t} u_n'''(s)\mathrm{d}s,$$

故

$$u_n''' \leqslant H_3 + H_4,\ t \in [0,1] \tag{13}$$

又

$$u_n'(t) = u_n'(1) - \int_t^1 u_n''(s)\mathrm{d}s,$$

故

$$u_n' \leqslant H_4,\ t \in [0,1] \tag{14}$$

由(12)~(14)式知,$\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C^3[0,1]$ 中一致有界,并且 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $C[0,1]$ 中等度连续. 于是由 Arzela-Ascoli 定理知 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在收敛子列,不妨设 $n \to \infty$ 时 $u_n(t) \to u_*(t)$, $t \in [0,1]$.

下面验证 $u_* \in C^3[0,1]$ 并且满足问题(1). 因为

$$u_n(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u_n(s))\mathrm{d}s + \frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i) - 1 + 2\beta(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - 1)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u_n(s))\mathrm{d}s - \frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i) - 1 + 2\beta(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i - 1)}\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)f(u_n(s))\mathrm{d}s \tag{15}$$

记 $C = \max\{G(s,s)a(s) \mid s \in [0,1]\}$,则

$$G(t,s)a(s)f(u_n(s)) - G(t,s)a(s)f(u_*(s)) \leqslant Cf(u_n) - f(u_*).$$

又 $n \to \infty$ 时,$u_n(t) \to u_*(t)$,从而 $f(u_n) - f(u_*) \to 0$. 也就是说 $n \to \infty$ 时,$G(t,s)a(s)f(u_n(s))$ 一致收敛于 $G(t,s)a(s)f(u_*(s))$. 至此,对(15)式两端关于 n 求极限得

$$u_*(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u_*(s))\mathrm{d}s + \frac{\lambda(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i) - 1 + 2\beta(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i - 1)}\int_0^1 G(1,s)a(s)f(u_*(s))\mathrm{d}s - \frac{\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(-t^2+2t+2\beta)}{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\xi_i(2-\xi_i) - 1 + 2\beta(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i - 1)}\int_0^1 G(\xi_i,s)a(s)f(u_*(s))\mathrm{d}s \tag{16}$$

故 $u_* \in C^3[0,1]$. 而且对(16)两端求导,可得

$$u_*''' + \lambda a(t)f(u_*) = 0,\ t \in (0,1),$$
$$u_*(0) = \beta u_*'(0),\ u_*'(1) = 0.$$

再结合 $u_n(1) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_n(\xi_i)$ 可得 $u_*(1) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i u_*(\xi_i)$, 即 u_* 便是问题(1.1)的正解.

推论 3.2 假设(H_1)~(H_3)成立,如果 $f^0 = 0$, $f_\infty = \infty$,则对任意 $\lambda \in (0,\infty)$,问题(1)至少存在一个正解.

推论 3.3 假设(H_1)~(H_3)成立,如果 $0 < f^0 < \infty$, $f_\infty = \infty$,则对任意 $\lambda \in \left(0,\frac{1}{Af^0}\right)$,问题(1)至少存在一个正解.

推论 3.4 假设(H_1)~(H_3)成立,如果 $f^0 = 0$, $0 < f_\infty < \infty$,则对任意 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_\infty},\infty\right)$,问题(1)至少存在一个正解.

推论 3.5 假设(H_1)~(H_3)成立,如果 $\frac{1}{Bf_0}$

$< \frac{1}{Af^{\infty}}$，则对任意 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_0}, \frac{1}{Af^{\infty}}\right)$，问题(1)至少存在一个正解.

推论 3.6　假设(H_1)～(H_3)成立，如果 $f_0 = \infty$，$f^{\infty} = 0$，则对任意 $\lambda \in (0, \infty)$，问题(1)至少存在一个正解.

推论 3.7　假设(H_1)～(H_3)成立，如果 $f_0 = \infty$，$0 < f^{\infty} < \infty$，则对任意 $\lambda \in \left(0, \frac{1}{Af^{\infty}}\right)$，问题(1)至少存在一个正解.

推论 3.8　假设(H_1)～(H_3)成立，如果 $0 < f_0 < \infty$，$f^{\infty} = 0$，则对任意 $\lambda \in \left(\frac{1}{Bf_0}, \infty\right)$，问题(1)至少存在一个正解.

参考文献：

[1]　Howes F A. The asymptotic solution of a class of third-order boundary value problems arising in the theory of thin film flows[J]. SIAM J Appl Math，1983，43：993.

[2]　Du Z J，Ge W G，Lin X J. Existence of solutions for a class of third-order nonlinear boundary value problems[J]. J Math Anal Appl，2004，294：104.

[3]　Feng Y Q，Liu S Y. Solvability of a third-order two-point boundary value problem[J]. Appl Math Lett，2005，18：1034.

[4]　Yao Q L，Feng Y Q. Existence of solution for a third-order two-point boundary value problems[J]. J Math Lett，2002，15：227.

[5]　Pei M H，Chang S K. Existence and uniqueness of solutions for third-order nonlinear boundary value problems[J]. J Math Anal Appl，2007，327：23.

[6]　Drici Z，Mcrae F A，Vasundhara D J. Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with casual operators[J]. Nonlinear Anal，2006，64：1272.

[7]　刘瑞宽. 一类奇异三阶两点边值问题正解的存在性[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2014，4：482.

[8]　Guezane-Lakoud A，Kelaiaia S. Solvability of a three-point nonlinear boundary-value problem[J]. Electron J Diff Eq，2010，139：1.

[9]　Guo L J，Sun JP，Zhao Y H. Existence of positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary value problem[J]. Nonlinear Anal，2008，10：3151.

[10]　Yao Q L. The existence and multiplicity of positive solutions for third-order three-point boundary value problems[J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser，2003，19：117.

[11]　Feng X F，Feng H，Bai D L. Eigenvalue for a singular third-order three-point boundary value problem[J]. Appl Math，2013，219：9783.

[12]　马如云，范虹霞，韩晓玲. 二阶常微分方程无穷多点边值问题的正解[J]. 数学物理学报，2009，29A(3)：699.

[13]　Guo D J，Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cone[M]. New York：Academic Press，1998.