doi:103969/j. issn. 0490-6756. 2016. 11. 001

# 三阶非线性微分方程边值问题正解的存在性

达举霞，韩晓玲
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

**摘 要**：本文应用锥上的不动点定理研究了三阶四点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+f(t,u(t))=0, t\in[0,1], \\ u'(0)=\alpha u(\xi), u'(1)+\beta u(\eta)=0, u''(0)=0 \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是正的参数，$0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant 1$. 在 $f$ 满足适当的增长条件下，本文通过对核函数的上下界估计获得了该问题正解的存在性.

**关键词**：边值问题；正解；不动点定理；锥
**中图分类号**：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2016)06-1177-06

# Existence of positive solutions for nonlinear third-order ordinary differential equations

*DA Ju-Xia*, *HAN Xao-Ling*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract**: In this paper, by applying the fixed point theorem in cone, we study the existence of positive solutions of third-order four-point boundary value problem

$$\begin{cases} u'''(t)+f(t,u(t))=0, t\in[0,1], \\ u'(0)=\alpha u(\xi), u'(1)+\beta u(\eta)=0, u''(0)=0, \end{cases}$$

where $\alpha$ and $\beta$ are positive parameters, $0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant 1$. Under some conditions on $f$, we obtain the existence of positive solutions of the problem by estimating the upper bounds and lower bounds for kernel function.

**Keywords**: Boundary value problem; Posistive solutions; Fixed point; Cone
(2010 MSC 34B15, 34B18)

## 1 引 言

三阶微分方程起源于数学和物理应用. 由于这类问题的普遍性和重要性，三阶多点边值问题深受学者关注，相关研究也得到了许多深刻的结果[1-10].

2014 年，文献 [1] 中运用有序 Banach 空间的新不动点定理获得了三阶两点边值问题

$$-u'''(t)=f(t,u(t)), t\in[0,1],$$
$$u(0)=u'(0)=u'(1)=0$$

变号解的存在性结果. 其中 $f\in C([0,1]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$. 2015 年，文献[2] 中运用上下解方法研究奇异非线性微分方程

$$(p(t)x')''=f(t,x,p(t)x',(p(t)x')'),$$
$$t\in(0,1)$$

正解的存在性，这里 $p(t)$ 在 $t=0$ 处奇异. 2015 年，文献 [3] 运用 Leggett-Williams 不动点定理获得了三阶边值问题

**收稿日期**：2015-12-16
**基金项目**：国家自然科学基金(11561063)
**作者简介**：达举霞(1990－)，女，甘肃兰州人，硕士研究生，主要研究常微分边值问题. E-mail：1414320179@qq. com.
**通讯作者**：韩晓玲. E-mail：hanxiaoling9@163. com.

$$\begin{cases}(\varphi(-u^{\Delta\Delta}(t)))^{\Delta}+q(t)f(t,u(t),\\ \quad u^{\Delta}(t))=0,t\in[0,1]_T,\\ au(0)-bu^{\Delta}(0)=\int_0^1 g_1(s,u(s))\Delta(s),\\ \quad cu(1)+du^{\Delta}(0)=\int_0^1 g_2(s,u(s))\Delta(s),\\ \quad u^{\Delta\Delta}(1)=0\end{cases}$$

至少三个正解的存在性结果. 这里 0,1 是 $T$ 上的点, $[0,1]_T=[0,1]\cap T$, $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\varphi(0)=0$. 本文主要研究边值问题

$$u'''(t)+f(t,u(t))=0,t\in[0,1] \tag{1}$$

$$u'(0)=\alpha u(\xi),u'(1)+\beta u(\eta)=0,\ u''(0)=0 \tag{2}$$

正解的存在性. 其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是正的参数, $0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant 1$. 在 $f$ 满足适当的增长条件下, 通过对核函数的上下界估计, 我们获得问题(1)-(2)正解的存在性. 本文所获结果是文献[4]二阶非线性方程边值问题主要结果的直接推广.

## 2 预备知识

我们给出假设条件:

$(\mathrm{H}_1)$ $1+\beta\eta>\beta$;

$(\mathrm{H}_2)$ $1-\alpha\xi>0$.

本文所用的工具定理是:

**定理 2.1** 设 E 是一个 Banach 空间, 并且设 $P\subset E$ 是一个锥. 假定 $\Omega_1,\Omega_2$ 是 $E$ 的两个开子集且 $0\in\Omega_1$, $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, 设 $T:P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to P$ 是全连续算子, 使得:

(i) $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in p\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in p\cap\partial\Omega_2$;

(ii) $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in p\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in p\cap\partial\Omega_2$,

则 $T$ 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 上有不动点.

