

doi: 103969/j.issn.0490-6756.2017.03.003

定常 Navier-Stokes 方程基于速度投影的 等阶元稳定化方法

张百驹¹, 李 辉²

(1. 四川大学数学学院, 成都 610064; 2. 四川石油天然气建设工程有限责任公司, 成都 610200)

摘要: 针对定常的 Navier-Stokes 方程, 本文给出并分析了基于速度场 L^2 投影的新型稳定化有限元方法. 速度-压力逼近采用了 P_1/P_1 元. 为了克服等阶元不满足 inf-sup 条件的问题, 本文增加了压力投影稳定项. 基于速度场 L^2 投影的稳定化方法, 本文增强了 L^2 范数的稳定性. 该稳定化格式的优点是所有的计算都在同一套网格上执行, 不需要嵌套网格且只涉及速度场投影而不要求解速度梯度投影. 在连续的 Navier-Stokes 方程存在唯一一支非奇解的情况下, 本文证明了该离散格式是稳定的. 此外, 本文还得出了离散解的误差估计. 数值实验证实该方法是有用的.

关键词: 定常 Navier-Stokes 方程; 速度 L^2 投影稳定; 对流占优; 等阶元; 压力投影稳定法

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2017)02-0231-08

Velocity projection-based stabilized finite element method for steady Navier-Stokes equations using equal order interpolation

ZHANG Bai-Ju¹, LI Hui²

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. Sichuan Petroleum and Gas Construction Engineering Co. Ltd., Chengdu 610200, China)

Abstract: A new type of velocity L^2 projection-based stabilized finite element method for steady Navier-Stokes equations is proposed and analyzed. Velocity and pressure are approximated equal order element P_1/P_1 . To overcome the violation of discrete inf-sup condition when equal order elements are used, pressure projection stabilized term is added. Velocity projection-based stabilized method directly increases the L^2 -stability instead of H^1 -stability. The main advantage of the proposed methods lies in that, all the computations are performed at the same element level, without the need of nested meshes and the projection of the gradient of velocity. It is showed that this discrete model is stable, given the continuous Navier-Stokes equations has a unique branch of nonsingular solutions. Moreover, error estimates are derived. Numerical experiments show that the method is valid.

Keywords: Steady Navier-Stokes equation; Velocity L^2 projection; Convection-dominated; Equal order element; Pressure projection stabilized method

(2010 MSC 65M60)

1 引言

粘性不可压缩 Navier-Stokes 方程(简称 NS 方程)的有限元离散通常面临两个难点:离散的速度-压力有限元空间的匹配性(即需要满足 inf-sup 条件)和克服对流占优时解呈现的数值震荡现象. 如何解决这两个困难一直是人们研究的热点. 使用稳定化的有限元方法可有效解决上述两个问题.

为了解决这两个问题带来的困难,众多学者相继提出了各种稳定化方法,如 SUPG(Streamline Upwind Petrov Galerkin)方法^[1],压力梯度投影法^[2],压力投影方法^[3-6]. 人工黏性(Artificial Viscosity,简称 AV)方法,PSPG(Pressure stabilized Petrov Galerkin)方法,等. 其中 SUPG 和 PSPG 在有些文献中也被称作 GLS(Galerkin-Least Square)方法,其详细论述和发展可参见文献[1,7-10]. 在稳定压力方面,与 SUPG 法和压力梯度投影法相比,压力投影方法有不需要计算导数的优势. 当压力为线性元时,不用将梯度投影到粗网格上即可在同一套网格上计算,编程起来尤为方便. GLS 方法既可以回避 inf-sup 条件,又可以克服对流占优,且精度高,稳定性好,但是也有一些缺点. 比如:它会额外引入一些非物理的耦合项;解在边界附近的近似效果不好;用高阶元时需要计算二阶导数^[11]等.

近年来,一些数值方法很好地解决了上述问题,如变分多尺度(variational multiscale,简称 VMS)方法^[12-14],子格黏性(subgrid eddy viscosity)方法^[15,16],局部投影稳定(Local Projection Stabilized,简称 LPS)方法^[7,17],残差局部投影(Residual Local Projection,简称 RELP)^[18,19],连续内罚(Continuous Interior Penalty,简称 CIP)^[20]. 虽然这些方法各有特点和优势,但是在实际计算中要么会涉及到两层网格之间的结构,要么需要对速度梯度项进行投影,这给编程带来不便. 最近,文献[8]对对流扩散方程提出了一种新的稳定化方法. 这种方法只对速度场本身投影,不需要对速度梯度投影,而且可以在同一套网格上实现,不涉及两层网格之间的结构. 这种方法的特点为:它增强的是 L^2 范数的稳定性,而以往是增加 H^1 范数的稳定性. 随后文献[21]将此推广到了 Oseen 方程,分析了该方法的稳定性和收敛性. 一个自然的想法是如何将此方法应用到 NS 方程上.

