2016 年 3 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Mar. 2016
第 53 卷　第 2 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 53　No. 2

doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 03. 003

Darcy-Stokes 耦合问题的 H(div)有限元逼近法

刘程熙[1,2,3]，孔　花[1,2,3]，吴开腾[2,3,4]

(1.内江师范学院数学与信息科学学院，内江 641112；2.数据恢复四川省重点实验室，内江 641112
3.四川省高等学校数值仿真重点实验室，内江 641112；4.内江师范学院教务处，内江 641112)

摘　要：本文主要研究了 Darcy-Stokes 耦合流动问题的数值解. Darcy-Stokes 的耦合模型由流体域的 Stokes 方程，多 孔介质域的 Darcy 方程及两区域的界面的界面条件所构成. 通过引入 Lagrange 乘子处理界面条件，本文得到了耦合的 Darcy-Stokes 的模型的一种新的变分格式，并利用 H(div)协调的低阶的 R-T 元对该耦合问题进行了离散，证明了离散问题解的存在唯一性，且进行了误差估计.

关键词：H(div)协调有限元；Lagrange 乘子；Darcy-Stokes 方程；误差估计

中图分类号：O242.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2016)02-0253-07

H(div) conforming finite element methods for the coupled Darcy-Stokes

LIU Cheng-Xi[1,2,3], *KONG hua*[1,2,3], *WU Kai-Teng*[2,3,4]

(1. Colledge of Mathematics and Information Sciences, Neijiang Normal University, Neijiang 641112, China;
2. Date Recovery Key Laboratory of Sichuan Province Neijiang 641112, China;
3. Laboratory of Numberical Simulation of Sichuan Province, Neijiang 641112, China;
4. Neijiang Normal University Education Administrator Offer, Neijiang 641112, China)

Abstract: The numerical solution of coupled Darcy-Stokes flow problem is studied in this paper. By introducing a Lagrangian multiplier to process interface, a new variational form for coupled Darcy-Stokes model is proposed. The problem is discretized by the low order conforming H(div) R-T elements. We prove the existence and uniqueness of the discrete problem and get error estimates.

Key words: H(div) confined finite element; Lagrange multiplier; Darcy-stokes equation; Error estimates
(2010 MSC 65M15, 65M60, 76D07)

1　引　言

近年来，Darcy-Stokes 耦合流动问题因其在水利、生物和环境科学中的应用引起了大家的关注，成为了流体力学和计算数学的研究热点[1-14]. 耦合的 Darcy-Stokes 模型由流体域的 Stokes 方程和多孔介质域的 Darcy 定律耦合而成. 其在耦合界面满足 Beaver-joseph-saffman 条件.

二维耦合的 Darcy-Stokes 问题涉及到 Stokes 方程和 Darcy 方程. 针对耦合界面的有限元求解文献[2,5,6]在两个子区域采用了不同的离散速度空间，因而较难满足界面条件. 文献[8,10,13,14]在

收稿时间：2015-04-02
基金项目：四川省教育厅重点项目(14ZA0244)
作者简介：刘程熙(1977－)，女，四川大竹人，副教授，主要研究方向为有限元法及其应用. E-mail：lichengxi050317@163.com
通讯作者：吴开腾. E-mail：ktengwu@njtc.edu.cn

两个子区域采用了相同的速度有限元空间. 由于在对 Darcy 方程和 Stokes 方程求解时,有限元空间都需要满足 inf-sup 约束条件,这就使得有限元逼近的解很难满足严格的无散条件,该条件需要数值解在 H(div)中,因而文献[8,13,14]利用 H(div)协调有限元同时对两个方程的速度空间进行离散是自然的选择. 但是,上述文献要求 Stokes 区域的剖分在界面上的边属于且仅属于 Darcy 区域中的某一个三角形(四边形),因而在两个不同的区域网格不能自由地进行剖分. 文献[6]则在界面上引入了 Lagrange 乘子,在两区域就可允许它们各自分块的网格在界面上可以不相匹配,但是文献[6]在两个子区域上却采用了不同的离散速度空间,数值计算上并不方便.

本文的主要工作是利用 Raviart-Thomas 元同时离散 Stokes 和 Darcy 问题的速度和压力空间,同时在界面上类似于文献[6]引入 Lagrange 乘子对耦合问题进行了分析,证明了离散问题解的存在唯一性,得到了误差估计.

本文的大体框架如下:第二节介绍问题的模型;第三节得到变分弱形式;第四节建立混合有限元格式并分析其稳定性;第五节进行误差估计.

2 问题的模型及变分形式

在本节之初为了便于叙述约定文中的 $l=s,d$. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是一个连通的有光滑边界的多边形区域,由多孔介质域 Ω_d 和 $\Omega_s=\Omega\backslash\overline{\Omega}_d$ 所构成. 且 $\partial\Omega_s\cap\partial\Omega_d=\Gamma$. 记 $\Gamma_l=\partial\Omega_l\backslash\Gamma$,在 Ω 上速度和压力分别为 $\boldsymbol{u},p$,且满足 $\boldsymbol{u}_l=\boldsymbol{u}|_{\Omega_l}$, $p_l=p|\Omega_l$.

