doi：103969/j.issn.0490-6756.2017.01.002

次弧连通锥-凸集值优化问题近似解的最优性条件

余国林，孔翔宇，李济民
(北方民族大学信息与系统科学研究所，银川 750021)

摘　要：本文讨论相依上图导数形式下广义弧连通锥-凸集值优化近似解的最优性条件问题. 首先，本文引入次弧连通锥-凸集值映射的概念，并举例说明次弧连通锥-凸性是弧连通锥-凸性的推广；其次，得到了次弧连通锥-凸集值映射的两个有用性质；最后，在次弧连通锥-凸性条件下，分别建立了集值优化问题强近似极小元和弱近似有效元的充分最优性条件.

关键词：弧连通锥-凸集值映射；最优性条件；相依上图导数；近似解
中图分类号：O221.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)01-0007-05

Optimality of approximate solutions in set-valued optimization involving subarcwise connected cone-convexity

YU Guo-Lin, *KONG Xiang-Yu*, *LI Ji-Min*
(Institute of Applied Mathematics, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, China)

Abstract: This note deals with the optimality conditions of approximate solutions in set-valued optimization problems involving generalized arcwise connected convexity in terms of the contingent epiderivative. Firstly, the concept of subarcwise connected cone-convex set-valued mapping is introduced. Then, the two properties of subarcwise connected cone-convex set-valued mapping are derived. Finally, the sufficient optimality conditions are established for weak approximate efficient and strong approximate efficient elements respectively under the assumption of subarcwise connected cone-convexity.

Keywords: Arcwise connected set-valued mapping; Optimality condition; Contingent epiderivative; Approximate solution
(2010 MSC 90C29,90C46)

1　引　言

近些年来，集值优化已成为国内外学者研究的热点问题，这归因于其在微分包含、变分不等式、最优控制、博弈论、经济均衡和决策理论等领域的广泛应用. 在集值优化理论研究中，最优性条件是核心内容之一. 集值映射的广义凸性和导数在建立最优性条件中起着至关重要的作用. 在已有文献中，有多种方法定义集值映射的导数，其中非常有用的一种方法是利用集值映射的上图所定义的集值导数. 这方面最具代表性的概念是 Jahn 和 Rauh[1] 利用集值映射上图的相依锥定义的相依上图导数. 值得一提的是：Jahn 和 Rauh[1] 定义的相依上图导数是个单值映射. 最近，利用相依上图导数刻画集值优化问题最优性条件取得了一些成果，这方面的工作可参看文献[2-8]. 另外，众所周知，集值映射的凸性和广义凸性在建立集值优化问题最优性充分条件中扮演重要角色. 弧连通锥-凸性是集值映射非常重要的一种广义锥-凸性，这一概念最初由 Lalitha 等人[8] 在 2003

收稿日期：2015-08-12
基金项目：国家自然科学基金 (11361001)；宁夏自然科学基金(NZ14101)
作者简介：余国林(1974 –)，男，宁夏银川人，教授，主要研究方向为优化理论及其应用. E-mail：guolin yu@126.com

年引进. 在弧连通锥-凸性假设下，研究向量优化问题的文献很多，例如：Fu 和 Wang[10]讨论了向量优化问题；Yu[11]给出了集值优化全局真有效解的最优性充要条件.

另外，在最优化问题中，近似解的概念在理论和应用上都有着非常重要的作用. 这主要是因为近似解的存在条件较弱，而且很多数值解法得到的大多是近似解. 因此，考虑集值优化问题在各种有效意义下的近似解是一项非常有意义的工作. 最近，国内外许多学者都致力于集值优化问题近似解的研究，这方面的工作可参考文献[12-15].

本文结构安排如下：第 2 节首先回顾本文用到的一些概念和结论. 其次，引入一类新的广义弧连通锥-凸集值映射的概念，我们称之为次弧连通锥-凸集值映射，并且证明了它的两个重要性质. 第 3 节，在集值映射的次弧连通锥-凸性假设下，分别得到了集值优化问题关于弱近似有效解和强近似有效解的最优性充分条件.

