doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.04.004

求解广义 improved KdV 方程的守恒差分算法

郑茂波，谭宁波
(成都工业学院，成都 611730)

摘　要：本文对广义 improved KdV 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个两层非线性有限差分格式，该格式合理地模拟了方程本身具有的两个守恒律. 然后，本文讨论了差分解的存在唯一性，并在其差分解的先验估计基础上利用能量方法分析了该格式的二阶收敛性与稳定性. 数值算例表明本文的格式是可行的.

关键词：广义 improved KdV 方程；差分格式；守恒性；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)04-0688-05

Conservative difference scheme for general improved KdV equation

ZHENG Mao-Bo, *TAN Ning-Bo*
(Chengdu Technological University, Chengdu, 611730)

Abstract: In this paper, a conservative difference scheme for an initial-boundary value problem of the general improved KdV equation is proposed. This scheme simulates the two conservation properties of the problem well. Existence and uniqueness of numerical solutions are derived. By the method of discrete energy, second order convergence and stability are discussed. Numerical examples show the availability of scheme.

Keywords: General improved KdV equation; Finite difference scheme; Conservation properties; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

本文考虑如下一类广义 improved KdV 方程的初边值问题：

$$u_t+\varepsilon u^p u_x+\gamma u_{xxx}-\sigma u_{xxt}=0,\quad (x,t)\in[x_L,x_R]\times[0,T] \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in[x_L,x_R] \tag{2}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,\quad u_x(x_L,t)=u_x(x_R,t)=0,t\in[0,T] \tag{3}$$

其中 $\varepsilon,\gamma,\sigma>0$ 是确定的常数，$p\geqslant 1$ 是正整数，$u_0(x)$ 是一个已知的光滑函数. 不难验证，问题(1)～(3)满足如下守恒律[1]：

$$Q(t)=\int_{x_L}^{x_R}u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{x_L}^{x_R}u_0(x)\mathrm{d}x=Q(0) \tag{4}$$

$$E(t)=\|u\|_{L_2}^2+\sigma\|u_x\|_{L_2}^2=\|u_0\|_{L_2}^2+\sigma\|(u_0)_x\|_{L_2}^2=E(0) \tag{5}$$

其中 $Q(0)$ 和 $E(0)$ 均为仅与初始条件有关的常数.

广义 improved KdV 方程(1)是 Abdulloev 等人在研究非线性波动方程时在文献[1]中首先提出来的. 当 $\gamma=0$ 时，方程(1)即为广义 EW 方程[2-4]；当 $\sigma=0$ 时，方程(1)即为广义 KdV 方程[5,6]，这些方程在许多工程物理领域(如流体力学、等离子物

收稿日期：2016-08-31
基金项目：四川省教育厅基金(14ZB0293,17ZB0026)
作者简介：郑茂波(1984－)，男，四川营山人，讲师，主要研究方向为微分方程数值解法. E-mail：zmb1984@126.com.

理学等)都有着广泛的应用,因而备受关注[1-6]. 由于这些方程都少有解析解,所以研究其数值解就很有理论价值和应用价值. Li 和 Vu-Quoc 在文献[7]中指出:"一定程度上,保持原问题守恒量的能力是评价一个数值方法优劣的标准."大量的数值试验[8-15]表明,守恒的差分格式可以较好地拟合问题本身所具有的守恒律,而且避免非守恒差分格式的非线性"爆炸",所以构造守恒的差分格式始终是一件非常有意义的工作.

文献[16,17]分别对问题(1)~(3)提出了具有二阶精度的两层非线性守恒差分格式和三层线性守恒差分格式,而且线性差分格式在数值求解时不需要迭代,计算耗时比较少. 但这两个格式都仅能模拟守恒律(5),而不能模拟守恒律(4). 本文在保持二阶理论精度的前提下,对初边值问题(1)~(3)提出了一个新的守恒差分格式,新格式很好的模拟了原问题的两个守恒律(4)和(5). 然后本文讨论了其差分解的先验估计、存在唯一性,分析了格式的二阶收敛性和无条件稳定性,最后进行了数值验证.