流体在 Ω_d 上由 Darcy 方程所控制,其上的单位外法向量为 $\boldsymbol{n}_d$,其速度和压力满足的方程为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_d+\nabla p_d=0, & \text{in } \Omega_d,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}_d=0, & \text{in } \Omega_d,\\ \boldsymbol{u}_d\cdot\boldsymbol{n}_d=0, & \text{on } \Gamma_d\end{cases}\tag{1}$$

在 Ω_s 上流体的速度和压力满足 stokes 方程

$$\begin{cases}-2\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_s)+\nabla p_s=\boldsymbol{f}, & \text{in } \Omega_s,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}_s=0, & \text{in } \Omega_s,\\ \boldsymbol{u}_s=0, & \text{on } \Gamma_s\end{cases}\tag{2}$$

其中,方程(1)中 $\boldsymbol{K}$ 是一正定的且上、下一致有界的张量,方程(2)中的 $\varepsilon>0$ 为流体的粘性系数,$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}^T)$. 为介绍界面条件的方便,记 $\boldsymbol{n}_s$ 为区域 Ω_s 上的单位外法向量,易知在 Γ 上有 $\boldsymbol{n}_s=-\boldsymbol{n}_d$. 下面介绍在 Γ 上满足的三个界面条件.

$$\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{n}_s=-\boldsymbol{u}_d\cdot\boldsymbol{n}_d \quad \text{(质量守恒条件)}\tag{3}$$

$$p_s-2\varepsilon\boldsymbol{n}_s\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_s)\cdot\boldsymbol{n}_s=p_d \quad \text{(外力平衡条件)}\tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}_s\cdot\tau=-2\frac{\sqrt{\boldsymbol{K}}}{\alpha}\boldsymbol{n}_s\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\cdot\tau \quad \text{(Beaver-Joseph-Saffman 规律)}\tag{5}$$

此处 τ 为 Γ 上的单位切向量,$\alpha>0$ 是由实验测量而确定的常数,为方便记 $G=\frac{\sqrt{K}}{\alpha}$

3 变分弱形式

设 J^d 和 J^s 分别为 Ω_d 和 Ω_s 的拟一致正则三角形剖分,单元的最大直径分别记为 h_d 和 h_s,以 ε_h 表示所有边的集合,则有 $\varepsilon_h=\varepsilon_h(\Omega_s^+)+\varepsilon_h(\Omega_d)+\varepsilon_h(\partial\Omega_d)$,其中 $\Omega_s^+=\Omega_s\cup\Gamma_s$, $\varepsilon_h(\upsilon)=\{e\in\varepsilon_h, e\in\upsilon\}$. 设 e 为两相邻单元 K_1,K_2 的公共边,则在 e 上的跳量和平均分别为:$[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{u}|_{K_1}-\boldsymbol{u}|_{K_2}$;$\{\boldsymbol{u}\}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}|_{K_1}+\boldsymbol{u}|_{K_2})$. 在文中$(.,.)_G$ 表示在 G 上的 L^2 内积. 记

$$V=\{\boldsymbol{v}\in H(\operatorname{div},\Omega): \boldsymbol{v}_l|_K\in(H^1(K))^2,\ \forall K\in J^l, (\boldsymbol{v}_l\cdot n_l,\omega)_{\partial\Omega_l}=0, \forall\omega\in H^1_{0,\Gamma}(\Omega_l)\},$$

$$Q=\{q_l\in L^2(\Omega_l):(q_s,1)_{\Omega_s}+(q_d,1)_{\Omega_d}=0\},$$

$$\wedge=H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\cap L_0^2(\Gamma),$$

其中

$$H^1_{0\Gamma}(\Omega_l)=\{\omega\in H^1(\Omega_l): \omega=0 \quad on \quad \Gamma\},$$

$$H(\operatorname{div},\Omega)=\{\boldsymbol{v}\in(L^2(\Omega))^2: \operatorname{div}\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)\}.$$

综合文献[5]、[6]和文献[8]中的相关结论,可得如下的弱变分形式:求$(\boldsymbol{u},p,\lambda)\in V\times Q\times\wedge$ 满足:

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p)+b_\Gamma(\boldsymbol{v},\lambda)=L(\boldsymbol{v}), & \forall\boldsymbol{v}\in V,\\ b(\boldsymbol{u},q)=0, & \forall q\in Q,\\ b_\Gamma(\boldsymbol{u},\eta)=0, & \forall\eta\in\wedge\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{K\in J^s}\int_K 2\varepsilon D(\boldsymbol{u}_s):D(\boldsymbol{v}_s)+\sum_{K\in J^d}\int_K\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_d\cdot\boldsymbol{v}_d-\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e 2\varepsilon\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_s)\cdot\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}\cdot[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]+\sum_{e\in\Gamma}\int_e\frac{\varepsilon}{G}(\boldsymbol{u}_s\cdot\tau_e)\cdot(\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e)+\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e 2\varepsilon(ah_e^{-1}[\boldsymbol{u}_s\cdot\tau_e][\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]+\delta\{D(\boldsymbol{v}_s)n_e\cdot\tau_e\}[\boldsymbol{u}_s\cdot\tau_e])$$

$$b(\boldsymbol{v},q)=$$

$$-\sum_{K\in J^l}\int \operatorname{div}\boldsymbol{v}\cdot q$$

$$b_\Gamma(\boldsymbol{v},\eta)=(\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{n}_s,\eta)_\Gamma+(\boldsymbol{v}_d\cdot\boldsymbol{n}_d,\eta)_\Gamma,$$

$$L(\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\Omega_s},$$

此处的 h_e 为边 e 的长度，$a>0$ 为稳定化参数，$\delta=-1$ 或 1 是对称参数.

