

doi: 103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 03. 004

# 一维 Hopfield 神经网络模型的多稳态分析

宿娟<sup>1</sup>, 何志蓉<sup>2</sup>

(1. 成都师范学院数学系, 成都 610044; 2. 四川大学数学学院, 成都 610064)

**摘要:** 本文讨论一维 Hopfield 神经网络模型的多稳态问题. 当模型所含 S 型激活函数没有有界性限制时, 本文首先讨论了模型平衡点的存在性, 并进一步给出了模型取得一个, 二个, 或三个平衡点的参数条件以及每个平衡点的稳定性. 然后本文研究了模型在参数所有取值情况下的平衡点个数及其稳定性. 最后, 通过两个实例及其数值模拟说明了结果的有效性.

**关键词:** Hopfield 神经网络; 多稳态; 激活函数; 渐近稳定; 平衡点

**中图分类号:** O175      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0490-6756(2016)02-0260-05

## Multistable analysis for one dimensional Hopfield neural networks

SU Juan<sup>1</sup>, HE Zhi-Rong<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu 610044, China;  
2. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** This paper focuses on multistable analysis of one dimensional Hopfield neural networks, whose sigmoid activation function may not be bounded. Firstly, the condition for the existence of equilibria is established, the conditions for exactly 1, 2, or 3 equilibria and their respectively stability are proposed with some constraints for network parameters. Then the corresponding results about the equilibria features are supplemented in the remaining cases for the parameters. Thus, we obtain the relationships between all the different values of the parameters and the number of equilibria as well as their stability. Finally, by employing bounded and unbounded activation functions, two examples and numerical simulations are used to illustrate the theory developed in this paper.

**Key words:** Hopfield neural networks; Multistability; Activation function; Asymptotical stability; Equilibria

## 1 引言

由于 Hopfield 神经网络模型在优化, 图像处理, 规划等问题中有广泛应用<sup>[1-4]</sup>, 自提出以来就受到科学家们的关注. 在模型的应用中, 系统的动力学行为起到了至关重要的作用. 稳定性作为重要的动力学行为之一, 已有很多工作对其进行了讨论<sup>[4-15]</sup>. 在优化, 平行计算及信号处理等领域中,

单稳态的神经网络对模型的设计和应用有重要作用. 在早期的工作中, 单稳态神经网络的讨论已取得较多的结果<sup>[5-9]</sup>.

多个平衡点的共存将极大的改变模型的动力学行为, 甚至导致振动, 极限环, 混沌的发生<sup>[10,11]</sup>. 具有多个稳定平衡点或稳定周期轨的神经网络称为多稳态系统<sup>[12]</sup>. 在神经网络应用于联想记忆、模式识别时, 系统存在多个平衡点是必备条件. 在联

收稿日期: 2014-08-01

基金项目: 国家自然科学基金(61202045); 成都师范学院科研基金(CS15ZB04)

作者简介: 宿娟(1980-), 女, 四川崇州人, 硕士, 讲师, 主要研究方向为微分方程定性理论. E-mail: sujmath@163.com

通讯作者: 何志蓉. E-mail: hezhmaths@163.com

想记忆、模式识别的应用中,多稳态的神经网络具有明显的优势.因此,无论在理论还是应用中多稳态神经网络的研究都很有必要,而相关工作也受到越来越多的关注<sup>[12-15]</sup>.

激活函数对 Hopfield 神经网络模型的动力学性质有重大影响.常见的激活函数有如下三类: S 型<sup>[11,12]</sup>, 极限型<sup>[12,13]</sup> 和线性阈值型<sup>[14,15]</sup>.文献<sup>[14,15]</sup>针对含线性阈值激活函数的二维模型分别讨论了非退化和退化平衡点的存在条件,并给出了多个平衡点存在的充要条件.文献<sup>[12]</sup>针对有界 S 型激活函数,通过构造自映射区域,利用 Brouwer 不动点定理获得了模型至少存在  $3^n$  个平衡点的充分条件,其中  $n$  是系统的维数.激活函数的有界性是文献<sup>[12]</sup>中 Brouwer 不动点定理应用的关键性条件.针对模型中激活函数无界的情况,平衡点的存在性不能通过 Brouwer 不动点定理来获得.