此外,计算 NS 方程还将面临另外一个问题就

是 NS 方程的非线性性. 非线性使得 NS 方程的解可能不唯一,除非粘性系数和外力满足苛刻的条件^[22]. 但是这些解可以是孤立的,即存在一个领域使得每个解在此领域中是唯一的,这意味着方程存在唯一一支非奇解. 文献[23]对非奇解支作了讨论,用 VMS 增加了速度的稳定性,但是使用的是满足 inf-sup 条件的有限元. 文献[18]考虑的是不满足 inf-sup 条件的有限元,且讨论了非奇解支的存在唯一性. 然而文献[18]所加的稳定项是复杂的非线性项,这给理论分析带来了不便.

本文受文献[3,4,8,18]启发,将速度 L^2 投影稳定方法推广到了 Navier-Stokes 方程上,并用压力投影稳定方法克服等阶元不满足 inf-sup 条件. 假设连续的 Navier-Stokes 方程存在唯一一支非奇解的情况下,我们证明了本文所提出的格式存在唯一的一支离散的非奇解,并且得出了该离散解的误差估计. 与文献[18]相比,我们的方法只引入了两个线性稳定项,不用计算速度梯度和压力梯度,而且理论分析更容易. 数值实验证实我们的误差估计是正确的.

2 连续和离散问题

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ($d=2,3$) 是有界多边形区域或有多面体区域. 考虑定常的 NS 方程:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, & x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 u, p 分别代表速度和压力, f 代表体应力, ν 是粘性系数.

2.1 连续问题的变分形式

为了得到变分形式我们引进 Sobolev 空间 $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbf{R}$, 和 $W^{m,p}(\Omega)$, $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. 令 $V = H_0^1(\Omega)^d$, $Q = L_0^2(\Omega)$ 以及 $H_0^1(\Omega)$ 的对偶空间 $H^{-1}(\Omega)$. 其中

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q(x) dx = 0\}.$$

$H^1(\Omega)$ 的范数和半范数分别记为 $\|\cdot\|_1$ 和 $|\cdot|_1$.

$\|\cdot\|_0$ 代表 $L^2(\Omega)$ 的范数.

定义

$$b(u; v, w) = (u \cdot \nabla v, w),$$

$$A(u, p; v, q) =$$

$$\nu(\nabla u, \nabla v) - (\nabla \cdot v, p) + (\nabla \cdot u, q),$$

$$N = \sup_{u, v, w \in V} \frac{b(u; v, w)}{|u|_1 |v|_1 |w|_1},$$

$$\|f\|^* = \sup_{v \in V} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_1} \quad (2)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表 $H_0^1(\Omega)^d$ 与 $H^{-1}(\Omega)^d$ 的对偶. 则问题(1)的变分形式可写成: 求 $(u, p) \in V \times Q$ 使得

$$\begin{aligned} A(u, p; v, q) + b(u; u, v) &= \langle f, v \rangle, \\ \forall (v, q) &\in V \times Q \end{aligned} \quad (3)$$

问题的适定性由以下定理^[22,23]给出:

定理 2.1 (i) 对任意 $f \in H^{-1}(\Omega)^d$, 问题至少有一个解 $(u, p) \in V \times Q$;

(ii) 若 $f \in L^2(\Omega)^d$, 则 $(u, p) \in H^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$;

(iii) 若 $\frac{N}{\nu^2} \|f\|^* < 1$, 则问题解唯一.

2.2 离散问题

令 $T_h = \{K\}$ 是 Ω 的拟一致的三角剖分. 对所有 $K \in T_h$, 令 h_K 为 K 的直径且 $h = \max_{K \in T_h} h_K$. 令 $P_{k+1}(T_h)$ 为剖分 T_h 上的连续分片 $k+1$ 次多项式, $k \geq 0$. 对每个 h , 引入 T_h 上的有限元空间 V_h 和 Q_h 满足 $V_h \subset V, Q_h \subset Q$. 本文考虑 V_h 和 Q_h 是等阶元, 即 $V_h = [P_1(T_h)]^d \cap V, Q_h = P_1(T_h) \cap L_0^2(\Omega)$. 再假设有限元空间 V_h 和 Q_h 有下述逼近性质: 对

$$\begin{aligned} \forall (u, p) &\in (H^{r+1}(\Omega) \times H^r(\Omega)), \\ \exists (I_h u, J_h p) &\in V_h \times Q_h, \end{aligned}$$

使得

$$h|u - I_h u|_1 + \|u - I_h u\|_0 + h\|p - J_h p\|_0 \leq Ch^{r+1}(|u|_{r+1} + |p|_r) \quad (4)$$

为描述新的稳定化方法, 还需引入一个空间 $L_H = [P_0(T_H)]^d$, 其中 $P_0(T_H)$ 是划分 $T_H, H \geq h$ 上不连续分片常数.