4　有限元逼近

本节利用最低阶的 R-T 元对速度和压力空间进行离散，对 Lagrange 乘子项用分片常数进行离散. 定义如下的三个有限元空间

$$V_h=\{\boldsymbol{v}_l\in V:\boldsymbol{v}_l|_K=a+bx,\forall K\in J^l,\text{且 }\boldsymbol{v}_l\cdot\boldsymbol{n}_l=0,\text{on}\quad\Gamma_l\},$$

$$Q_h=\{q_h\in Q:\text{对}\forall K\in J^l,q_h|_K\text{ 为分片常数}\}$$

$$\wedge_h=\{\eta_h\in L_0^2(\Gamma):\text{对}\forall e\in\Gamma,\eta_h|_e\text{ 为常数}\}.$$

由于 R-T 元为协调的 $H(\operatorname{div})$元，因而对方程(1～5)的求解即可转化为：

求$(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)\in V_h\times Q_h\times\wedge_h$ 满足

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{v},p_h)+b_\Gamma(\boldsymbol{v},\lambda_h)=L(\boldsymbol{v}) & \forall\boldsymbol{v}\in V_h,\\ b(\boldsymbol{u}_h,q)=0 & \forall q\in Q_h,\\ b_\Gamma(\boldsymbol{u}_h,\eta)=0 & \forall\eta\in\wedge_h,\end{cases}\quad(7)$$

下面将证明格式(7)中的解存在且唯一，在空间 V_h 中范数定义为

$$|||\boldsymbol{v}|||_V^2=|||\boldsymbol{v}_s|||_{h,\Omega_s}^2+||\,\|v_d\|_{H(\operatorname{div},\Omega_d)}^2,$$

其中

$$|||\boldsymbol{v}_s|||_{h,\Omega_s}^2=|||\boldsymbol{v}_s|||_{1,\Omega_s}^2+\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e\|\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)n_s\cdot\tau_e\}\|_{0,e}^2,$$

$$|||\boldsymbol{v}_s|||_{1,\Omega_s}^2=\sum_{K\in J^s}\|D(\boldsymbol{v}_s)\|_{0,K}^2+\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}^2+\sum_{e\in\Gamma}\|\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e\|_{0,e}^2,$$

$$\|\boldsymbol{v}_d\|_{H(\operatorname{div},\Omega_d)}^2=\sum_{K\in J^d}\|\boldsymbol{v}_d\|_{0,K}^2+\sum_{K\in J^d}\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}_d\|_{0,K}^2.$$

在 Q_h 中定义范数为：

$$\|q\|_Q^2=\|q_s\|_{0,\Omega_s}^2+\|q_d\|_{0,\Omega_d}^2.$$

在空间 $\wedge_h$ 中我们用如下的方式对范数进行定义：$\forall\eta\in\wedge_h$ 定义 $\boldsymbol{u}_{hd}=\boldsymbol{u}_{hd}(\eta)\in V_h$ 是下述离散问题的速度解：

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{u}_{hd},\boldsymbol{v}_{hd})_{\Omega_d}-(\operatorname{div}\,\boldsymbol{v}_{hd},p_{hd})_{\Omega d}=\\ \qquad-(\boldsymbol{v}_{hd}\cdot\boldsymbol{n}_d,\eta)_\Gamma\quad\forall\boldsymbol{v}_{hd}\in V_h,\\ (\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{hd},q_{hd})_{\Omega_d}=0\quad\forall q_{hd}\in Q_h\end{cases}\qquad(8)$$

则 η 在 $\wedge_h$ 上的范数定义为：

$$|\eta|_{\wedge_h}^2=\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{u}_{hd}(\eta),\boldsymbol{u}_{hd}(\eta)).$$

下面对离散问题解的存在唯一性进行讨论.

定理 4.1　假设双线性 $a(.,.)$中的常数 a 足够大，则存在与 h 无关的常数 $C>0$ 满足：

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geq C|||\boldsymbol{v}|||_V^2,\qquad\forall\boldsymbol{v}\in V_h\qquad(9)$$

证明　为叙述定理的方便，先引入文献[8]中的估计式：$\forall v\in(H^1(K))^2$；$\forall e\in\partial K$ 有

$$\|\boldsymbol{v}\|_{0,e}^2\leq C(h_K^{-1}\|\boldsymbol{v}\|_{0,K}^2+h_K\;|\;\boldsymbol{v}\;|_{1,K}^2)\qquad(10)$$

由上式可以看出$|||\boldsymbol{v}|||_{h,\Omega_s}$与$|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega_s}$是等价的. 由于剖分的拟一致性，对所有的边 $e\in\partial K$，h_k 和 h_e 成比例，则对任意 $\boldsymbol{v}\in V_h$，$\forall e\in\partial K$ 有

$$h_e\|\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}^2\leq C_1\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\|_{0,K}^2\qquad(11)$$

将 $a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$化简有

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=2\varepsilon\{\sum_{K\in J^s}\int_K\boldsymbol{D}^2(\boldsymbol{v})+\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e ah_e^{-1}[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]^2-\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e(1-\delta)\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\}+\sum_{e\in\Gamma}\int_e\frac{\varepsilon}{G}(\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e)^2+\sum_{K\in J^d}\int_K\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{v}^2.$$