2　差分格式和守恒律

将区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$进行剖分. 令 $x_j=x_L+jh,0\leqslant j\leqslant J,h=\dfrac{x_R-x_L}{J}$为空间步长;$t_n=n\tau,0\leqslant n\leqslant N,\tau$ 为时间步长,且 $N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right]$. 记 $u_j^n\approx u(x_j,t_n),Z_h^0=\{u=(u_j)\,|\,u_0=u_J=0,j=0,1,2,\cdots,J\}$. 在本文中,规定 C 为一般正常数,即 C 在不同的地方有不同的取值,并定义如下记号:

$$(u_j^n)_x=\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h},(u_j^n)_{\bar{x}}=\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h},$$

$$(u_j^n)_{\hat{x}}=\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h},(u_j^n)_t=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau},$$

$$u_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{u_j^{n+1}+u_j^n}{2},\langle u^n,v^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^nv_j^n,$$

$$\|u^n\|^2=\langle u^n,u^n\rangle,\ \|u^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|u_j^n|.$$

对问题(1)~(3),考虑如下有限差分格式:

$$(u_j^n)_t+\frac{2\varepsilon}{(p+1)(p+2)}\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^i[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p+1-i}]_{\hat{x}}+\gamma(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}}-\sigma(u_j^n)_{x\bar{x}t}=0 \tag{6}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),\ 0\leqslant j\leqslant J \tag{7}$$

$$u_0^n=u_J^n=0,\ (u_0^n)_x=(u_J^n)_{\bar{x}}=0,0\leqslant n\leqslant N \tag{8}$$

差分格式(6)~(8)式对守恒量(4)式和(5)式的数值模拟如下:

定理 2.1　差分格式(6)~(8)式关于以下离散能量是守恒的,即

$$Q^n=h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^n=Q^{n-1}=\cdots=Q^0 \tag{9}$$

$$E^n=\|u^n\|^2+\sigma\|u_x^n\|^2=E^{n-1}=\cdots=E^0 \tag{10}$$

证明　将(6)式两端乘以 h 然后对 j 从 1 到 $J-1$ 求和,由边界条件式(8)和分部求和公式[16],整理可得 $h\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n)_t=0$. 由 Q^n 的定义,将上式递推可得(9)式.

将(6)式与 $2u^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积,有

$$\frac{1}{\tau}(\|u^{n+1}\|^2-\|u^n\|^2)+\frac{\sigma}{\tau}(\|u_x^{n+1}\|^2-\|u_x^n\|^2)+2\gamma\langle(u^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}},u^{n+\frac{1}{2}}\rangle+2\varepsilon\langle P,u^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0 \tag{11}$$

其中

$$P_j=\frac{2}{(p+1)(p+2)}\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^i[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p+1-i}]_{\hat{x}}.$$

又

$$\langle(u^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}},u^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\langle P,u^{n+\frac{1}{2}}\rangle&=\frac{2h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\{\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^i\cdot[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p+1-i}]_{\hat{x}}\}u_j^{n+\frac{1}{2}}=\\&\frac{2h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\{\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-i}\cdot[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{i+1}]_{\hat{x}}\}u_j^{n+\frac{1}{2}}=\\&\frac{2h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p+1-i}\cdot[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{i+1}]_{\hat{x}}=\\&\frac{-2h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{i=0}^{p}[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p+1-i}]_{\hat{x}}\cdot(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{i+1}=\\&\frac{2h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\{\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^i\cdot[(u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p+1-i}]_{\hat{x}}\}u_j^{n+\frac{1}{2}}=-\langle P,u^{n+\frac{1}{2}}\rangle\end{aligned} \tag{13}$$

即$\langle P,u^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0$,于是(11)式即为

$$(\|u^{n+1}\|^2-\|u^n\|^2)+\sigma(\|u_x^{n+1}\|^2-\|u_x^n\|^2)=0.$$

由 E^n 的定义,对上式递推可得(10)式. 证毕.