定义 2.2 定义投影算子 $\pi_H: V \rightarrow L_H$, 使得

$$(u - \pi_H u, v^H)_{L^2(\Omega)^d} = 0, \forall v^H \in L_H \quad (5)$$

由文献[24, p73, Proposition 1.135]可知 π_H 满足下述逼近性质成立:

$$\|u - \pi_H u\|_0 \leq CH\|u\|_1, \forall u \in H^1(\Omega) \quad (6)$$

由上述符号, 定义速度投影的稳定项 $a_s(\cdot, \cdot, \cdot)$ 如下

$$\begin{aligned} \text{定义 2.3} \quad &\text{对所有 } u, v \in V \\ a_s(u, v) &= (\nu_T(id - \pi_H)u, (id - \pi_H)v) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\nu_T > 0$ 是稳定化参数, id 是 $L^2(\Omega)$ 上的恒等映射. 规定当空间 L_H 不连续时, ν_T 是 T_H 上的分片常数, 于是

$$(\nu_T(id - \pi_H)u, (id - \pi_H)v) =$$

$$\nu_T((id - \pi_H)u, (id - \pi_H)v).$$

众所周知, 等阶有限元不满足 inf-sup 条件. 为了能得到稳定的离散格式, 我们需要加压力投影稳定项 $s_h(p_h, q_h)$. 定义如下:

$$\text{定义 2.4} \quad \text{对每个 } p_h, q_h \in Q_h \text{ 定义稳定项为 } s_h(p_h, q_h) = (\theta_T(id - \Pi_h)p_h, (id - \Pi_h)q_h) \quad (8)$$

其中 $\Pi_h: L^2(\Omega) \rightarrow P_0(T_h)$ 是 L^2 投影.

使用以上符号, 我们给出离散问题:

$$\begin{aligned} \text{求 } (u_h, p_h) &\in V_h \times Q_h \text{ 使得} \\ A(u_h, p_h; v_h, q_h) + b(u_h; u_h, v_h) + a_s(u_h, v_h) + s_h(p_h, q_h) &= \langle f, v_h \rangle, \forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h \end{aligned} \quad (9)$$

3 离散格式的稳定性 and 收敛性分析

在这一节我们将利用文献[22,23]关于非奇解支的结果给出问题的稳定性和收敛性分析. 在此之前需要一些准备工作.

3.1 符号说明

令 $X = V \times Q, Y = H^{-1}(\Omega)^d, Z = L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$. 由文献[22, p5, Theorem 1.3], $Z \rightarrow Y$ 是紧嵌入.

定义 3.1 定义算子 $T \in L(Y, X)$, 对给定 $f \in Y, Tf = (v, q) \in X$ 满足

$$\begin{aligned} (\nabla v, \nabla w) - (\nabla \cdot w, q) + (\nabla \cdot v, r) &= \langle f, w \rangle, \forall (w, r) \in V \times Q \end{aligned} \quad (10)$$

由文献[22]可知对给定 $f \in Y$, 问题的解存在唯一.

定义 3.2 定义映射 $G: X \rightarrow Y$

$$G(v) = v \cdot \nabla v - f \forall v = (v, q) \in X \quad (11)$$

通过简单计算并由文献[22]可知

$$\begin{aligned} D_u G(v) \cdot w &= v \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v \in Z, \\ \forall w &= (w, r) \in X \end{aligned} \quad (12)$$

定义 3.3 定义映射

$$\begin{aligned} F: (\lambda, v) &\in \Lambda \times X \rightarrow F(\lambda, v) \in X \\ F(\lambda, v) &= v + \lambda TG(v) \end{aligned} \quad (13)$$

其中 Λ 是 \mathbf{R} 中的紧集. 由 T, G 的性质易知 $F(\lambda, v) \in X$.

考虑方程: 求 $(\lambda, u) \in X$ 使得

$$F(\lambda, u) = u + \lambda TG(u) = 0 \quad (14)$$

由文献[22]可知, $(u, p) \in X$ 是问题(6)的解当且仅当 $u = (u, \frac{p}{\nu})$ 是方程(18) $F(\lambda, u) = 0$ 的解. 其中 $\lambda = \frac{1}{\nu}$.

类似地, 我们可定义离散的 T_h, G_h, F_h . 首先

令 $X_h = V_h \times Q_h$, 其范数定义为

定义 3.4 对每一个 $u_h = (u_h, p_h) \in X_h$

$$\|u_h\|^2 = \|u_h\|_1^2 + \|p_h\|_0^2 + s_h(p_h, p_h) \quad (15)$$

定义 3.5 定义算子 $T_h \in L(Y, X_h)$, 对给定 f

$\in Y, T_h f = (v_h, q_h) \in X_h$ 满足

$$(\nabla v_h, \nabla w_h) - (\nabla \cdot w_h, q_h) + (\nabla \cdot v_h, r_h) + s_h(p_h, q_h) = \langle f, w_h \rangle, \forall (w_h, r_h) \in X_h \quad (16)$$

由以下引理可知这样定义的 T_h 是有意义的.