由于 $\boldsymbol{K}$ 是上、下一致有界的张量，因而有

$$\sum_{K\in J^d}\int_K\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{v}^2\geq C_2\sum_{K\in J^d}\|\boldsymbol{v}_d\|_{0,K}^2\qquad(12)$$

对 $\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e 2\varepsilon(1-\delta)\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]$，由(11)中结论，同时利用迹定理和 Young 不等式有

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e 2\varepsilon(1-\delta)\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\leq\\ &2\varepsilon(1-\delta)\sum_{e\in\Omega_s^+}\|h^{\frac12}\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}\cdot\\ &\|h_e^{-\frac12}[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}\leq\\ &2\varepsilon(1-\delta)[\frac{C_1}{2C_3}\sum_{K\in J^s}\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\|_{0,K}^2+\\ &\frac{C_3}{2}\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}^2]\leq\\ &\frac{\varepsilon(1-\delta)}{2}\sum_{K\in J^s}\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\|_{0,K}^2+\\ &C_12\in(1-\delta)\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}^2,\end{aligned}$$

此处取 $C_3=2C_1$. 由于 δ 只能取 1 或 -1，因而无论 δ 取 1 或 -1 均有

$$\sum_{e\in\Omega_s^+}\int_e 2\in(1-\delta)\{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\boldsymbol{n}_e\cdot\tau_e\}[\boldsymbol{v}_\sigma\cdot\tau_s]\leq\in\sum_{K\in J^s}\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\|_{0,K}^2+4C_{1\varepsilon}\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-1}\|\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}^2\qquad(13)$$

由(11～13)式有

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geq 2\varepsilon\sum_{K\in J^s}\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}_s)\|_{0,K}^2+$$
$$\frac{\varepsilon}{G}\sum_{e\in\Gamma}\|\boldsymbol{v}_s\cdot\tau\|_{0,e}^2+C_2\sum_{K\in J^d}\|\boldsymbol{v}_d\|_{0,K}^2+$$
$$(2\alpha\varepsilon-4\varepsilon C_1)\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-1}\|[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}^2.$$

令 $a>2C_1$ 则有 $a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geq c|||\boldsymbol{v}|||_V^2$,定理得证.

引理 4.2 $\forall q_h\in Q_h$, $\exists\beta_1>0$ 与 h 无关且满足

$$\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\frac{b(\boldsymbol{v}_h,q_h)}{|||\boldsymbol{v}_h|||_V}\geq\beta_1\|q_h\|_{0,\Omega}\tag{14}$$

证明 $\forall q_h\in Q_h$, $\exists\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2$ 和 $C_3>0$ 满足

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=q_h,\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}\leq C_3\|q_h\|_{0,\Omega}\tag{15}$$

同时在 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{V}_h$ 之间定义一个插值算子 $\pi_h:\boldsymbol{V}\cap(H^1(\Omega))^2\rightarrow\boldsymbol{V}_h$. $\forall q_h\in Q_h$ 满足 $b(\pi_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v},q_h)=0$,由插值算子的定义及文献[11],[8]可得,当 $s=1,2$ 时有

$$|\pi_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}|_{0,K}\leq Ch_K^s|\boldsymbol{v}|_{s,K},$$
$$|\pi_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}|_{1,K}\leq Ch_K^{s-1}|\boldsymbol{v}|_{s,K}\tag{16}$$
$$\|\mathrm{div}(\pi_h\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v})\|_{0,K}\leq Ch_K^s\ |\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}\ |_{s,K},\ s=0,1\tag{17}$$

由于 $|||\boldsymbol{v}_s|||_{h,\Omega_s}$ 与 $|||\boldsymbol{v}_s|||_{1,\Omega_s}$ 是等价的,同时对任意 $\boldsymbol{v}_s\in H_0^1(\Omega_s)^2$ 有 $|||\boldsymbol{v}_s|||_{1,\Omega_s}\leq C_4\|\boldsymbol{v}_s\|_{1,\Omega_s}$,结合三角不等式有如下估计

$$|||\pi_h\boldsymbol{v}_s|||_{h,\Omega_s}\leq C_5|||\pi_h\boldsymbol{v}_s|||_{1,\Omega_s}\leq C\|\boldsymbol{v}_s\|_{1,\Omega_s}\tag{18}$$

利用三角不等式和(10),(16),(17)式有

$$\|\pi_h\boldsymbol{v}_d\|_{H(\mathrm{div},\Omega_d)}\leq$$
$$\|\pi_h\boldsymbol{v}_d-\boldsymbol{v}_d\|_{H(\mathrm{div},\Omega_d)}+\|\boldsymbol{v}_d\|_{H(\mathrm{div},\Omega_d)}\leq$$
$$C\|\boldsymbol{v}_d\|_{1,\Omega_d}\tag{19}$$

由于

$$|||\pi_h\boldsymbol{v}|||_V=|||\pi_h\boldsymbol{v}|||_{h,\Omega_s}+\|\pi_h\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega_d)}\leq C\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}$$

同时注意到(15)式有

$$\sup_{0\neq\boldsymbol{v}_h\in V_h}\frac{b(\boldsymbol{v}_h,q_h)}{|||\boldsymbol{v}_h|||_V}\geq\sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{b(\pi_h\boldsymbol{v},q_h)}{|||\pi_h\boldsymbol{v}|||_V}=$$
$$\sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{b(\boldsymbol{v},q_h)}{|||\pi_h\boldsymbol{v}|||_V}\geq$$
$$C_4^{-1}\sup_{0\neq\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{b(\boldsymbol{v},q_h)}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}}\geq\beta_1\|q_h\|_{0,\Omega}.$$

引理得证.