3 差分格式的可解性

引理 3.1(Brouwer 不动点定理[19]) 设 H 是有限维内积空间，$g:H\to H$ 是连续算子且存在 $\alpha>0$ 使得 $\forall x\in H$，$\|x\|=\alpha$ 有 $\langle g(x),x\rangle>0$. 则存在 $x^*\in H$，使得 $g(x^*)=0$ 且 $\|x^*\|\leqslant\alpha$.

定理 3.2 存在 $u^n\in Z_h^0$ 满足差分格式(6)~(8)式.

证明 用数学归纳法. 设当 $n\leqslant N-1$ 时，存在 $u^0,u^1,\cdots,u^n\in Z_h^0$ 满足差分格式(6)~(8)式. 下面证明存在 u^{n+1}满足差分格式(6)~(8)式.

定义 Z_h^0 上的算子 g，满足

$$g(v)=2v-2u^n-2\sigma v_{x\bar{x}}+2\sigma u^n_{x\bar{x}}+\gamma\tau v_{\hat{x}x\bar{x}}+\frac{2\varepsilon\tau}{(p+1)(p+2)}\sum_{i=0}^{p}(v^{n+\frac12})^i[(v^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}} \tag{14}$$

将(14)式与 v 作内积，并注意到类似于(12)式和(13)式，有 $\langle v_{\hat{x}x\bar{x}},v\rangle=0$ 和

$$\langle\sum_{i=0}^{p}(v^{n+\frac12})^i[(v^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}},v\rangle=0,$$

于是

$$\begin{aligned}\langle g(v),v\rangle=&2\|v\|^2-2\langle u^n,v\rangle+\\&2\sigma\|v_x\|^2-2\sigma\langle u^n_x,v_x\rangle\geqslant\\&2\|v\|^2-2\|u^n\|\cdot\|v\|+\\&2\sigma\|v_x\|^2-2\sigma\|u^n_x\|\cdot\|v_x\|\geqslant\\&2\|v\|^2-(\|u^n\|^2+\|v\|^2)+\\&2\sigma\|v_x\|^2-\sigma(\|u^n_x\|^2+\|v_x\|^2)\geqslant\\&\|v\|^2-(\|u^n\|^2+\sigma\|u^n_x\|^2)+\\&\sigma\|v_x\|^2\geqslant\|v\|^2-(\|u^n\|^2+\sigma\|u^n_x\|^2).\end{aligned}$$

由此可见，$\forall v\in Z_h^0$，当 $\|v\|^2=\|u^n\|^2+\sigma\|u^n_x\|^2+1$ 时，有 $\langle g(v),v\rangle>0$ 成立. 由引理 3.1 可知，存在 $v^*\in Z_h^0$ 使得 $g(v^*)=0$. 取 $u^{n+1}=2v^*-u^n$ 那么 u^{n+1}即为差分方程(6)式的解. 证毕.

4 差分格式的收敛性与稳定性及其解的唯一性

令问题(1)~(3)式的解为 $v(x,t)$，记 $v_j^n=u(x_j,t_n)$. 则差分格式(6)~(8)式的截断误差为

$$r_j^n=(v_j^n)_t+\frac{2\varepsilon}{(p+1)(p+2)}\sum_{i=0}^{p}(v_j^{n+\frac12})^i[(v_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}+\gamma(v_j^{n+\frac12})_{\hat{x}x\bar{x}}-\sigma(v_j^n)_{x\bar{x}t} \tag{15}$$

由 Taylor 展开可知，当 $h,\tau\to0$ 时，$|r_j^n|=O(\tau^2+h^2)$.

引理 4.1 设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则初边值问题(1)~(3)式的解满足

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u\|_{L_\infty}\leqslant C.$$

证明 由(5)式有 $\|u\|_{L_2}\leqslant C$，$\|u_x\|_{L_2}\leqslant C$. 再由 Sobolev 不等式有 $\|u\|_{L_\infty}\leqslant C$. 证毕.

引理 4.2 设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(6)~(8)式的解满足

$$\|u^n\|\leqslant C,\ \|u^n_x\|\leqslant C,\ \|u^n\|_\infty\leqslant C,$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$.