引理 3.6^[4] 假设 Π_h 满足 $\|\Pi_h p\| \leq C \|p\|_0$

$\forall p \in L^2(\Omega), \|p - \Pi_h p\|_0 \leq Ch \|p\|_1, \forall p \in H^1(\Omega)$, 则有 $\beta > 0$ 使得

$$\beta \|u_h\| \leq \sup_{v_h \in X_h} \frac{|A(u_h, p_h; v_h, q_h) + s_h(p_h, q_h)|}{\|v_h\|} \quad (17)$$

由此可知问题的解存在唯一, T_h 的定义是有意义的.

定义 3.7 定义与双线性型 $a_s(u, v)$ 有关的映射

$A_S: X \rightarrow Y$, 给定 $v = (v, q) \in X$

$$\langle A_S(v), w \rangle = a_s(v, w) \quad \forall w \in V \quad (18)$$

现在定义 G 的离散算子 G_h :

定义 3.8 定义映射 $G_h: X \rightarrow Y$

$$G_h(v) = G(v) + A_S(v) \quad \forall v = (v, q) \in X \quad (19)$$

还需定义 F 的离散算子 F_h :

定义 3.9 定义映射

$$F_h: (\lambda, v) \in \Lambda \times X \rightarrow F_h(\lambda, v) \in X$$
$$F_h(\lambda, v) = v + \lambda T_h G_h(v) \quad (20)$$

这样, 与问题对应的离散问题为: 求 $(\lambda, u_h) \in X_h$ 使得

$$F_h(\lambda, u_h) = u_h + \lambda T_h G(u_h) = 0 \quad (21)$$

假设问题(21)与问题都有解, 则容易看出凡是问题(21)的解必是问题(9)的解. 反之亦然. 所以现在需对其存在性做讨论. 为了进一步讨论, 我们还需要算子 T_h 的一些性质.

3.2 算子 T_h 的性质

利用和立即可得算子 T_h 的稳定性:

引理 3.10 对所有的 $f \in H^{-1}(\Omega)^d$

$$\|T_h f\| \leq C \sup_{v_h = (v_h, q_h) \in X_h} \frac{\langle f, v_h \rangle}{\|v_h\|} \quad (22)$$

由参考文献[4], 有下述收敛性结果

引理 3.11 对所有的 $f \in H^{-1}(\Omega)^d$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(T - T_h)f\| = 0 \quad (23)$$

而且若 $f \in L^2(\Omega)^d$

$$\|(T - T_h)f\| \leq Ch \quad (24)$$

3.3 基本引理

从这里开始我们总假设 $f \in L^2(\Omega)^d$. 设 $\{(\lambda, u(\lambda)) \in \Lambda \times X\}$ 是方程的一支非奇解, Λ 是非负实数集中的紧集. 由文献[22]和非奇解的定义可知, 在上述假设下, 对所有 $\lambda \in \Lambda$,

$D_u F(\lambda, u(\lambda)) = I + \lambda T G_u(u(\lambda))$ 是 X 到 X 的同构映射. 记 $\epsilon = \iota(X, X)$ 为 X 到 X 的有界线性算子全体, 则 $D_u F(\lambda, u(\lambda)) \in \epsilon, \forall \lambda \in \Lambda$.

引理 3.12 令

$$\gamma(\lambda) = \|\{D_u F(\lambda, u(\lambda))\}^{-1}\|_\epsilon,$$

$$\mu_h(\lambda) = \|D_u F(\lambda, u(\lambda)) - D_u F_h(\lambda, u(\lambda))\|_\epsilon.$$

假设 $h \rightarrow 0$ 时, $H \rightarrow 0$. 固定 $\lambda \in \Lambda$, 存在 $h_0 > 0$ 使得对所有的 $h \leq h_0$, 算子 $D_u F_h(\lambda, u(\lambda)) \in \epsilon$. 且其逆映射的范数

$$\gamma_h(\lambda) = \|\{D_u F_h(\lambda, u(\lambda))\}^{-1}\|_\epsilon \leq \gamma(\lambda)/(1 - \gamma(\lambda)\mu_h(\lambda)).$$

证明 我们有

$$D_u F_h(\lambda, u(\lambda)) = D_u F(\lambda, u(\lambda)) + \lambda T_h (D_u G_h(u(\lambda)) - D_u G(u(\lambda))) + \lambda (T_h - T) D_u G(u(\lambda)) \quad (25)$$

因为 $D_u F(\lambda, u(\lambda))$ 是同构映射, 所以为了证明 $D_u F_h(\lambda, u(\lambda))$ 是同构映射, 只需证当 h 趋于零时, 的最后两项能趋于零.