引理 4.3 存在一个常数 $\beta_2>0$,使得:

$$\inf_{0\neq\eta_h\in\wedge_h}\sup_{0\neq\boldsymbol{v}_h\in V_h}\frac{b_\Gamma(\boldsymbol{v}_h,\eta_h)}{|||\boldsymbol{v}_h|||_V\cdot\|\eta_h\|_{\wedge_h}}\geq\beta_2\tag{20}$$

引理 4.3 的证明可利用与文献[4]相似的技巧,即取 $\boldsymbol{v}_h=(\boldsymbol{v}_{sh},\boldsymbol{v}_{dh})=(0,\boldsymbol{v}_{dh})$,本文不再详叙. 利用引理 4.2 和 4.3 的结论易得如下定理:

定理 4.4 存在一个常数 $\beta>0$,使得:

$$\inf_{(q_h,\eta_h)\in Q_h\times\wedge_h}\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\frac{b_h(\boldsymbol{v}_h,q_h)+b_\Gamma(\boldsymbol{v}_h,\eta_h)}{|||\boldsymbol{v}_h|||_V\cdot|||(q_h,\eta_h)|||_{Q_h\times\wedge_h}}\geq\beta,$$

其中 $\|(q_h,\eta_h)\|_{Q_h\times\wedge_h}^2=\|q_h\|_{0,\Omega}^2+\|\eta_h\|_{\wedge_h}^2$. 由定理4.1与4.4 结合混合有限元的相关理论有:

定理 4.5 对问题(7)在 $V_h\times Q_h\times\wedge_h$ 中有且仅有唯一解 $(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)$.

5 误差估计

为进行误差估计,假定 $(\boldsymbol{u},p,\lambda)\in(H^2(\Omega))^2\times H^1(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是方程(6)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)\in V_h\times Q_h\times\Lambda_h$ 是方程(7)的解约定 $\boldsymbol{u}_{lh}=\boldsymbol{u}_h|J^l,l=s,d$. 定义 $I_h:Q\rightarrow Q_h$ 是 L^2 正交投影,即对 $\forall q\in Q_h$, $\int_\Omega(I_hp-p)\cdot q=0$.

定理 5.1 令 $(\boldsymbol{u},p,\lambda)$ 是方程(6)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)$ 是方程(7)的解,则

$$|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V\leq Ch(\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega}+\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_d})\tag{21}$$

证明 因为

$$|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V\leq|||\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u}|||_V+|||\pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V,$$

由(16),(17)式知

$$|||\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u}|||_V=(|||\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s|||_{1,\Omega_s}^2+$$
$$\|\boldsymbol{u}_d-\pi_h\boldsymbol{u}_d\|_{H(\mathrm{div})}^2)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$Ch(\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_s}+\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_d})\tag{22}$$

要估计 $|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V$,只需估计 $|||\pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V$. 由于 R-T 元是 $H(\mathrm{div})$ 协调元,因而 $\boldsymbol{u}_h$ 是方程(7)的解则 $\boldsymbol{u}_h$ 亦是方程(6)的解. 同时注意到 I_h 算子的特点,$\forall\boldsymbol{v}\in V_h,q\in Q_h$ 有

$$a(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-b(\boldsymbol{v},p_h-I_hp)=$$
$$a(\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-b(\boldsymbol{v},p-I_hp)$$
$$b(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},q)=b(\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u},q)=0\tag{23}$$

在式(23)中取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}$, $q=p_h-I_hp$,则有 $b(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},p_h-I_hp)=0$. 同时结合(23)式有

$$a(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})=$$
$$a(\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})+$$
$$b(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},p-I_hp)\tag{24}$$

由 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}_h\subset Q_h$ 和算子 I_h 的性质,对(24)式右端第二项估计有

$$b(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},p-I_hp)=$$
$$\int_{\Omega_s}(p_s-I_hp_s)\cdot\mathrm{div}(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)+$$
$$\int_{\Omega_d}(p_d-I_hp_d)\cdot\mathrm{div}(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_d)=0.$$

对(24)式第一项估计有

$$
\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})= \\
&\quad 2\varepsilon\sum_{K\in J^s}(D(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s),D(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s))_K+ \\
&\quad K^{-1}\sum_{K\in J^d}(\boldsymbol{u}_d-\pi_h\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_d)_K- \\
&2\varepsilon\sum_{e\in\Omega_s^+}(\{D(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot n_e\cdot\tau_e\},[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e])_e+ \\
&\frac{\varepsilon}{G}\sum_{e\in\Gamma}((\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e,(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e)_e+ \\
&2\varepsilon a h_e^{-1}\sum_{e\in\Omega_s^+}([(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e],[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e])_e+ \\
&2\varepsilon\delta\sum_{e\in\Omega_s^+}(\{D(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\},[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e])_e
\end{aligned}
\tag{26}
$$