证明 由定理 2.1 得 $\|u^n\|\leqslant C$，$\|u^n_x\|\leqslant C$. 再由离散的 Sobolev 不等式[16]有 $\|u^n\|_\infty\leqslant C$. 证毕.

定理 4.3 设 $u_0\in H_0^1[x_L,x_R]$. 则差分格式(6)~(8)式的解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$收敛到初边值问题(1)~(3)的解，且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

证明 将(15)式减去(6)式，并记 $e_j^n=v_j^n-u_j^n$，得

$$r_j^n=(e_j^n)_t-\sigma(e_j^n)_{x\bar{x}t}+\gamma(e_j^{n+\frac12})_{\hat{x}x\bar{x}}+R_j \tag{16}$$

其中

$$R_j=\frac{2\varepsilon}{(p+1)(p+2)}\sum_{i=0}^{p}(v_j^{n+\frac12})^i[(v_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}-\frac{2\varepsilon}{(p+1)(p+2)}\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac12})^i[(u_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}.$$

将(16)式两端与 $2e^{n+\frac12}$ 作内积，整理得

$$\begin{aligned}&(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+\sigma(\|e^{n+1}_x\|^2-\|e^n_x\|^2)=\\&\tau\langle r^n,2e^{n+\frac12}\rangle-2\gamma\tau\langle e^{n+\frac12}_{\hat{x}x\bar{x}},e^{n+\frac12}\rangle-\tau\langle R,2e^{n+\frac12}\rangle\end{aligned} \tag{17}$$

类似于(12)式，有

$$\langle e^{n+\frac12}_{\hat{x}x\bar{x}},e^{n+\frac12}\rangle=0 \tag{18}$$

由引理 4.1 和引理 4.2，有

$$|v_j^{n+\frac12}|\leqslant C,\ |u_j^{n+\frac12}|\leqslant C,\ j=0,1,2,\cdots,J.$$

于是，由 Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}-\langle R,2e^{n+\frac12}\rangle=&\\&\frac{-4\varepsilon h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\{\sum_{i=0}^{p}(v_j^{n+\frac12})^i[(v_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}-\\&\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac12})^i[(u_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}\}e_j^{n+\frac12}=\\&\frac{-4\varepsilon h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\{\sum_{i=0}^{p}[e_j^{n+\frac12}\sum_{k=0}^{i-1}(v_j^{n+\frac12})^k\\&(u_j^{n+\frac12})^{i-1-k}][(v_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}+\\&\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac12})^i[(v_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}-\\&\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac12})^i[(u_j^{n+\frac12})^{p+1-i}]_{\hat{x}}\}e_j^{n+\frac12}=\end{aligned}$$

$$\frac{-4\varepsilon h}{(p+1)(p+2)}\sum_{j=1}^{J-1}\Big\{\sum_{i=0}^{p}\Big[e_j^{n+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{i-1}(v_j^{n+\frac{1}{2}})^k (u_j^{n+\frac{1}{2}})^{i-1-k}\Big]\Big[(v_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}\sum_{k=0}^{p-i}(v_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^k (v_{j-1}^{n+\frac{1}{2}})^{p-i-k}\Big]+\sum_{i=0}^{p}(u_j^{n+\frac{1}{2}})^i\Big[(e_j^{n+\frac{1}{2}})\sum_{k=0}^{p-i}(v_j^{n+\frac{1}{2}})^k (u_j^{n+\frac{1}{2}})^{p-i-k}\Big]_{\hat{x}}\Big\}e_j^{n+\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$Ch\sum_{j=1}^{J}\Big[\big|e_j^{n+\frac{1}{2}}\big|+\big|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}\big|\Big]\big|e_j^{n+\frac{1}{2}}\big|\leqslant C\big[\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2\,\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\big] \tag{19}$$

$$\langle r^n,2e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\langle r^n,e^{n+1}+e^n\rangle\leqslant \|r^n\|^2+\frac{1}{2}\big[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2\big] \tag{20}$$

将(18)～(20)式代入(17)式，整理得

$$(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+\sigma(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)\leqslant C\tau\big[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2\big]+\tau\|r^n\|^2 \tag{21}$$