由式(12), (23) 和 $Z \rightarrow Y$ 是紧嵌入以及文献[22]可知

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(T_h - T) D_u G(u(\lambda))\|_\epsilon = 0 \quad (26)$$

由定义易知

$$(D_u G_h(u(\lambda)) - D_u G(u(\lambda))) = D_u A_S(u(\lambda)).$$

而由变分学的知识^[20]可知

$$\langle D_u A_S(u) \cdot w, v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle A_S(u + tw) - A_S(u), v \rangle, \forall w \in X \forall v \in V = \langle A_S(w), v \rangle = a_s(w, v) = \langle \nu_T (id - \pi_H) w, (id - \pi_H) v \rangle \quad (28)$$

令 $v = z_h \in V_h$ 满足 $\|z_h\|_1 \leq 1$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式及(16)式可得

$$\langle D_u A_S(u) \cdot w, z_h \rangle \leq C \|\nu_T\|_{0, \infty} H^2 \|w\|_1 \|z_h\|_1 \quad (29)$$

因此

$$\|D_u G_h(u(\lambda)) - D_u G(u(\lambda))\|_\epsilon \leq C \|\nu_T\|_{0, \infty} H^2 \quad (30)$$

又 $h \rightarrow 0$ 时, $H \rightarrow 0$ 且 $\nu_T \sim H^{-1}$, 由(22)式得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h (D_u G_h(u(\lambda)) - D_u G(u(\lambda)))\|_\epsilon = 0 \quad (31)$$

于是存在 $h_0 > 0$, 对所有的 $h \leq h_0$ 有 $\gamma(\lambda)\mu_h(\lambda) <$

1. 利用文献[22]可得本引理结论.

引理 3.13 对固定的 λ , 存在 u 的邻域记为 $S(u; \alpha) = \{v \in X; v - u\} \leq \alpha$ 以及与 h, λ 无关的常数 $C > 0$ 使得算子 $D_u F_h(\lambda, \cdot)$ 对所有 u 的邻域中的元素 v , 都有下述 Lipschitz 性质

$$\|D_u F_h(\lambda, u) - D_u F_h(\lambda, v)\|_\epsilon \leq C\lambda \|u - v\| \tag{32}$$

证明 利用定义

$$G_h(v) = G(v) + A_S(v) \quad v = (v, q) \in X \tag{33}$$

$$D_u F_h(\lambda, u) - D_u F_h(\lambda, v) = \lambda T_h(D_u G(u) - D_u G(v)) + \lambda T_h(D_u A_S(u) - D_u A_S(v)) \tag{34}$$

和 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\begin{aligned} \langle D_u G(u) - D_u G(v), v_h \rangle &= \int_\Omega (u - v) \cdot \nabla v_h + v_h \cdot \nabla (u - v) \leq \|u - v\|_0 |v_h|_1 + \|v_h\|_0 |u - v|_1 \leq \|u - v\|_1 \|v_h\|_1 \end{aligned} \tag{35}$$

再由式(22), 可得式右边第一项的估计:

$$\|\lambda T_h(D_u G(u) - D_u G(v))\|_\epsilon \leq \lambda C \|u - v\| \tag{36}$$

令 $v = z_h \in V_h$ 满足 $\|z_h\|_1 \leq 1$. 类似式(27), 有

$$\begin{aligned} \langle (D_u A_S(u) - D_u A_S(v)) \cdot w, z_h \rangle &= a(w, z_h) - a(w, z_h) = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

结合式(34), (36), (37)即得

$$\|D_u F_h(\lambda, u) - D_u F_h(\lambda, v)\|_\epsilon \leq C\lambda \|u - v\| \tag{38}$$

令

$$L_h(\lambda; \alpha) = \sup_{v \in S(u; \alpha)} \|D_u F_h(\lambda, u) - D_u F_h(\lambda, v)\|_\epsilon \tag{39}$$

再用上述结论易得: 对所有 $h \leq h_0$, 一致地有

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \{ \sup_{\lambda \in \Lambda} L_h(\lambda; \alpha) \} = 0 \tag{40}$$

引理 3.14 对固定的 λ , 令

$$\epsilon_h(\lambda) = \|F_h(\lambda, u)\|.$$

则有下列估计

$$\epsilon_h(\lambda) \leq \lambda C(h + \nu_T H^2) \tag{41}$$

证明

$$\begin{aligned} \|F_h(\lambda, u)\| &= \|F_h(\lambda, u) - F(\lambda, u)\| \leq \|\lambda(T - T_h)G(u)\| + \lambda \|T_h A_S(u)\| \end{aligned} \tag{42}$$

由式(24)可得

$$\lambda \|(T - T_h)G(u)\| \leq \lambda Ch \tag{43}$$

由式(22), 定理 2.1(ii), Cauchy-Schwarz 不等式及式(16), 有

$$\begin{aligned} \langle A_S(u), v \rangle = a_s(u, v) &\leq \nu_T H^2 \|u\|_2 \|v\|_0 \leq C\nu_T H^2 \|u\|_2 |v|_1 \end{aligned} \tag{44}$$

再由式(22)得

$$\lambda \|T_h A_S(u)\| \leq \lambda C\nu_T H^2 \|u\|_2 \tag{45}$$

联系式(42), 有式(43)和(45). 从而 $\epsilon_h(\lambda) \leq \lambda C(h + \nu_T H^2)$.