**引理 2.2** 设 $\alpha,\beta$ 是正的参数, $A=\alpha(1+\beta\eta)+\beta(1-\alpha\xi)$, 则对 $y\in C[0,1]$, 问题

$$u'''(t)+y(t)=0,t\in(0,1) \tag{3}$$

$$u'(0)=\alpha u(\xi),u'(1)+\beta u(\eta)=0,u''(0)=0 \tag{4}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1 k(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$k(t,s)=\frac{1}{A}[(1-a\xi+at)(1-s)+\beta(1-a\xi+at)H_{\eta}(s)+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)H_{\xi}(s)]-H_t(s) \tag{5}$$

这里

$$H_r(s)=\begin{cases}\dfrac{(r-s)^2}{2},s\leqslant r,\\ 0,s>r.\end{cases}$$

证明 可以通过两边积分得到.

**引理 2.3** 设条件$(\mathrm{H}_1)$,$(\mathrm{H}_2)$成立, 则 $K(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是正的, 并且满足如下的性质:

(P) 存在一个可测函数 $\Phi:[0,1]\to[0,\infty)$, 一个子区间 $[a,b]\subset[0,1]$ 和一个常数 $c\in(0,1]$, 使得

$$K(t,s)\leqslant\Phi(s),t,s\in[0,1],$$

和

$$K(t,s)\geqslant c\Phi(s),t\in[a,b],s\in[0,1].$$

证明 很容易证得在满足条件$(\mathrm{H}_1)$,$(\mathrm{H}_2)$下 $K(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是正的. 现在我们来证明 $K(t,s)$ 满足性质(P). 我们需要得到 $\Phi(s)$, 一个子区间 $[a,b]\subset[0,1]$ 和一个常数 $c\in(0,1]$, 使得

$$K(t,s)\leqslant\Phi(s),t,s\in[0,1],$$

和

$$K(t,s)\geqslant c\Phi(s),t\in[a,b],s\in[0,1].$$

上界估计. 我们取 $\Phi(s)=\max\{1,1-s\}\frac{1}{A}(1+2\alpha)(1+\beta)$.

情形 1. $s\leqslant\eta$. 如果 $s\leqslant\xi,s\leqslant t$ 则

$$k(t,s)=\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-s)^2}{2}+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)\frac{(\xi-s)^2}{2}]-\frac{(t-s)^2}{2},\leqslant\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha)+\alpha(1+\beta\eta)]\leqslant\frac{1}{A}[(1+\alpha)(1+\beta)+\alpha(1+\beta\eta)]\leqslant\frac{1}{A}[(1+2\alpha)(1+\beta)];$$

如果 $s \leqslant \xi, s > t$，则

$$k(t,s) = \frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-s)^2}{2}+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)\frac{(\xi-s)^2}{2}\right] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha)+\alpha(1+\beta\eta)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1+\alpha)(1+\beta)+\alpha(1+\beta\eta)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1+2\alpha)(1+\beta)];$$

如果 $s > \xi, s \leqslant t$，则

$$k(t,s) = \frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-s)^2}{2}\right] - \frac{(t-s)^2}{2}, \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)] \leqslant \frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)+(1+\beta)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1+\alpha)(1+\beta)] \leqslant \frac{1}{A}[(1+2\alpha)(1+\beta)];$$

如果 $s > \xi, s > t$，则

$$k(t,s) = \frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-s)^2}{2}\right] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1+\beta)] \leqslant \frac{1}{A}[(1+\alpha)(1+\beta)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1+2\alpha)(1+\beta)].$$

情形 2. $s > \eta$. 如果 $s > \xi, s \leqslant t$，则

$$k(t,s) = \frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s))] - \frac{(t-s)^2}{2}, \leqslant \frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1+\alpha)] \leqslant \frac{1}{A}[(1+2\alpha)(1+\beta)].$$

如果 $s > \xi, s \leqslant t$，则

$$k(t,s) = \frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)] \leqslant \frac{1}{A}[(1+\alpha)] \leqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1+2\alpha)+(1+\beta)].$$

下界估计. 我们取 $[a,b] \subset [0,\xi]$，$c = \min\{(1-\eta),1\}\dfrac{1-\alpha\xi}{(1+2\alpha)(1+\beta)}$.