当激活函数没有有界性限制时,解决系统平衡点存在性的常用方法有压缩映射原理<sup>[5]</sup>, 同胚映射<sup>[6,7]</sup>, 或拓扑度理论<sup>[8]</sup>.然而现有文献给出的充分条件对系统参数有较高的要求,也即是说将系统参数限定在一定的范围内,以此来保证系统平衡点的存在性.受文献<sup>[5~8,12,15]</sup>的启发,本文讨论一维 Hopfield 神经网络模型的多稳态问题,其中 S 型激活函数没有有界性的限制.首先,我们利用激活函数的性质获取平衡点的存在性,进一步利用几何方法讨论系统具有一至三个平衡点的条件及其稳定性结论,然后补充说明参数在其余情况下系统平衡点的个数及其稳定性.因此本文彻底解决了系统在参数所有取值时的平衡点问题.最后通过列举含有界和无界激活函数的模型,利用数值模拟验证所得结论.

## 2 预备知识

本文讨论如下的一维 Hopfield 神经网络模型:

$$\dot{u}(t) = -du + ag(u) + I \quad (1)$$

其中  $u(t)$  表示神经元的状态变量;  $d, a, I$  是实数,这里  $d$  表示神经元恢复孤立静息状态的速率,  $a$  表示神经元自身的联络权,  $I$  表示外部输入;  $g(u)$  是  $R$  上的连续函数,称为神经元的激活函数.

设  $u_0 \in \dot{R}$  满足

$$-du_0 + ag(u_0) + I = 0,$$

则称  $u_0$  是系统(1)的平衡点.

下面给出关于激活函数  $g(u)$  的三个假设:

$$H1 \quad 0 < g'(u) < g'(0), \quad u \neq 0,$$

$$H2 \quad \lim_{u \rightarrow \infty} g'(u) = 0,$$

$$H3 \quad u < 0 \text{ 时, } g''(u) > 0, \quad u = 0 \text{ 时, } g''(u) = 0, \quad u > 0 \text{ 时, } g''(u) < 0.$$

满足假设条件 H1-H3 的激活函数既存在有界又存在无界的情况,例如  $\arctan(ku)$ ,  $\tanh(ku)$ ,  $k > 0$  是有界的例子.而  $u \leq \frac{2}{3}$  时  $g(u) = \arctan\left(\frac{3}{4}u\right)$ ,  $u > \frac{2}{3}$  时  $g(u) = \ln \frac{3(1+u)}{5} + \arctan \frac{1}{2}$  则为无界的例子.针对没有有界性限制的激活函数,我们将通过函数性质的分析,获得系统在参数所有取值情况下的平衡点个数,再进一步分析所得平衡点的稳定性.

## 3 主要结果

为了以下证明的方便,取  $d, a$  为非零实数,而  $da = 0$  的情况,我们将在注 1 中来说明.

**引理 3.1** 若条件 H2 成立,则系统(1)存在平衡点.

**证明** 在条件 H2 下,无论  $g$  是否有界,等式

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = 0 \quad (2)$$

成立.定义

$$F(u) := -\frac{d}{a}u + g(u) + \frac{I}{a} \quad (3)$$

从式(2)和式(3)我们得出,当  $\frac{d}{a} < 0$  时,有

$$\begin{cases} F(-\infty) = -\infty, \\ F(+\infty) = +\infty \end{cases} \quad (4)$$

而  $\frac{d}{a} > 0$  时,有

$$\begin{cases} F(-\infty) = +\infty, \\ F(+\infty) = -\infty \end{cases} \quad (5)$$

事实上,从式(4)或式(5)以及  $F$  的连续性可以得出,存在  $u_0$  满足  $F(u_0) = 0$ ,即系统(1)的平衡点存在.证毕.