令 $B^n=\|e^n\|^2+\sigma\|e_x^n\|^2$. 则(21)式即为

$$B^{n+1}-B^n\leqslant\tau\|r^n\|^2+C\tau(B^{n+1}+B^n).$$

只要取足够小的 τ，满足 $1-C\tau>0$，就有

$$B^{n+1}-B^n\leqslant C\tau B^n+C\tau\|r^n\|^2 \tag{22}$$

对(22)式从 0 到 $n-1$ 求和得：

$$B^n\leqslant B^0+C\tau\sum_{l=0}^{n-1}\|r^l\|^2+C\tau\sum_{l=0}^{n-1}B^l.$$

又

$$\tau\sum_{l=0}^{n-1}\|r^l\|^2\leqslant n\tau\max_{0\leqslant l\leqslant n-1}\|r^l\|^2\leqslant T\cdot O(\tau^2+h^2)^2,$$

$$B^0=O(\tau^2+h^2)^2,$$

于是

$$B^n\leqslant O(\tau^2+h^2)^2+C\tau\sum_{l=0}^{n-1}B^l.$$

由离散的 Gronwall 不等式[18]，$B^n\leqslant O(\tau^2+h^2)^2$，即

$$\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),\ \|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2).$$

再由离散的 Sobolev 不等式[18]

$$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2).$$

与定理 4.3 类似，可以证明：

定理 4.4 在定理 4.1 的条件下，差分格式(6)～(8)式的解 u^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 稳定.

定理 4.5 差分格式(6)～(8)式的解是唯一的.

5 数值试验

当参数 $\varepsilon=\gamma=\sigma=1$ 时，方程(1)式的孤波解[6]为($v>0$ 是速度)：

$$u(x,t)=\sqrt[p]{\frac{(2+3p+p^2)v}{2}}\cdot \operatorname{sech}^{\frac{2}{p}}\left[\frac{\sqrt{v}\,p}{2\sqrt{1+v}}(x-vt)\right].$$

由此可以看出，当 $-x_L\geqslant 0$，$x_R\geqslant 0$ 时，初边值问题(1)～(3)式与广义 improved KdV 方程(1)式的 Cauchy 问题是一致的.

在数值试验中，取初值函数为

$$u_0(x)=\sqrt[p]{\frac{2+3p+p^2}{2}}\cdot\operatorname{sech}^{\frac{2}{p}}\left(\frac{p}{2\sqrt{2}}x\right),$$

固定 $x_L=-20$，$x_R=60$，$T=20$. 对问题(1)～(3)式考虑 $p=2$ 和 $p=4$ 两种情形进行数值实验. 就 τ 和 h 的不同取值时数值解和孤波解在几个不同时刻的 l_∞ 误差见表 1，对守恒量的模拟结果见表 2 和表 3.

表 1　数值解在不同时刻的 l_∞ 误差

Tab. 1　l_∞ error of the numerical at several different times

	$p=2$			$p=4$		
	$\tau=h=0.2$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.2$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$
$t=5$	3.56506e-2	9.01926e-3	2.26144e-3	1.24324e-1	3.25904e-2	8.23841e-3
$t=10$	6.89218e-2	1.74461e-2	4.37432e-3	2.44721e-1	6.44693e-2	1.63189e-2
$t=15$	1.02104e-1	2.58634e-2	6.48583e-3	3.64762e-1	9.63067e-2	2.44230e-2
$t=20$	1.35198e-1	3.42816e-2	8.59738e-3	4.79420e-1	1.28318e-1	3.25284e-2

表 2　格式对守恒量(4)和(5)的数值模拟($p=2$)

Tab. 2　Numerical simulation of conservation properties (4) and (5) ($p=2$)

	$\tau=h=0.2$		$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.05$	
	Q^n	E^n	Q^n	E^n	Q^n	E^n
$t=5$	10.8827953079	19.7924040991	10.8827952513	19.7973408267	10.8827952291	19.7985774486
$t=10$	10.8827934764	19.7924040991	10.8827952396	19.7973408267	10.8827956188	19.7985774486
$t=15$	10.8824364707	19.7924040991	10.8826837464	19.7973408267	10.8827655043	19.7985774486
$t=20$	10.8844067370	19.7924040991	10.8830685384	19.7973408267	10.8828544335	19.7985774486