2 预备知识

本文通篇假设 X 和 Y 为两个实 Banach 空间. 空间 Y 中的部分序由点、闭、凸锥 $D \subset Y$ 诱导给出，并且 D 的内部非空，也即 $int(D) \neq \varnothing$. 因为本文的目的之一是研究集值优化在弱有效意义下近似解的最优性条件，所以序锥的内部我们假设是非空的. 事实上，内部非空的序锥确实存在，例如：令 $Y = l^{\infty} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots): \sup\limits_{i\geq 1}|x_i| < \infty\}$，$D = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) \in l^{\infty}: x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots\}$，则有 $int(D) \neq \varnothing$.

下面首先回顾凸集和弧连通解的概念. X 的子集 S 称之为凸的，如果对任意的 $x, z \in S, t \in [0,1]$，满足 $tz + (1-t)x \in S$.

定义 2.1[9-11] 称集合 $S \subset X$ 为弧连通集，如果对任意的 $x \in S, z \in S$，存在一个连续的向量值函数 $H_{x,z}:[0,1] \to X$，称之为连接 x, z 的一条弧，使得

$$H_{x,z}(0) = x, \qquad H_{x,z}(1) = z.$$

如果极限 $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{H_{x,z}(t) - H_{x,z}(0)}{t}$ 存在，记为 $H^+_{x,z}(0)$，则向量 $H^+_{x,z}(0)$ 称为 $H_{x,z}$ 在 $t=0$ 处的方向导数.

显然，凸集是弧连通集，但反之不然(文献[13]的 Example 3.2 给出了相应的反例). 下面给出集值映射的锥-凸性和弧连通锥-凸性的概念.

定义 2.2[9] 令 $S \subset X$ 为一非空凸集，$F: S \to 2^Y$ 为一集值映射. 称 F 为 D-凸集值映射，如果对任意的 $x \in S, z \in S$，满足

$$(1-t)F(x) + tF(z) \subset F((1-t)x + tz) + D, \quad t \in [0,1].$$

定义 2.3[9] 令 $S \subset X$ 为一非空弧连通集，$F: S \to 2^Y$ 为一集值映射. 称 F 为弧连通 D-凸集值映射，如果对任意的 $x \in S, z \in S$，存在弧 $H_{x,z}$ 使得

$$(1-t)F(x) + tF(z) \subset F(Hx, z(t)) + D, \quad t \in [0,1]$$

显然，任意锥-凸集值映射是弧连通锥-凸的. 反之则未必成立. 文献[9]中的 Example 4.1 给出了相应的反例.

下面引进一类新的广义锥-凸集值映射的概念，这类广义锥-凸集值映射是弧连通锥-凸集值映射的推广. 我们将在这种新凸性假设下，研究集值优化问题关于近似解的充分最优性条件.

定义 2.4 假设 S 为空间 X 中的一非空弧连通集，$e \in int(D)$，$\varepsilon > 0$，$F: S \subset X \to 2^Y$ 为一集值映射. 如果对任意的 $x \in S, z \in S$，存在弧 $H_{x,z}$，使得

$$\varepsilon(1-t)t \cdot e + (1-t)F(x) + tF(z) \subset F(H_{x,z}(t)) + D, \quad t \in [0,1],$$

则称 F 在 S 上是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射.

由上面的定义可知：如果集值映射 F 是弧连通 D-凸的，则 F 是关于某个 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射. 但是，反之未必成立，下面的例 2.5 将给出一个集值映射，它是次弧连通 D-凸的，但不是弧连通 D-凸的.

例 2.5 令 $X = \mathbf{R}$($\mathbf{R}$ 表示实数集)，Y 为 $\mathbf{R}$ 中所有实数序列 y 构成的集合，且满足

$$y = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots),$$

其中 $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$. 令 D 为 Y 中所有非负序列构成的集合. 定义

$$\| y \| = \sup_n |\xi_n|, \forall y \in Y.$$

容易验证，Y 为一个 Banach 空间. 对 $S = (0,1)$，$e = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots)$，以及 $\varepsilon \geq 4$，定义集值映射 $F: S \to 2^Y$ 如下：

$$F(x) = \{(x^2, 0, 0, \cdots, 0, \cdots), (-x^2, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)\}, \quad \forall x \in S.$$