情形 1. $s \leqslant \eta$. 如果 $s \leqslant \xi, s \leqslant t$，则

$$k(t,s) = \frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-S)^2}{2}+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)\frac{(\xi-s)^2}{2}\right] - \frac{(t-s)^2}{2} = \frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-S)^2}{2}+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)\frac{(\xi-s)^2}{2}-\frac{(t-s)^2}{2}[\alpha(1+\beta\eta)+\beta(1-\alpha\xi)]\right] \geqslant$$

$$\frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\xi-S)^2}{2}+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)\frac{(\xi-s)^2}{2}-\frac{(\xi-s)^2}{2}[\alpha(1+\beta\eta)+\beta(1-\alpha\xi)]\right] = \frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)] \geqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi)(1-\eta)]=\frac{1-\alpha\xi}{(1+2\alpha)(1+\beta)}(1-\eta)\Phi(s);$$

如果 $s\leqslant\xi, s>t$，则

$$k(t,s)=\frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-S)^2}{2}+\alpha(1+\beta\eta-\beta t)\frac{(\xi-s)^2}{2}\right]\geqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)]\geqslant\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi)(1-\eta)]=$$

$$\frac{1-\alpha\xi}{(1+2\alpha)(1+\beta)}(1-\eta)\Phi(s).$$

情形 $s>\xi, s\leqslant t$ 不可能发生. 如果 $s>\xi, s>t$ 则

$$k(t,s)=\frac{1}{A}\left[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)+\beta(1-\alpha\xi+\alpha t)\frac{(\eta-S)^2}{2}\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi)(1-s)]$$

$$\geqslant\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi)(1-\eta)]$$

$$=\frac{1-\alpha\xi}{(1+2\alpha)(1+\beta)}(1-\eta)\Phi(s).$$

情形 2. $s>\eta$. 如果 $s>\xi, s\leqslant t$，这种情况不可能发生. 如果 $s>\xi, s>t$，则

$$k(t,s)=\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi+\alpha t)(1-s)]\geqslant$$

$$\frac{1}{A}[(1-\alpha\xi)(1-\eta)]=$$

$$\frac{1-\alpha\xi}{(1+2\alpha)(1+\beta)}\Phi(s).$$

## 3 主要结果

我们设 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的. 定义锥如下：

$$P=\{u\mid u\in C[0,1],\min_{a\leqslant t\leqslant b}u(t)\geqslant c\|u\|\},$$

这里 $a$，$b$，$c$ 在引理 2.3 中被定义. 显然 $P$ 是 $C[0,1]$ 上的锥，且在 $P$ 中的函数是正的.

记

$$u(t)=\int_0^1 K(t,s)f(s,u(s)):=$$

$$Au(t), u\in[0,1].$$

很容易证明如果 $u$ 是算子方程的不动点，则 $u=u(t)$ 一定是问题(1)-(2)的一个解.

**引理 3.1** 算子 $A:P\to P$ 是全连续的.

**证明** 取 $u\in P$. 则

$$Au(t)=\int_0^1 K(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1\Phi(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

所以

$$\|Au\|\leqslant\int_0^1\Phi(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

进而对 $a\leqslant t\leqslant b$，有

$$\min_{b\leqslant t\leqslant b}Au(t)=\min_{b\leqslant t\leqslant b}\int_0^1 K(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$

$$c\int_0^1\Phi(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant c\|Au\|.$$

所以 $AP\subset P$.

现在我们假设 $D\subset P$ 是有界集. 则存在一个常数 $M_1>0$，对于任意的 $u\in D$，有 $\|u\|\leqslant M_1$. 综上，我们证得 $A(D)$是相对紧的. 令

$$M_2=\sup\{f(t,u):(t,u)\in[0,1]\times[0,M_1]\},$$

$$M=\int_a^b\Phi(s)\mathrm{d}s.$$

则对于任意的 $y\in A(D)$，存在 $u\in D$，使得 $y=Au$ 并且对任意 $t\in[0,1]$ 有

$$|y(t)|=|(Au)(t)|=$$

$$\left|\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\int_a^b\Phi(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$M_2\int_a^b\Phi(s)\mathrm{d}s\leqslant MM_2.$$

这意味着 $A(D)$是一致有界的.