表3 格式对守恒量(4)和(5)的数值模拟($p=4$)

Tab. 3 Numerical simulation of conservation properties (4) and (5) ($p=4$)

	$\tau=h=0.2$		$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.05$	
	Q^n	E^n	Q^n	E^n	Q^n	E^n
$t=5$	7.29759912206	10.7447003470	7.29759909644	10.7520459186	7.29759908554	10.7538913260
$t=10$	7.29759972803	10.7447003470	7.29759957690	10.7520459186	7.29759943307	10.7538913260
$t=15$	7.29710866546	10.7447003470	7.29744926646	10.7520459186	7.29755886814	10.7538913260
$t=20$	7.30044507224	10.7447003470	7.29762700716	10.7520459186	7.29765403121	10.7538913260

由数值结果可以看出,本文的格式明显具有二阶精度,而且很好地模拟了问题的两个守恒量,是可行的.

参考文献:

[1] Abdulloev K O, Bogolubsky I L, Makhankov V G. One more example of inelastic soliton interaction [J]. Phys Lett A, 1976, 56 : 427.

[2] Ramos J I. Explicit finite difference methods for the EW and RLW equations [J]. Appl Math Comput 2006, 179: 622.

[3] Zaki S I. A least-squares finite element scheme for the EW equation [J]. Comput Methods Appl M, 2000, 189: 587.

[4] Zaki S I. Solitary waves induced by the boundary forced EW equation [J]. Comput Methods Appl M, 2001, 190: 4881.

[5] Korteweg D J, Devries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves [J]. Philos Mag, 1885, 39: 422.

[6] Ali A H A, Soliman A A, Raslan K R. Soliton solution for nonlinear partial differential equations by cosine-function method [J]. Phys Lett A, 2007, 368: 299.

[7] Li S, Vu-Quoc L. Finite difference calculus invariant structure of a class of algorithms for the nonlinear Klein-Gordon equation [J]. SIAM J Numer Anal, 1995, 32: 1839.

[8] Wang T, Zhang L, Chen F. Conservative schemes for the symmetric regularized long wave equations [J]. Appl Math Comput, 2007, 190: 1063.

[9] Chang Q S, Xu L B. A Numerical method for a system of generalized nonlinear Schrödinger equations [J]. J Comput Math, 1986, 4: 191.

[10] Chang Q, Wang G., Guo B. Conservative scheme for a model for nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary notion [J]. J Comput Phys, 1991, 93: 360.

[11] Zhang L, A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation [J], Appl Math Comput, 2005, 168: 962.

[12] 王廷春,张鲁明. 求解广义正则长波方程的守恒差分格式[J]. 应用数学学报, 2006, 29: 1091.

[13] 郑茂波, 胡劲松, 胡兵. 正则长波方程的一个新的差分逼近 [J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2011, 34: 305.

[14] 赵红伟,胡兵,郑茂波, General Improved KdV 方程的三层加权平均线性差分格式[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2017, 54: 12.

[15] 王婷婷, 卓茹, 黄妗彤, 等. 广义 Roseau-RLW 方程的一个守恒差分逼近[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2017, 54: 268.

[16] 张天德,左进明,段伶计. 广义 improved KdV 方程的守恒差分格式[J]. 山东大学学报:理学版, 2011, 46: 4 .

[17] 左进明,张耀明. 广义 improved KdV 方程的守恒线性隐式差分格式[J]. 山东大学学报:理学版, 2011, 46: 19 .

[18] 柏琰,张鲁明. 对称正则长波方程的一个守恒差分格式[J]. 应用数学学报, 2007, 30: 248.

[19] Browder F E. Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems [J]. Proc Symp Appl Math, 1965, 17: 24.

[20] 张曦,胡兵,胡劲松. Rosenau-RLW 方程的加权守恒差分格式[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 1.