无论激活函数有界或无界,引理 3.1 给出了系统(1)平衡点存在的条件.下面我们进一步就  $\frac{d}{a}$  的取值范围,分  $\frac{d}{a} < 0$ ,  $0 < \frac{d}{a} < g'(0)$  和  $\frac{d}{a} \geq g'(0)$  三类情况讨论平衡点的个数和稳定性.为了证明的方便,首先我们在定理 3.2 中讨论  $\frac{d}{a} < 0$  和  $\frac{d}{a} \geq$

$g'(0)$  的情况.

**定理 3.2** 若条件 H1 和 H2 成立, 则

(i) 当  $\frac{d}{a} < 0$  时, 系统(1)存在唯一平衡点, 且该平衡点在  $a < 0$  时渐近稳定,  $a > 0$  时不稳定;

(ii) 当  $\frac{d}{a} \geq g'(0)$  时, 系统(1)存在唯一平衡点. 进一步若条件 H3 成立,  $g \in C^3$  时, 该平衡点在  $a < 0$  时不稳定,  $a > 0$  时渐近稳定.

**证明** 条件 H2 保证了平衡点的存在性, 下面我们将证明平衡点的唯一性和稳定性.

(i) 当  $\frac{d}{a} < 0$  时, 根据条件 H1 有

$$F'(u) = -\frac{d}{a} + g'(u) > 0, u \in R,$$

由此说明  $F(u)$  在  $R$  上严格单增. 结合式(4), 得到  $F(u)$  的零点唯一, 即系统(1)的平衡点唯一, 并记此平衡点为  $u_0$ .

我们将系统(1)的右端在点  $u_0$  进行 Taylor 展开, 得到

$$\dot{u}(t) = (-d + ag'(u_0))(u - u_0) + o(u - u_0) \tag{6}$$

事实上  $a < 0$  时, 根据已知条件  $\frac{d}{a} < 0$  可以得出  $-d + ag'(u_0) < 0$ , 结合式(6)得到平衡点  $u_0$  渐近稳定. 反之  $a > 0$  时, 平衡点  $u_0$  不稳定. (i) 得证.

(ii) 当  $\frac{d}{a} \geq g'(0)$  时, 根据条件 H1 有

$$F'(u) = -\frac{d}{a} + g'(u) \leq 0, u \in R,$$

当且仅当  $\frac{d}{a} = g'(0), u = 0$  时,  $F'(u) = 0$ . 由此我们得到  $F(u)$  在  $R$  上严格单减, 结合式(5), 得到  $F(u)$  的零点唯一, 即系统(1)的平衡点唯一. 为了证明方便, 仍记此平衡点为  $u_0$ .

下面我们分两种情况讨论平衡点的稳定性. 首先当  $\frac{d}{a} = g'(0), u_0 = 0$  且  $g \in C^3$  时, 根据条件 H3 我们可以得到  $g''(0) = 0$  和  $g'''(0) < 0$ , 于是系统(1)的右端在点  $u_0 = 0$  的 Taylor 展开式为

$$\dot{u}(t) = \frac{a}{3!}g'''(0)u^3 + o(u^3) \tag{7}$$

从式(7)得知,  $a < 0$  时平衡点  $u_0 = 0$  不稳定, 而  $a > 0$  时, 平衡点  $u_0 = 0$  渐近稳定. 再对  $\frac{d}{a} = g'(0), u_0 \neq 0$  或  $\frac{d}{a} > g'(0)$  的情况讨论稳定性. 我们仍将

式(1)的右端在点  $u_0$  进行 Taylor 展开, 所得结果与式(6)相同. 根据已知条件  $\frac{d}{a} = g'(0), u_0 \neq 0$  或  $\frac{d}{a} > g'(0)$ , 我们得到  $-\frac{d}{a} + g'(u_0) < 0$ , 结合式(6)得出平衡点  $u_0$  在  $a < 0$  时不稳定,  $a > 0$  时渐近稳定. 证毕.