另一的方面，对 $\varepsilon>0$，由于 $G(t,s)$在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，从而在 $[0,1]\times[0,1]$ 上一致连续. 由一致连续的定义，存在 $\delta>0$，使得对任意

$t_1, t_2 \in [0,1]$，当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时，有

$$|G(t_1,s) - G(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{M_2},$$

从而对任意 $y \in A(D), t_1, t_2 \in [0,1]$，当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 有

$$|y(t_1) - y(t_2)| = |(Au)(t_1) - (Au)(t_2)| = \left|\int_0^1 (G(t_1,s) - G(t_2,s)) f(s,u(s)) \mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 |(G(t_1,s) - G(t_2,s)) f(s,u(s))| \mathrm{d}s \leqslant \frac{\varepsilon}{M_2} M_2 \leqslant \varepsilon,$$

从而 $A(D)$ 是等度连续的. Arzela-Ascoli 定理，我们到 $A(D)$ 是相对紧的. 这样我们就证明了 $A$ 是一个紧算子.

最后我们证明 $A$ 是连续的. 假设 $u_m (m=1, 2, \ldots), u_0 \in P$，$\| u_m - u_0 \| \to 0 (m \to \infty)$. 则存在 $M_3 > 0$ 使得对任意的 $m$，$\| u_m \| \leqslant M_3$. 令

$$M_4 = \sup\{f(t,u) : (t,u) \in [0,1] \times [0,M_3]\}.$$

则对于任意的 $m$ 和 $t \in [0,1]$，有

$$G(t,s) f(s, u_m(s)) \leqslant M_4, s \in [0,1].$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，我们得到

$$\lim_{m\to\infty} (Au_m)(t) = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 G(t,s) f(s,u_m(s)) \mathrm{d}s = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s = (Au_0)(t), t \in [0,1].$$

这表明 $A$ 是连续的. 因此，$A: P \to P$ 是全连续的.

**定理 3.2**　设$(\mathrm{H}_1)$,$(\mathrm{H}_2)$成立，$f \in C([0,1] \times [0,+\infty), [0,+\infty))$ 且在 $[0,1]$ 的任意子区间 $f(t,u) \neq 0$. 则问题(3)-(4)在如下情况下有一个正解：

(i) $\lim_{u\to 0+} \max_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} = 0$ 且 $\lim_{u\to+\infty} \min_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$；

(ii) $\lim_{u\to 0+} \max_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$ 且 $\lim_{u\to+\infty} \min_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} = 0$；

**证明**　超线性情形.

由于 $\lim_{u\to 0+} \max_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} = 0$，可以取 $H_1 > 0$，当 $0 < u \leqslant H_1$ 时有 $f(t,u) \leqslant \varepsilon u$，其中 $\varepsilon > 0$ 并满足

$$\varepsilon \int_0^1 \Phi(s) \mathrm{d}s \leqslant 1.$$

记

$$\Omega_1 = \{u \in C[0,1] : \| u \| < H_1\}.$$

因此，如果 $u \in p$，则 $\| u \| = H_1$. 于是

$$|(Au)(t)| \leqslant \int_0^1 \Phi(s) f(s,u(s)) \leqslant \| u \|.$$

从而

$$\| (Au) \| \leqslant \| u \|, u \in P \cap \partial\Omega_1.$$

其次，由于 $\lim_{u\to\infty} \min_{t\in[0,1]} \dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$，故存在 $\overline{H} > 0$，使得当 $u \geqslant \overline{H_2}$ 时有 $f(t,u) \geqslant \mu u$，其中 $u > 0$ 且 $c^2 \mu \int_a^b \Phi(s) \mathrm{d}s \geqslant 1$. 取

$$H_2 = \max\left\{2H_1, \frac{\overline{H_2}}{c}\right\},$$

$$\Omega_2 = \{u \in E : \| u \| < H_2\}.$$

则 $u \in P$，$\| u \| = H_2$ 表明

$$\min_{t\in[a,b]} u(t) \geqslant cu \geqslant \overline{H_2}.$$

当 $\bar{t} \in [a,b]$，时

$$Au(\bar{t}) = \int_0^1 k(\bar{t},s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s \geqslant \int_a^b c\Phi(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s \geqslant c^2 \mu \int_a^b \Phi(s) \| u \| \mathrm{d}s, \geqslant \| u \|.$$

因此 $\| Au \| \geqslant \| u \|, u \in \partial\Omega_2$.

从而，由定理 2.1 和引理 2.3，$A$ 在 $P \cap (\Omega_1 \backslash \Omega_2)$上有一个不动的点，使得 $H_1 \leqslant \| u \| \leqslant H_2$ 和 $u(t) > 0, t \in [0,1]$，超线性部分的证明完成.