对上式中的第一项用 Cauchy-Schwarz 不等式，由(16)式有

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon\sum_{K\in J^s}(D(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s),D(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s))_K\le \\
&\quad 2\varepsilon\sum_{K\in J^s}\|D(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\|_{0,K}\cdot\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\|_{0,K}\le \\
&\quad \frac{1}{8}\mid\boldsymbol{u}_{sh}-\pi_h\boldsymbol{u}_s\mid_{1,\Omega_s}+ch^2\|\boldsymbol{u}_s\|_{2,\Omega_s}^2
\end{aligned}
\tag{27}
$$

对第二项，注意到 $\boldsymbol{K}$ 是上下一致有界的，则有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}^{-1}\sum_{K\in J^d}(\boldsymbol{u}_d-\pi_h\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_d)_K\le \\
&\|\boldsymbol{u}_{dh}-\pi_h\boldsymbol{u}_d\|_{0,\Omega_d}\cdot\|K^{-1}(\boldsymbol{u}_d-\pi_h\boldsymbol{u}_d)\|_{0,\Omega_d}^2\le \\
&\frac{1}{16}\|\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_d\|_{0,\Omega_d}^2+ch^4\|\boldsymbol{u}_d\|_{2,\Omega_d}^2
\end{aligned}
\tag{28}
$$

为了更好的估计第三项，引入一个次数为 1 的 Lagrange 插值算子 L_h，在 $\varepsilon_h(\Omega_s^+)$ 中满足

$$
\mid\boldsymbol{v}_s-L_h(\boldsymbol{v}_s)\mid_{m,K}\le ch_K^{2-m}\mid\boldsymbol{v}_s\mid_{2,K}
\tag{29}
$$

对第三项利用迹定理、三角不等式和(29)式，同时注意到剖分的拟一致性有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon(\{D(\boldsymbol{u}-\pi_h\boldsymbol{u})n_e\cdot\tau_e\},[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})\cdot\tau_e])_e= \\
&\quad\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon(\{D(\boldsymbol{u}_s-L_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\}, \\
&\quad[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})\cdot\tau_e])+2\varepsilon(\{D(L_h\boldsymbol{u}_s- \\
&\quad\pi_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\},[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})\cdot\tau_e])_e\le \\
&\quad 2\varepsilon\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-\frac{1}{2}}\|[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})\cdot\tau_e]\|_{0,e}\cdot \\
&\quad h_e^{\frac{1}{2}}\|\{D(\boldsymbol{u}_s-L_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}+ \\
&\quad 2\varepsilon\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-\frac{1}{2}}\|[(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e]\|_{0,e}\cdot \\
&\quad h_e^{\frac{1}{2}}\|\{D(L_h\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}\le \\
&\quad\frac{1}{8}\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-1}\|(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})\cdot\tau_e\|_{0,e}^2+ \\
&\quad C\sum_{K\in J^s}\int_K h_K(h_K^{-1}\|D(L_h\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\|_{0,K}^2+ \\
&\quad h_K\mid D(L_h\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\mid_{1,K}^2)\le \\
&\quad\frac{1}{8}|||\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s|||_{1,\Omega_s}^2+ch^2\|\boldsymbol{u}_{sh}\|_{2,\Omega_s}^2
\end{aligned}
\tag{30}
$$

类似地，对其余各项利用 Cauchy-Schwarz 不等式，迹定理和(16)式有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{G}\sum_{e\in\Gamma}((\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_{sh})\cdot\tau_e,(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e)_e\le \\
&\frac{\varepsilon}{G}\sum_{e\in\Gamma}\|(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e\|_{0,e}\cdot\|(\boldsymbol{u}_{\mathrm{sh}}-\pi_{\mathrm{h}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}})\cdot \\
&\tau_e\|_{0,e}\le\frac{1}{16}2\varepsilon\sum_{e\in\Gamma}\|(\boldsymbol{u}_h-\pi_h u)\cdot\tau_e)\|_{0,e}^2+ \\
&Ch^2\|\boldsymbol{u}_s\|_{2,\Omega_s}^2
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon a h_{\mathrm{e}}^{-1}\sum_{e\in\Omega_s^+}([(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e], \\
&\quad[(\boldsymbol{u}_{sh}-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e])_e\le 2\varepsilon a\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-\frac{1}{2}}\ \|[(\boldsymbol{u}_s- \\
&\quad\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e]\ \|_{0,e}\cdot h_e^{-\frac{1}{2}}\ \|[(\boldsymbol{u}_{sh}- \\
&\quad\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e]\ \|_{0,e}\le\frac{1}{8}\ |||\boldsymbol{u}_{sh}-\pi_h\boldsymbol{u}_s\ |||_{1,\Omega_s}^2+ \\
&\quad ch^2\ \|\boldsymbol{u}\ \|_{2,\Omega_s}^2
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon\delta\sum_{e\in\Omega_s^+}(\{D(\boldsymbol{u}_{sh}-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot n_e\cdot\tau_e\}, \\
&\quad[(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e])_e\le \\
&\quad\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon\delta h_e^{\frac{1}{2}}\ \|\{D(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot n_e\cdot\tau_e\}\ \|_{0,e}\cdot \\
&\quad h_e^{-\frac{1}{2}}\ \|[(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot\tau_e]\ \|_{0,e}\le \\
&\quad\frac{1}{8}\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e\|\{D(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}_s)\cdot n_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}^2+ \\
&\quad ch^2\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned}
\tag{33}
$$

由(27)～(33)式，同时注意到(22)式则有

$$
\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u})\le\frac{9}{16}|||\boldsymbol{u}_h-\pi_h\boldsymbol{u}|||_V^2+ \\
&Ch^2(\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_s}^2+\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_d}^2)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

则有

$$
|||u_h-\pi_h\boldsymbol{u}|||_V\le Ch(\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_s}+\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_d})
\tag{35}
$$

由(34)及(22)式可得定理 5.1.