为了分析  $0 < \frac{d}{a} < g'(0)$  时系统平衡点的个数, 下面我们约定定理中需要的两个符号. 假设  $0 < \frac{d}{a} < g'(0)$ , 条件 H1~H3 成立, 利用  $g'$  的取值范围和单调性, 分别存在唯一的  $u_1, u_2$  满足

$$\begin{cases} u_1 < 0 < u_2, \\ g'(u_1) = g'(u_2) = \frac{d}{a} \end{cases} \tag{8}$$

通过  $F$  在点  $u_1$  和  $u_2$  取值的正负, 我们在定理 3.3 中说明平衡点的个数, 并在此基础上讨论平衡点的稳定性.

**定理 3.3** 设条件 H1~H3 成立,  $0 < \frac{d}{a} < g'(0)$ ,  $F(u)$  和  $u_1, u_2$  分别由式(3)和式(8)定义, 则

(i) 当  $F(u_1) > 0$  或  $F(u_2) < 0$  时, 系统(1)有唯一平衡点, 且位于  $(u_2, +\infty)$  或  $(-\infty, u_1)$  内, 该平衡点在  $a < 0$  时不稳定,  $a > 0$  时渐近稳定;

(ii) 当  $F(u_1) = 0$  或  $F(u_2) = 0$  时, 系统(1)有两个平衡点. 若  $F(u_1) = 0$ , 则点  $u_1$  是平衡点且不稳定, 而另一平衡点在  $(u_2, +\infty)$  内, 且  $a < 0$  时不稳定,  $a > 0$  时渐近稳定; 若  $F(u_2) = 0$ , 则点  $u_2$  是平衡点且不稳定, 而另一平衡点在  $(-\infty, u_1)$  内, 且  $a < 0$  时不稳定,  $a > 0$  时渐近稳定;

(iii) 在  $F(u_1), F(u_2)$  的其余取值情况下, 系统(1)有三个平衡点, 且分别在  $(-\infty, u_1), (u_1, u_2)$  和  $(u_2, +\infty)$  内. 当  $a < 0$  时,  $(-\infty, u_1)$  和  $(u_2, +\infty)$  内的平衡点不稳定, 而  $(u_1, u_2)$  内的平衡点渐近稳定; 当  $a > 0$  时,  $(-\infty, u_1)$  和  $(u_2, +\infty)$  内的平衡点渐近稳定, 而  $(u_1, u_2)$  内的平衡点不稳定.

**证明** 当  $0 < \frac{d}{a} < g'(0)$  时, 由 H1~H3 中  $g'(u)$  的性质和式(8)中  $u_1, u_2$  的定义有

$$F'(u) = -\frac{d}{a} + \begin{cases} < 0, u \in (-\infty, u_1) \cup (u_2, +\infty), \\ = 0, u \in u_1 \text{ 或 } u_2, \\ > 0, u \in (u_1, u_2). \end{cases}$$

从上式容易得到  $F(u)$  的单调性和极值情况如表 1 所示.

表 1  $F(u)$  的单调性Tab. 1 The monotonicity of  $F(u)$ 

$u$	$(-\infty, u_1)$	$u_1$	$(u_1, u_2)$	$u_2$	$(u_2, +\infty)$
$F(u)$	严格 单减	极小 值点	严格 单增	极大 值点	严格 单减