对于弧

$$H_{x,z}(t)=\sqrt{1-t}\cdot x-\sqrt{t}\cdot z,\forall x,z\in S,$$

通过简单计算可知，F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射．然而，对于任意的 $x\in S,z\in S$ 以及 $t\in(0,1)$，下式对任何弧 $H_{x,z}$ 都不成立，

$$(1-t)F(x)+tF(z)\in F(H_{x,z}(t))+D.$$

因此，F 不是弧连通 D-凸集值映射．

下面，我们给出集值映射相依上图导数的概念．令 S 为 X 中的一非空子集，$F:S\subset X\to 2^Y$ 为一集值映射．集合

$$graph(F):=\{(x,y)\in S\times Y:y\in F(x)\}$$

称为映射 F 的图像．集合

$$epi(F):=\{(x,y)\in S\times Y:y\in F(x)+D\}$$

称为 F 的上图．令 $(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$. $epi(F)$ 在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 处的相依锥[5]记为 $T(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))$，定义为由所有切向量

$$(x,y):=\lim_{n\to\infty}\lambda_n((x_n,y_n)-(\bar{x},\bar{y}))$$

构成的集合，其中 $(\bar{x},\bar{y})=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)$，$(x_n,y_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset epi(F)$，并且 $\lambda_n>0$，对任意的 $n\in\mathbf{N}$.

定理 2.6　令 $S\subset X$ 为一弧连通集，$e\in int(D)$，$\varepsilon>0$，$F:S\to 2^Y$ 为关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射．假设 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in F(\bar{x})$，并且相依上图导数 $DF(\bar{x},\bar{y})$ 存在，则有

$$\varepsilon\cdot e+F(x)-\bar{y}\subset \{DF(\bar{x},\bar{y})(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0))\}+D,\forall x\in S.$$

证明　对任意的 $x\in S,y\in F(x)$，定义序列 $(x_n,y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ 如下：

$$x_n:=H_{\bar{x},x}(\frac{1}{n}),y_n=(1-\frac{1}{n})\frac{1}{n}\cdot e+(1-\frac{1}{n})\cdot\bar{y}+\frac{1}{n}\cdot y,n\in\mathbf{N}.$$

因为 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射，所以 $x_n\in S$，并且

$$y_n=\varepsilon(1-\frac{1}{n})\frac{1}{n}\cdot e+(1-\frac{1}{n})\cdot\bar{y}+\frac{1}{n}\cdot y\in(1-\frac{1}{n})F(\bar{x})+\frac{1}{n}F(x)+D\subset F(H_{\bar{x},x}(\frac{1}{n}))+D=F(x_n)+D.$$

由上式可知 $(x_n,y_n)\in epi(F)$，$(\bar{x},\bar{y})=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)$．另一方面，由 x_n 和 y_n 的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot(x_n-\bar{x})=\lim_{n\to\infty}n\cdot(H_{\bar{x},x}(\frac{1}{n})-H_{\bar{x},x}(0))=H^{\pm}_{\bar{x},x}(0),$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot(y_n-\bar{y})=\lim_{n\to\infty}n\cdot(\varepsilon(1-\frac{1}{n})\frac{1}{n}\cdot e+\frac{1}{n}(y-\bar{y}))=y-\bar{y}+\varepsilon\cdot e\in y-\bar{y}+D.$$

由此可知

$$(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0),y-\bar{y}+\varepsilon\cdot e)\in T(epi(F),(\bar{x},\bar{y})).$$

再由相依上图导数的定义，可得

$$T(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))=epi(DF(\bar{x},\bar{y}),$$

并且

$$(y-\bar{y}+\varepsilon\cdot e)\in\{DF(\bar{x},\bar{y})(H_{\bar{x},x}(0))\}+D.$$

因为 $x\in S$ 和 $y\in F(x)$ 是任取的，所以有

$$\varepsilon\cdot e+F(x)-\bar{y}\subset\{DF(\bar{x},\bar{y}),(H_{\bar{x},x}(0))\}+D,\forall x\in S.$$