定理 5.2　令$(\boldsymbol{u},p,\lambda)$是方程(6)的解，$(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)$是方程(7)的解，则

$$
\begin{aligned}
&\|p-p_h\|_Q\le Ch[(\|p_s\|_{1,\Omega_s}+\|p_d\|_{1,\Omega_d})+ \\
&\quad(\|\boldsymbol{u}_s\|_{2,\Omega_s}+\|\boldsymbol{u}_d\|_{2,\Omega_d})]
\end{aligned}
\tag{36}
$$

证明　因 $I_hQ\to Q_h$ 的 L^2 正交投影，则由 L^2 正交投影定义对任意 $q_h\in Q_h$ 有

$$
\int_\Omega(I_hp-p)\cdot q_h=0
\tag{37}
$$

$$
\|p-p_h\|_Q\le\|p-I_hp\|_Q+\|I_hp-p_h\|_Q
\tag{38}
$$

对$\|p-I_h p\|_Q$项,由 L^2 正交投影的定义有

$$\|q-I_h q\|_{0,K}\le Ch_K\ |\ q\ |_{1,K},$$

因而

$$\|p-I_h p\|_Q=$$
$$(\|p_s-I_h p_s\|^2_{0,\Omega_s}+\|p_d-I_h p_d\|^2_{0,\Omega_d})^{\frac{1}{2}}\le$$
$$Ch(\|p_s\|_{1,\Omega_s}+\|p_d\|_{1,\Omega_d}) \quad (39)$$

由(37),(38),(39)式知道,欲估计$\|p-p_h\|_Q$只需要估计 $\|I_h p-p_h\|_Q$. 下面将对$\|I_h p-p_h\|_Q$进行估计. 由引理 4.2,同时结合(23)式,且注意到 $\mathrm{div}V_h\subseteq Q_h$,有 $b(\boldsymbol{v},p-I_h p)=0$ 及

$$\|I_h p-p_h\|_Q\le C\sup_{0\ne v\in V_h}\frac{|\ b(\boldsymbol{v},I_h p-p_h)\ |}{|||\boldsymbol{v}|||_V}\le$$
$$\sup_{0\ne v\in V_h}\frac{|\ a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})\ |}{|||\boldsymbol{v}|||_V}.$$

由于

$$a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v})=2\varepsilon\sum_{K\in J^s}(D(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_{sh}),$$
$$D(\boldsymbol{v}_s))_K+\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon a h_e^{-1}([(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_{sh})\cdot\tau_e],$$
$$[(\boldsymbol{v}_s)\cdot\tau_e])_e+\frac{\varepsilon}{G}\sum_{e\in\Gamma}((\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_{sh})\cdot$$
$$\tau_e,\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e)_e+\sum_{K\in J^d}K^{-1}(\boldsymbol{u}_d-\boldsymbol{u}_{dh},\boldsymbol{v}_d)_K-$$
$$\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon(\{D(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_{sh})n_e\cdot\tau_e\},[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e])_e+$$
$$2\varepsilon\delta\sum_{K\in\Omega_s^+}(\{D(\boldsymbol{v}_s)n_e\cdot\tau_e\},[(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_{sh})\cdot\tau_e])_e$$
$$(40)$$

对前面的四项,由 Caucy-Schwarz 不等式可知,它们都小于等于 $C|||\boldsymbol{v}|||_V\cdot|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V$. 对第五项,利用迹定理有如下的估计

$$|\ -\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon(\{D(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_h)n_e\cdot\tau_e\},[\boldsymbol{u}_s\cdot\tau_e])_e\ |\ \le$$
$$\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{-\frac{1}{2}}\|[\boldsymbol{v}_s\cdot\tau_e]\|_{0,e}\cdot$$
$$h_e^{\frac{1}{2}}\|\{D(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_{sh})n_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}\le$$
$$C|||\boldsymbol{v}|||_V(\sum_{e\in\Omega_s^+}(h_e\|\{D(\boldsymbol{u}_{sh}-\pi_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\}\|^2_{0,e}+$$
$$h_e\|\{D(\boldsymbol{u}_s-\pi_h\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\}\|^2_{0,e}))^{\frac{1}{2}}\le$$
$$C|||\boldsymbol{v}|||_V(|||\pi_h\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_h|||^2_V+Ch^2\|\boldsymbol{u}_s\|^2_{2,\Omega_s})^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

类似地,对最后一项进行估计

$$\sum_{e\in\Omega_s^+}2\varepsilon\delta(\{D(\boldsymbol{u}_s)n_e\cdot\tau_e\},[(\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{u}_h)\cdot\tau_e])_e\le$$
$$C\sum_{e\in\Omega_s^+}h_e^{\frac{1}{2}}\|\{D(\boldsymbol{v}_s)n_e\cdot\tau_e\}\|_{0,e}\cdot$$
$$h_e^{-\frac{1}{2}}\|[(\boldsymbol{u}_s-\boldsymbol{u}_h)\cdot\tau_e]\|_{0,e}\le$$
$$C|||\boldsymbol{v}|||_V\cdot|||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h|||_V \quad (42)$$