事实上从表 1 我们得到

$$F(u_1) < F(u_2) \quad (9)$$

(i) 若  $F(u_1) > 0$ , 从式(9)容易得出  $F(u_2) > 0$ . 结合式(5), 表 1 和值  $F(u_1)$ ,  $F(u_2)$  的正负, 我们得到  $F(u)$  的零点只能在  $(u_2, +\infty)$  内且唯一, 即系统(1)的平衡点唯一且在  $(u_2, +\infty)$  内. 将该平衡点记为  $u_0$ , 并且将系统(1)的右端在点  $u_0$  进行 Taylor 展开, 所得表达式与式(6)相同. 由于  $u_0 \in (u_2, +\infty)$ , 根据  $g'$  的单调性和式(8)中  $u_2$  的定义有

$$-\frac{d}{a} + g'(u_0) < 0 \quad (10)$$

最后结合式(6)和式(10)得出平衡点  $u_0$  在  $a < 0$  时不稳定,  $a > 0$  时渐近稳定. 同理可证  $F(u_2) < 0$  时的结论. (i) 得证.

(ii) 当  $F(u_1) = 0$  时, 由式(9)容易得到  $F(u_2) > 0$ . 结合式(5), 表 1 和值  $F(u_1)$ ,  $F(u_2)$  的正负可以得到  $F(u)$  只有两个零点,  $u_1$  是其中之一, 而另一零点在  $(u_2, +\infty)$  内, 仍记为  $u_0$ .

将系统(1)的右端在点  $u_1$  进行 Taylor 展开,

$$\dot{u}(t) = \frac{a}{2} g''(u_1) (u - u_1)^2 + o((u - u_1)^2) \quad (11)$$

从  $u_1$  的定义和条件 H3 可以得出  $g''(u_1) > 0$ . 因此无论  $a < 0$  或  $a > 0$ , 从式(11)得到平衡点  $u_1$  不稳定. 平衡点  $u_0$  的稳定性证明与上述(i)中的证明相同. 同理可证  $F(u_2) = 0$  的结论. (ii) 得证.

(iii) 首先我们分析  $F(u_1)$  和  $F(u_2)$  满足的具体条件. 将  $F(u_1)$ ,  $F(u_2)$  分别取作平面横坐标和纵坐标, 在满足式(9)的区域去掉 (i), (ii) 中  $F(u_1)$  和  $F(u_2)$  满足的条件, 此时  $F(u_1)$ ,  $F(u_2)$  满足的条件即是  $F(u_1) < 0$  且  $F(u_2) > 0$ . 结合式(5), 表 1,  $F(u_1) < 0$  且  $F(u_2) > 0$  得出  $F(u)$  只有 3 个零点, 且分别在  $(-\infty, u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$  和  $(u_2, +\infty)$  内.  $F(u)$  的零点等同于系统(1)的平衡点.

设上述三个区间内的平衡点分别为  $u_0^{(1)}$ ,  $u_0^{(2)}$  和  $u_0^{(3)}$ . 为了证明的方便, 统一用  $u_0$  代表上述三个

平衡点, 并将系统(1)的右端在点  $u_0$  进行 Taylor 展开, 所得表达式与式(6)相同. 根据  $g'(u)$  的单调性和  $u_0^{(1)}$ ,  $u_0^{(2)}$ ,  $u_0^{(3)}$  所在区间容易得到, 当  $a < 0$ ,  $u_0 = u_0^{(1)}$  或  $u_0 = u_0^{(3)}$  时, 有  $-d + ag'(u_0) > 0$ , 结合式(6)知道平衡点  $u_0^{(1)}$  和  $u_0^{(3)}$  不稳定, 而  $u_0 = u_0^{(2)}$  时, 有  $-d + ag'(u_0) < 0$ , 因此平衡点  $u_0^{(2)}$  渐近稳定. 同理可得  $a > 0$  时三个平衡点的稳定性. 证毕.