证毕．

例 2.7　令 $X=Y=\mathbf{R}^2$，$D=\mathbf{R}^2_+$，$e=(1,1)\in int(D)$，$\varepsilon=1$，$S=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:2x_1+x_2>2,x_1\geq 0,x_2>0\}$，并且 $H_{x,z}(t)=(1-t)x+tz$. 显然 $S\subset X$，并且 S 为一弧连通集．定义集值映射 $F:S\to 2^Y$，如下：

$$F(x)=\{(1,0),(0,2)\}\cup\{S-(1,0)\},\forall x\in S.$$

对任意的 $x,z\in S,t\in[0,1]$，容易验证

$$\varepsilon(1-t)t\cdot e+(1-t)F(x)+tF(z)\subset F(H_{x,z}(t))+D.$$

因此 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射．另外，弧 $H_{x,z}$ 在 $t=0$ 处的方向导数存在，并且

$$H^{+}_{x,z}(0)=z-x,\forall x=(x_1,x_2)\in S,z=(z_1,z_2)\in S.$$

可以证明，F 在 S 上不是弧连通 D-凸集值映射．事实上，令 $\bar{x}=(2,0)$，$\bar{z}=(0,4)$，$\bar{t}=\frac{1}{2}$，则有 $\bar{x}$，$\bar{z}\in S$，$(1,0)\in F(\bar{x})$，$(0,2)\in F(\bar{x})$．对任何弧 $H_{\bar{x},\bar{y}}:[0,1]\to S$，

$$F(H_{\bar{x},\bar{y}}(t))=\{(1,0),(0,2)\}\cup S,\forall t\in[0,1].$$

又因为对于点 $(1,0)\in F(\bar{x})$，$(0,2)\in F(\bar{z})$ 和 $\bar{t}=\frac{1}{2}$，下式成立

$$(\frac{1}{2},1)=(1-\frac{1}{2})(1,0)+\frac{1}{2}(0,2)\in(1-\bar{t})F(\bar{x})+tF(\bar{z}).$$

然而，$\left(\frac{1}{2},1\right)\notin\{(1,0),(0,2)\}\cup\{S-(1,0)\}+D$. 因此

$$(\frac{1}{2},1)\notin F(H_{\bar{x},\bar{z}}(\bar{t}))+D.$$

由此可得

$$(1-\bar{t})F(\bar{x})+\bar{t}F(\bar{z})\not\subset F(H_{\bar{x},\bar{z}}(\bar{t}))+D.$$

令 $(\bar{x},\bar{y})=((2,0),(0,0))$，直接计算可得

$$T(epi(F),(\bar{x},\bar{y}))=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2: x_1\in\mathbf{R}, x_2\geq 0, y_2\geq 0, 2y_1+y_2\geq 0\},$$

$$(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0), y-\bar{y}+e)=((x_1-2,x_2),(y_1+1,y_2+1))\in T(epi(F),(\bar{x},\bar{y})).$$

根据相依上图导数的定义，可得

$$e+F(x)-\bar{y}\subset\{DF(\bar{x},\bar{y})(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0)\}+D,\ \forall x\in S.$$

3 最优性条件

令 S 为 X 的非空子集，$F:S\to 2^Y$ 为集值映射. 考虑下面的集值优化问题(SOP)

$$(\text{SOP})\quad D-\min_{x\in S}F(x).$$

在本节，我们将建立问题(SOP)的最优性充分条件.

定义 3.1 点 $(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$ 称为问题(SOP)的局部弱有效元，如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 $N(\bar{x})$，使得

$$(F(S\cap N(\bar{x}))-\bar{y})\cap(-\operatorname{int}(D))=\varnothing.$$

下面给出问题(SOP)近似解的概念，关于集值优化问题近似解的详细内容，可参考文献[1,12-15].

定义 3.2 令 $\varepsilon\geq 0$, $e\in D\backslash\{0_Y\}$. 点 $(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$ 称为问题(SOP)的强 $\varepsilon\cdot e$-极小元，如果

$$(F(S)-\bar{y}+\varepsilon\cdot e)\subset D.$$

点 $(\bar{x},\bar{y})$ 称为问题(SOP)的 $\varepsilon\cdot e$-有效元，如果

$$(F(S)-\bar{y})\cap(-D\backslash\{0_Y\}-\varepsilon\cdot e)=\varnothing.$$

点 $(\bar{x},\bar{y})$ 称为问题(SOP)的弱 $\varepsilon\cdot e$-有效元，如果

$$(F(S)-\bar{y})\cap(-\operatorname{int}D-\varepsilon\cdot e)=\varnothing.$$

下面的定理 3.3 表明：在次弧连通锥-凸性假设下，集值优化问题的局部极小解是全局极小解.