综合(38)～(43)式,且注意到(21)式及(37)式有

$$\|p-p_h\|_Q\le Ch[(\|p_s\|_{\Omega_s}+\|p_d\|_{\Omega_d})+$$
$$(\|\boldsymbol{u}_s\|_{\Omega_s}+\|\boldsymbol{u}_d\|_{\Omega_s})] \quad (43)$$

定理 5.3 令$(\boldsymbol{u},p,\lambda)$是方程(6)的解,$(\boldsymbol{u}_h,p_h,\lambda_h)$是方程(7)的解,则

$$|\ \lambda-\lambda_h\ |_{\Lambda_h}\le Ch(\|\boldsymbol{u}_d\|_{2,\Omega_d}+\|\boldsymbol{u}_s\|_{2,\Omega_s}) \quad (44)$$

证明 令$\tilde{\boldsymbol{u}}_h(Q_h\lambda)$与$\tilde{p}_h(Q_h\lambda)$是方程(8)的解,简记为$\tilde{\boldsymbol{u}}_h$ 与$\tilde{p}_h$,利用离散空间的定义有

$$|\ \lambda-\lambda_h\ |_{\Lambda_h}=|\ Q_h\lambda-\lambda_{hd}\ |_{\Lambda_h}\le$$
$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h(Q_h\lambda)-\boldsymbol{u}_{hd}\|_{0,\Omega_d}\le$$
$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_h(Q_h\lambda)-\boldsymbol{u}_d\|_{0,\Omega_d}+\|\boldsymbol{u}_d-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_d} \quad (45)$$

对上式的第 2 项利用估计式(21)有

$$\|\boldsymbol{u}_d-\boldsymbol{u}_{hd}\|_{0,\Omega_d}\le Ch(\|\boldsymbol{u}_d\|_{2,\Omega_d}+\|\boldsymbol{u}_s\|_{2,\Omega_s}) \quad (46)$$

而对(45)式的第一项有

$$(\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_{hd})_{\Omega_d}-(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_{hd},\tilde{p}_{hd}-p_d)_{\Omega_d}=0.$$

令 $\boldsymbol{v}_{hd}=\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d$. 注意到 $V_h\subseteq V\subseteq H(\mathrm{div})$,则有

$$(\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d,\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d)_{\Omega_d}=0,$$

即

$$(\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d,\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d)_{\Omega_d}+(\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{u}_d-\boldsymbol{u}_{hd})_{\Omega_d}=0.$$

由 Caucy-Schwarz 有

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}_{hd}-\boldsymbol{u}_d\|_{0,\Omega_d}\le\|\boldsymbol{u}_{hd}-\boldsymbol{u}_d\|_{0,\Omega_d}$$

再利用定理 5.1 的结论定理得证.

参考文献:

[1] Discacciati M, Miglio M, Quarteroni E. Mathematic and numerical model for coupling surface and groundwater flows[J]. Appl Numer Math, 2002, 43: 57.

[2] Gatica G, Meddahi S, Oyarzua R. A conforming mixed finite element menthod for the coupling of fluid flow with porous media flows[J]. SIAM J Numer Anal, 2009, 29: 98.

[3] Riviere B. Analysis of a discontinuous finite element method for the couple stokes and Darcy problem[J]. J Sci Comput, 2005, 22(3): 479.

[4] 陈绍春, 陈红如. 二阶椭圆问题新的混合元变分格式[J]. 计算数学, 2010, 32: 213.

[5] Layton W J, Schieweck F, Yotov I. Coupling fluid flow with porous media flow[J]. Siam J Numer Anal, 2003, 40: 2195.

[6] Huang P Q, Chen J R, Cai M C. A mixed and nonconforming FEM with nonmatching meshes for a coupled Stokes-Darcy model[J]. J Sci Comput, 2012, 53: 377.

[7] Brezzi F, Fortin M. Mixed and bybrid finite element

methods[M]. New York: Spring-Verlag, 1991.

[8] Chen Y M, Huang F T, Xie X P. H(div) conforming finite element methods for the coupled Stokes and Darcy problem[J]. J Comput Appl Math, 2011, 235: 4337.

[9] Ran H X, Zhang R. Unified stabilized mixed finite element method for coupling stokes and Darcy flows [J]. Comput Methods Appl Mech Energ, 2009, 33-36: 2692.

[10] 冯民富，祁瑞生，朱瑞，等. 关于 Darcy 方程和 Stokes 方程耦合问题的非协调稳定化方法[J]. 应用数学和力学. 2010, 31: 369.

[11] Correa M R, Loula A F D. A unified mixed formulation maturally coupling Stokes and Darcy flows[J]. Comp Meth Appl Mech Energ, 2009,33: 2710.

[12] Karper T, Mardal K A, Winther R. Unified finite element discretizationgs of coupled Darcy-Stokes flow[J]. Nume Meth Part Diff Equat, 2009, 25: 311.

[13] Chen S C, Dong Y Q. Uniformly convergent H(div)-conforming rectangular elements for Darcy-Stokes problem [J]. Sci China Math, 2013, 56: 2723.

[14] Chen W B, Wang Y Q. A posteriori error estimate for the H(div) conforming mixed finite element for the coupled Darcy-Stokes system[J]. J Comput Appl Math, 2014, 255: 502.