由上述引理易知

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \epsilon_h(\lambda) = 0 \tag{46}$$

3.4 离散问题的先验分析

有了上面的引理, 再用文献[22]中的定理, 我们有以下结果

定理 3.15 令 $\{(\lambda, u(\lambda)) \in \Lambda \times X\}$ 是的一支非奇解. 若式(46)和(41)都成立, 且 $\limsup_{h \rightarrow 0} \mu_h(\lambda) = 0$, 则存在 $\alpha > 0, h_1 > 0$ 和 $u_h \in C^0(\Lambda; X)$, 使得对所有 $h \leq h_1, \{(\lambda, u_h(\lambda)) \in \Lambda\}$ 是的一支非奇解, 对每个 $\lambda, u_h(\lambda)$ 是在球 $S(u(\lambda); \alpha)$ 中的唯一解, 且下述估计成立:

$$\|u(\lambda) - u_h(\lambda)\| \leq \lambda C(h + \nu_T H^2) \tag{47}$$

证明 首先由引理 3.12 的证明和 Λ 是紧集

可知 $\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \Lambda} \mu_h(\lambda) = 0$, 其次已经证得式(40)和(46). 于是, 根据文献 [22, p304, Theorem 3.2], 存在 $\alpha > 0, h_1 > 0$ 和 $u_h \in C^0(\Lambda; X)$ 使得对所有 $h \leq h_1, \{(\lambda, u_h(\lambda)) \in \Lambda\}$ 是的一支非奇解, 对每个 $\lambda, u_h(\lambda)$ 是在球 $S(u(\lambda); \alpha)$ 中的唯一解, 且有下述估计成立

$$\|u - u_h\| \leq 4\gamma(\lambda) F_h(\lambda, u) \tag{48}$$

因为 Λ 是紧集, 所以 $\gamma(\lambda) \leq C$. 再由 $\epsilon_h(\lambda) \leq \lambda C(h + \nu_T H^2)$ 可得

$$\|u(\lambda) - u_h(\lambda)\| \leq \lambda C(h + \nu_T H^2) \tag{49}$$

注 1 在实际应用中, 我们在同一网格上进行计算, 即 $H = h$. 参数 $\nu_T \sim H^{-1}$. 故最终有如下估计

$$\|u(\lambda) - u_h(\lambda)\| \leq \lambda Ch \tag{50}$$

4 数值实验

本节共有三个算例, 第一个验证了上一节给出的误差阶. 第二和第三个是两个标准测试, 用于说明本文的方法在更实际的物理计算中也适用. 所有数值实验都使用软件包 FreeFem++ [26].

4.1 收敛性

考虑 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, 取 $\nu = 10^{-20}$, f 是使得 $u = (u_1, u_2)$ 和 p 成为 Navier-Stoke 方程(1)的精确解的右端项, 其中 [14]

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= e^x \sin(y), u_2(x, y) = e^x \cos(y), \\ p(x, y) &= -\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} (e^2 - 1). \end{aligned}$$

在这一小节,我们对两种方法进行比较.第一种方法用等阶元计算有压力投影稳定项 $s_h(p_h, q_h)$, 但不加速度稳定项 $a_s(u_h, v_h)$. 第二种是既有压力稳定项又有速度稳定项. 比较两种方法的目的是证明加稳定项 $a_s(u_h, v_h)$ 是有效的, 且误差估计是正

确的.

第一种方法的数值结果由表 1 列出, 第二种方法由表 2 给出, 其中 $E_{L(u)} = \|u - u_h\|_0$, $E_{H(u)} = \|u - u_h\|_1$, $E_{L(p)} = \|p - p_h\|_0$. $r_{L(u)}$, $r_{H(u)}$, $r_{L(p)}$ 分别代表上述误差的收敛阶.