**注 1** 当  $da \neq 0$  时, 定理 3.2 和定理 3.3 获得了参数所有取值和系统(1)的平衡点个数, 稳定性之间的关系. 当  $da = 0$  时, 若  $d \neq 0, a = 0$  或  $d = a = 0$ , 平衡点问题容易解决. 当  $d = 0, a \neq 0$  时, 若  $-\frac{I}{a} \in \{g(u); u \in \mathbf{R}\}$ , 则平衡点存在且唯一, 当  $a < 0$  时该平衡点渐近稳定,  $a > 0$  时不稳定; 若  $-\frac{I}{a} \notin \{g(u); u \in \mathbf{R}\}$ , 则平衡点不存在.

从定理 3.2, 3.3 和注 1 得出, 系统(1)中参数所有取值情况均已讨论, 因此本文彻底解决了系统(1)的平衡点个数和稳定性问题.

**注 2** 若系统(1)存在唯一平衡点且渐近稳定, 从其 Taylor 展式可以得到该平衡点是全局渐近稳定. 因此定理 3.2, 定理 3.3(i) 和注 1 中的唯一平衡点若满足渐近稳定, 则一定是全局渐近稳定的.

## 4 数值模拟

本节将通过两个实例来验证所得结论, 其中例 4.1 和例 4.2 的激活函数分别是有界和无界的.

**例 4.1** 对系统(1), 取  $d = 1.28, a = 1, I = -0.64 \ln 2 + 0.6, g(u) = \tanh(2u)$ .

容易验证  $g(u)$  是满足条件 H1~H3 的有界函数. 计算得  $g'(0) = 2, 0 < \frac{d}{a} < 1.28 < g'(0)$ , 根据定理 3.3 需进一步计算  $u_1, u_2$ . 由  $g'(u) = 1.28$  计算得出  $u_1 = -\ln \sqrt{2}, u_2 = \ln \sqrt{2}$ , 因此有  $F(u_1) = 0$ , 满足定理 3.3(ii) 的条件, 因此我们得到系统存在两个平衡点,  $u_1 = -\ln \sqrt{2}$  是其中之一且不稳定, 而另一平衡点  $u_0$  在  $(\ln \sqrt{2}, +\infty)$  内且渐近稳定. 图 1 的数值模拟验证了所得结论.

**例 4.2** 令系统(1)中  $d = 1, a = 5, I = 1.5$ , 当  $u < \frac{2}{3}$  时,  $g(u) = \arctan \frac{3u}{4}$ ,

$$u \geq \frac{2}{3} \text{ 时, } g(u) = \ln \frac{3(1+u)}{5} + \arctan \frac{1}{2}.$$