定理 3.3 令 S 为一弧连通集，$e\in\operatorname{int}(D)$, $\varepsilon\geq 1$, F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射. 则问题(SOP)的每个局部弱有效元是(SOP)的 $\varepsilon\cdot e$-有效元.

证明 设 $(\bar{x},\bar{y})$ 是问题(SOP)的局部弱有效元. 因此，存在 $\bar{x}$ 的一个邻域 $N(\bar{x})$，使得

$$(F(S\cap N(\bar{x}))-\bar{y})\cap(-\operatorname{int}(D))=\varnothing \tag{1}$$

假设对于 $\varepsilon\geq 1$, $(\bar{x},\bar{y})$ 不是问题(SOP)的 $\varepsilon\cdot e$-有效元. 则存在 $\hat{x}\in S$ 使得

$$(F(\hat{x})-\bar{y})\cap(-D\backslash\{0_Y\}-\varepsilon\cdot e)\neq\varnothing \tag{2}$$

又因 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射，由定义 2.4，可得

$$F(H_{\bar{x},\hat{x}}(t))-F(\bar{x})\subset\varepsilon(1-t)t\cdot e+t(F(\hat{x})-F(\bar{x}))-D,\ \forall t\in(0,1).$$

进一步，可知

$$F(H_{\bar{x},\hat{x}}(t))-\bar{y}\subset\varepsilon(1-t)t\cdot e+t(F(\hat{x})-\bar{y})-D,\ \forall t\in(0,1) \tag{3}$$

对任意的 $t\in(0,1)$，结合(2)，(3)两式可得

$$F(H_{\bar{x},\hat{x}}(t))-\bar{y}\subset\varepsilon(1-t)t\cdot e-\varepsilon\cdot t\cdot e-D\backslash\{0_Y\}=-\varepsilon t^2\cdot e-D\backslash\{0_Y\}\subset-\operatorname{int}(D) \tag{4}$$

注意到弧 $H_{\bar{x},\hat{x}}(t)$是连续的，所以对充分小的 $\bar{t}\in(0,1)$, $H_{\bar{x},\hat{x}}(\bar{t})\in(S\cap N(\bar{x}))$由此可知(4)式与(1)式矛盾. 证毕.

由于每个 $\varepsilon\cdot e$-有效元显然是弱 $\varepsilon\cdot e$-有效元，所以由定理 3.3 直接可得下面的推论 3.4.

推论 3.4 令 S 为一弧连通集，$e\in intD$, $\varepsilon\geq 1$, F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射. 则问题(SOP)的每个局部弱有效元是(SOP)的弱 $\varepsilon\cdot e$-有效元.

接下来，我们给出集值优化问题(SOP)关于弱近似有效元和强近似有效元的充分最优性条件.

定理 3.5 令 $e\in intD$, $\varepsilon\geq 0$, $(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$. 在问题(SOP)中，假设 S 是弧连通集，并且对任意的 $x,z\in S$，弧 $H_{x,z}$在 $t=0$ 处的方向导数 $H^{+}_{x,z}(0)$和相依上图导数 $DF(\bar{x},\bar{y})$ 存在. 如果 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射，并且满足

$$DF(\bar{x},\bar{y})(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0))\notin(-\operatorname{int}(D)),\ \forall x\in S \tag{5}$$

则 $(\bar{x},\bar{y})$ 是问题(SOP)的弱 $\varepsilon\cdot e$-有效元.

证明 因为相依上图导数 $DF(\bar{x},\bar{y})$ 存在，并且(5)式成立，所以有

$$\{DF(\bar{x},\bar{y})(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0))\}\cap(-\operatorname{int}(D))=\varnothing,\ \forall x\in S.$$

上式表明

$$\{DF(\bar{x},\bar{y})(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0))+D\}\cap(-\operatorname{int}(D))=\varnothing,\ \forall x\in S. \tag{6}$$

另一方面，因为 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射，由定理 2.6 可得

$$F(x)-\bar{y}+\varepsilon\cdot e\subset DF(\bar{x},\bar{y})(H^{\pm}_{\bar{x},x}(0))+D,\ \forall x\in S \tag{7}$$

再由(6)，(7)两式可推出

$$(F(S)-\bar{y}+\varepsilon\cdot e)\cap(-\operatorname{int}D)=\varnothing.$$

因而

$$(F(S)-\bar{y})\cap(-\operatorname{int}(D)-\varepsilon\cdot e)=\varnothing.$$

上式表明：$(\bar{x},\bar{y})$ 是问题(SOP)的弱 $\varepsilon\cdot e$-有效元，证毕.