表 1 无速度稳定项的数值结果

Tab. 1 Numerical results without velocity stabilized

h^{-1}	$E_{L(u)}$	$E_{H(u)}$	$E_{L(p)}$	$r_{L(u)}$	$r_{H(u)}$	$r_{L(p)}$	cpu
4	1383.	1387.5	448.				0.064s
8	3816.	67082.	1308.	-1.46	-2.27	-1.54	0.15s
16	3749.8200	169480	3744.8100	0.0253229	-1.337100	-1.517030	0.59s
32	3855.8000	357602	402063	-0.040210	-1.077240	-6.746390	3.41s
64	139909	30995300	20262800	-5.181320	-6.437550	-8.977200	23.641s
128	139443	49544000	10157300	0.0048209	-0.676662	4.3182500	355. s

表 2 稳定化方法的数值结果

Tab. 2 The numerical resultsof stabilized method

h^{-1}	$E_{L(u)}$	$E_{H(u)}$	$E_{L(p)}$	$r_{L(u)}$	$r_{H(u)}$	$r_{L(p)}$	cpu
4	0.02804020000	0.40854400000	0.11335700000				0.044s
8	0.0073875300	0.21718300	0.03368370	1.92433	0.911584	1.75075	0.104s
16	0.00204570	0.11726600	0.00903828	1.8525	0.889124	1.89793	0.523s
32	0.000530093	0.05991430	0.00231428	1.94828	0.968811	1.96548	2.558s
64	0.000128726	0.0291198	0.000578973	2.04194	1.0409	1.999	8.954s
128	2.97616e-05	0.0135028	0.000144561	2.11278	1.10874	2.00181	38.38s

从表 1 可以看出,在不加速度稳定项的情况下,数值解极不稳定,出现严重的失真.表 2 显示数值解收敛于精确解,并且达到了所预期的收敛阶.此算例表明增加速度稳定项是有意义的.

4.2 稳态圆柱绕流问题

该问题是一个经典的标准测试,区域的设置见参考文献 [27]. 考虑流入边界条 $(1.2y(0.41 - y)/0.41^2, 0)^T$, 粘性系数 $\nu = 10^{-3}$, $f = 0$. 通过计算阻力系数 C_D , 升力系数 C_L , 绕柱压力差 Δp , 以及回流区域长度 L_r 并将它们与文献所计算出的结果作比较可评判一个数值方法的精确与否. 表 3 列出了计算结果并与文献[18,27,28]做了比较. 从表 3 中可看到,我们计算出的三个量近似文献[18,27,28]所计算的三个量. 图 1 画出了本文计算出的稳态绕柱流的速度场.

4.3 顶盖驱动方腔流

接下来,我们计算与高雷诺数(Reynolds number)有关的一个物理模型——顶盖驱动方腔流. 考虑 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $f = 0$, $\nu = \frac{1}{5000}$, $u = (u_1,$

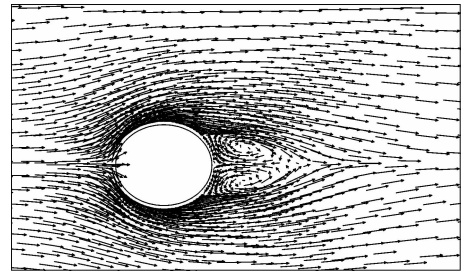


图 1 流场图
Fig. 1 Velocity field

表 3 稳定化方法的评估

Tab. 3 Assessment of stabilized method

	C_D	C_L	Δp	L_r
RELP ^[18]	5.54		0.1171	0.083
Schäfer and Turek ^[27]	5.58	0.011	0.1175	0.085
Medie and Mohammadi ^[28]	5.65	0.012	0.121	0.082
本文	5.59647	0.0107964	0.117276	0.00837021

u_2) 在顶部为 $(1, 0)$, 其余都为零. 关于该问题更具体的描述可参考文献[28]. 通过计算主涡流中心位置, 并与参考文献比较, 可判断对此问题的数值方法是否有效. 本文所计算的涡流中心位置与参考文献所计算的已由表 4 给出. 从表 4 中可看到我们的方法是有效的. 图 2 画出了本文所计算出的方腔流的流线.

表 4 主涡流中心位置

Tab. 4 Primary vortex center position

Re	本文	Ghia, Ghia, and Shin ^[29]	RELP ^[18]
5000	$x=0.515624$	$x=0.5117$	$x=0.5298$
	$y=0.536597$	$y=0.5352$	$y=0.5370$

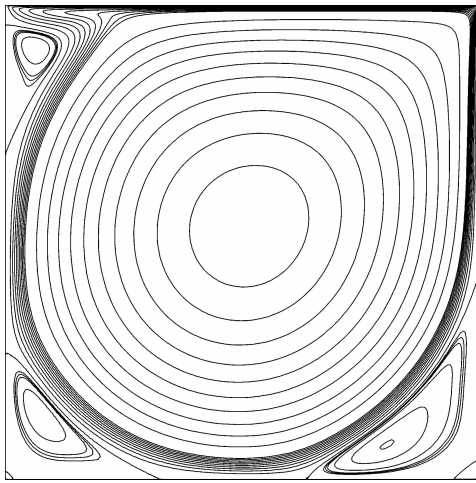


图 2 流线图

Fig. 2 Streamlines of method 1

5 结 论

我们对定常的 NS 方程提出了基于压力投影和速度投影的稳定化有限元方法. 通过压力投影, 我们的方法回避了等阶元不满足 inf-sup 条件的困难, 而速度投影使得我们的方法可以克服对流占优, 所增加的两个稳定项都是线性项, 且不涉及两层网格结构, 这给编程计算带来了极大的方便. 数值实验验证了我们所估计的误差阶, 并表明在更为复杂的标准测试中该方法也有很好地适应性.