容易验证  $g(u)$  是满足条件 H1~H3 的无界

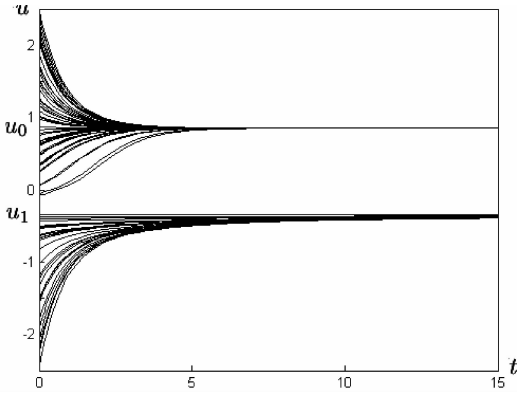


图 1  $u_1 = -\ln\sqrt{2}$  不稳定,  $u_0$  渐近稳定

Fig. 1  $u_1 = -\ln\sqrt{2}$  is unstable,  $u_0$  is asymptotically stable

函数. 计算得  $g'(0) = \frac{3}{4}$ ,  $0 < \frac{d}{a} = 0.2 < g'(0)$ , 根据定理 3.3 需进一步计算  $u_1, u_2$ . 利用数学软件 Maple14, 数值求解方程由  $g'(u) = 0.2$  得出  $u_1 = -1.9437, u_2 = 3.1667$ , 再将  $u_1, u_2$  代入  $F(u)$  计算得  $F(u_1) = -0.8808 < 0, F(u_2) = 0.4466 > 0$ , 满足定理 3.3(iii) 的条件, 因此系统存在三个平衡点, 且分别在  $(-\infty, -1.9437), (-1.9437, 3.1667), (3.1667, +\infty)$  内. 记上述三个区间内的平衡点分别为  $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}$  和  $u_0^{(3)}$ , 由定理 3.3(iii) 和  $a > 0$ , 我们得出  $u_0^{(1)}$  和  $u_0^{(3)}$  渐近稳定,  $u_0^{(2)}$  不稳定. 图 2 的数值模拟验证了所得结论.

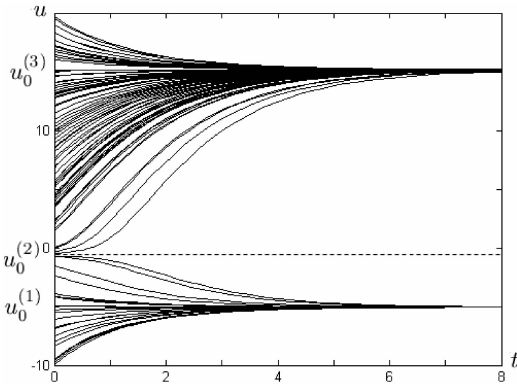


图 2  $u_0^{(1)}, u_0^{(3)}$  渐近稳定,  $u_0^{(2)}$  不稳定

Fig. 2  $u_0^{(1)}$  and  $u_0^{(3)}$  are asymptotically stable, and  $u_0^{(2)}$  is unstable

## 参考文献:

[1] Ghatee M, Niksirat M. A Hopfield neural network applied to the fuzzy maximum cut problem under credibility measure[J]. Information Sciences, 2013, 229: 77.  
 [2] Talavan P M, Yanez J. Parameter setting of the

Hopfield networks applied to TSP[J]. Neural Networks, 2002, 15(3): 363.

- [3] Pajares G, Guijarro M, Ribeiro A. A Hopfield neural network for combining classifiers applied to textured images[J]. Neural Networks, 2010, 23: 144.  
 [4] Tank D W, Hopfield J J. Simple "neural" optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1986, 33(5): 533.  
 [5] Mohamad S, Gopalsamy K, Akca H. Exponential stability of artificial neural networks with distributed delays and large impulses[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9: 872.  
 [6] Forti M, Tesi A. New conditions for global stability of neural networks with application to linear and quadratic programming problems[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1995, 42(7): 354.  
 [7] Zhang J Y. Global exponential stability of interval neural networks with variable delays[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19: 1222.  
 [8] 王林山, 徐道义. 变时滞反应扩散 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性[J]. 中国科学: E 辑, 2003, 33(6): 488.  
 [9] 张子芳, 邓谨. 变时滞随机反应扩散 Hopfield 神经网络的稳定性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2010, 47(3): 452.  
 [10] Liu Z, Yu J, Xu D, et al. Stable analysis for neural networks: set-valued mapping method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 220: 46.  
 [11] Hsu C H, Yang S Y, Yang T H, et al. Stability and bifurcation of a two-neuron network with distributed time delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11: 1472.  
 [12] Cheng C Y, Lin K H, Shih C W. Multistability and convergence in delayed neural networks[J]. Physica D, 2007, 225: 61.  
 [13] Wang L, Lu W, Chen T. Coexistence and local stability of multiple equilibria in neural networks with piecewise linear nondecreasing activation functions[J]. Neural Networks, 2010, 23: 189.  
 [14] Tan K C, Tang H, Zhang W. Qualitative analysis for recurrent neural networks with linear threshold transfer functions[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 2005, 52(5): 1003.  
 [15] Zou L, Tang H, Tan K C, et al. Analysis of continuous attractors for 2-D linear threshold neural networks[J]. IEEE Trans Neural Networks, 2009, 20(1): 175.