定理 3.6　令 $e\in intD,\varepsilon\geq 0,(\bar{x},\bar{y})\in graph(F)$. 在问题(SOP)中，假设 S 为弧连通集，并且对任意的 $x,z\in S$，弧 $H_{x,z}$ 在 $t=0$ 处的方向导数 $H_{x,z}^{+}(0)$ 和相依上图导数 $DF(\bar{x},\bar{y})$ 存在. 如果 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射，并且满足

$$DF(\bar{x},\bar{y})(H_{\bar{x},x}^{\pm}(0))\in D,\forall x\in S, \tag{8}$$

则 $(\bar{x},\bar{y})$ 是问题(SOP)的强 $\varepsilon\cdot e$-极小元.

证明　注意到 F 是关于 e 和 ε 的次弧连通 D-凸集值映射，由定理 2.6 可知

$$F(x)-\bar{y}+\varepsilon\cdot e\subset DF(\bar{x},\bar{y})(H_{\bar{x},x}^{\pm}(0))+D,\quad \forall x\in S,$$

再由(8)式可得

$$F(x)-\bar{y}+\varepsilon\cdot e\subset D+D\subset D,\forall x\in S.$$

上式表明：$(\bar{x},\bar{y})$ 是问题(SOP)的强 $\varepsilon\cdot t$- 极小元.

参考文献：

[1] Jahn J, Rauh R. Contingent epiderivatives and set-valued optimzation[J]. Math Method Oper Res, 1997, 46: 193.

[2] 王开荣，李键. 集值优化问题弱尖锐解的最优性条件[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，52：223.

[3] Gong X H. Optimality conditions for Henig and globally proper efficient solutions with ordering cone has empty interior[J]. J Math Anal Appl, 2005, 307: 12.

[4] Jahn J, Rauh R. The existence of contingent epiderivatives for set-valued maps[J]. Appl Math Lett, 2003, 16: 1179.

[5] Jiménez B, Novo V, Samaa M. Scalarization and optimality conditions for strict minimizers in multiobjective optimization via contingent epiderivatives [J]. J Math Anal Appl, 2009, 352: 788.

[6] Rodríguez-Marína L, Sama M. About contingent epiderivatives [J]. J Math Anal Appl, 2007, 327: 754.

[7] Rodríguez-Marína L, Sama M. Variational characterization of the contingent epiderivative [J]. J Math Anal Appl, 2007, 335: 1374.

[8] Yu G. Henig globally efficiency for set-valued optimization and vector variational inequality [J]. J Syst Sci Complex, 2014, 27: 338.

[9] Lalitha C S, Dutta J. Govll M G. Optimality criteria in set-valued optimization [J]. J Aus Math Soc, 2003, 75: 221.

[10] Fu J Y, Wang Y H. Arcwise connected cone-convex functions and mathematical programming [J]. J Optimiz Theory Appl, 2003, 118: 339.

[11] G L, Yu G. Optimality of global proper efficiency for cone-arcwise connected set-valued optimization using contingent epiderivative [J], Asia Pac J Oper Res, 2013, 30: 1.

[12] Alonso-Durán M. Rodríguez-Marín L. On approximate solutions in set-valued optimization problems [J]. J Comput Appl Math, 2012, 236: 4421.

[13] Gao Y, Hou S H, Yang X M. Existence and optimality conditions for approximate solutions to vector optimization problems [J]. J Optimiz Theory App, 2012, 152: 97.

[14] Long X J, Li X B, Li Zeng J. Lagrangian conditions for approximate solutions on nonconvex set- valued optimization problems [J]. Optim Lett, 2013, 7: 1847.

[15] Zhou Z A, Yang X M, Peng J W. Optimality conditions of vector optimization problems with set-valued mapping based on the algebraic interior in real linear spaces [J]. Optim Lett, 2014, 8: 1047.