参考文献:

[1] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Comput Method Appl M*, 1982, 32: 199.

[2] Becker R, Braack M. A finite element pressure gra-

dient stabilization for the Stokes equations based on local projections [J]. *Calcolo*, 2001, 38: 173.

[3] Bochev P B, Dohrmann C R, Gunzburger M D. Stabilization of low-order mixed finite elements for the Stokes equations [J]. *SIAM J Numer Anal*, 2006, 44: 82.

[4] Li J, He Y N, Chen Z X. A new stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations [J]. *Comput Method Appl M*, 2007, 197: 22.

[5] 覃艳梅. Navier-Stokes 方程最优控制问题的一种新型投影稳定化方法 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2016, 53: 5.

[6] 刘程熙, 孔花, 吴开腾. Darcy-Stokes 耦合问题的 $H(\text{div})$ 有限元逼近法 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2016, 53: 253.

[7] Johnson C, Nävert U, Pitkäranta J. Finite element methods for linear hyperbolic problems [J]. *Comput Method Appl M*, 1984, 45: 285.

[8] Johnson C, Saranen J. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations [J]. *Math Comput*, 1986, 47: 1.

[9] Hansbo P, Szepessy A. A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. *Comput Method Appl M*, 1990, 84: 175.

[10] Zhou T X, Feng M F. A least squares Petrov-Galerkin finite element method for the stationary Navier-Stokes equations [J]. *Math Comput*, 1993, 60: 531.

[11] Chen G, Feng M, Xie C. A new projection-based stabilized method for steady convection-dominated convection-diffusion equations [J]. *Appl Math Comput*, 2014, 239: 89.

[12] Hughes T J R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods [J]. *Comput Method Appl M*, 1995, 127: 387.

[13] Layton W. A connection between subgrid scale eddy viscosity and mixed methods [J]. *Appl Math Comput*, 2002, 133: 147.

[14] John V, Kaya S. Finite element error analysis of a variational multiscale method for the Navier-Stokes equations [J]. *Adv Comput Math*, 2008, 28: 43.

[15] Cao C, Li Q, Cao C, University S, et al. A stabilized nonconforming subgrid eddy viscosity method based on pressure projection for the unstationary

- transient Navier-Stokes equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed(四川大学学报:自然科学版), 2013, 50: 1149.
- [16] Bai L, Liu C X, Tang J B. A non-conforming finite element method of subgrid eddy viscosity model for the stationary incompressible Navier-Stokes equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed(四川大学学报:自然科学版), 2012, 49: 46.
- [17] Matthies G, Skrzypacz P, Tobiska L. A unified convergence analysis for local projection stabilisations applied to the Oseen problem [J]. ESAIM: M2AN, 2007, 41: 713.
- [18] Araya R, Barrenechea G R, Poza A H, *et al.* Convergence analysis of a residual local projection finite element method for the Navier-Stokes equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2012, 50: 669.
- [19] Barrenechea G R, Valentin F. A residual local projection method for the Oseen equation [J]. Comput Method Appl M, 2010, 199: 1906.
- [20] Pan X Q, *et al.* Continuous interior penalty finite element method for steady-state natural convection problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed(四川大学学报:自然科学版), 2014, 51: 1100.
- [21] Bai Y H, Superconvergence analysis for hybrid stress finite element and finite volume methods for linear elasticity problems and a new type of stabilized finite element method for Oseen equations [D]. Chengdu: Sichuan University, 2015.
- [22] Girault V, Raviart P A. Finite element methods for Navier-Stokes equations, theory and algorithms [M]. New York: Springer-Verlag, 1986.
- [23] Bernardi C, Chacón Rebollo T, Gómez Mármol M M. Error analysis of a subgrid eddy viscosity multi-scale discretization of the Navier-Stokes equations [J]. SEMA J, 2012, 60: 51.
- [24] Ern A, Guermond J L. Theory and practice of finite elements [M]. New York: Springer, 2004.
- [25] 张恭庆. 变分学讲义 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [26] Hecht F. New development in FreeFem++ [J]. J Numer Math, 2012, 20: 251.
- [27] Schäfer M, Turek S, Durst F, *et al.* Benchmark computations of laminar flow around a cylinder [J]. Vieweg+ Teubner Verlag, 1996: 547.
- [28] Medi G, Mohammadi B. NSIKE—An incompressible Navier-Stokes solver for unstructured meshes [R]. Paris: RR-3644, INRIA, 1999.
- [29] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method [J]. J Comput Phys, 1982, 48: 387.