次线性情形. 由于

$$\lim_{u\to 0+} \max_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = \infty,$$

$$\lim_{u\to\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0.$$

可以取 $H_1 > 0$，使得当 $0 < u \leqslant H_1$ 时有 $f(t,u) \geqslant \hat{\eta}, t \in [0,1]$，其中 $\hat{\eta} > 0$ 并满足

$$\hat{\eta} c^2 \int_a^b \Phi(s) \mathrm{d}s \geqslant 1.$$

则当 $u \in P$，$\| u \| = H_1$ 和 $\bar{t} \in [a,b]$ 时，有

$$Au(\bar{t}) = \int_0^1 k(\bar{t},s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s \geqslant \int_a^b c\Phi(s) f(s,u(s)) \mathrm{d}s \geqslant c^2 \hat{\eta} \int_a^b \Phi(s) \| u \| \mathrm{d}s \geqslant \| u \|.$$

记

$$\Omega_1 = \{u \in C[0,1]: \|u\| < H_1\}.$$

则 $\|(Au)\| \leqslant \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_1$. 又由于 $\lim_{u\to\infty} \min_{t\in[0,1]} \frac{f(t,u)}{u} = 0$, 存在 $\overline{H_2} > 0$, 使得当 $u \geqslant \overline{H_2}$ 时有 $f(t,u) \leqslant \lambda u$, 其中 $\lambda > 0$ 满足

$$\lambda \int_0^1 \Phi(s)\mathrm{d}s < 1.$$

情形(1). $f$ 是有界的. 即对所有的 $t \in [0,1], u \in \mathbf{R}$ 有 $f(t,u) \leqslant N$. 在这种情况下选取 $H_2 = \max\left\{2H_1, N\int_0^1 \Phi(s)\mathrm{d}s\right\}$. 则当 $u \in P$, $\|u\| = H_2$ 时, 有

$$|Au(t)| \leqslant \int_0^1 |k(t,s)| f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant N\int_0^1 \Phi(s)\mathrm{d}s \leqslant H_2.$$

因此 $\|Au\| \leqslant \|u\|$.

情形(2). $f$ 是无界的. 选取 $H_2 > \max\{2H_1, \overline{H}_2\}$ 使得

$$f(t,u) \leqslant f(t,H_2), t \in [0,1], 0 < u \leqslant H_2.$$

则对 $u \in p$ 和 $\|u\| = H_2$, 有

$$|Au(t)| \leqslant \int_0^1 |k(t,s)| f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\int_0^1 \Phi(s)\mathrm{d}s \leqslant H_2.$$

因此无论那种情形 $\Omega_2 = \{u \in C[0,1]: \|u\| < H_2\}$, $u \in P \cap \partial\Omega_2$, 都有 $\|(Au)\| \leqslant \|u\|$. 定理2.1的第二部分说明问题(1)-(2)在[0,1]有一个正解. 这就完成了整个定理的证明.

## 参考文献:


[1] Lin X L, Zhao Z Q. Sign-changing solution for a third-order boundary value problem in ordered Banach space with lattice structure [J]. Natural Science, 2014, 132: 1.

[2] Cheng M. Nagumo theorems of third-order singular nonlinear value problems [J]. J Math Anal Appl, 2015, 135: 1.

[3] Li Y K, Wang L Y. Multiple positive solutions of nonlinear third-order boundary value problems with integral boundary conditions on time scales [J]. Adv Diff Equ, 2015, 90: 1.

[4] Fan H X, Ma R Y. Loss of positivity in a nonlinear second order ordinary differential equations [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71: 437.

[5] Tokmak F, Karaca I Y. Existence of positive solutions for third-order boundary value problems with integral boundary conditions on time scales [J]. Inequal Appl, 2013, 498: 1.

[6] Infante G. Eigenvalues of some non-local boundary value problems [J]. Proc Edinb Math Soc, 2003, 46: 75.

[7] Webb J R L. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory [J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47: 4319.

[8] Guo Y P, Liu Y J, Liang Y C. Positive solutions for the third-order boundary value problems with the second derivatives [J]. Bound Value Probl, 2012, 34: 1.

[9] Sergey S. Nonlocal third order boundary value problems with solutions that change sign [J]. Mathematical and Analysis, 2014, 19: 145.

[10] Rochdi J. Positive solution of system of third-order boundary value problem with three-point and integral boundary conditions [J]. J Bull Math Anal Appl, 2014, 6: 60.