doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.009

随机仿射变分不等式的改进期望加权残差法

张莎莎[1]，寇喜鹏[2]

(1. 重庆大学数学与统计学院，重庆 401331；2. 重庆科技学院，重庆 401331)

摘　要：本文在绝对值残差和加权期望残差方法的基础上针对带有非线性扰动的随机仿射变分不等式问题考虑了期望和方差的凸组合形式，得到了改进的期望加权残差极小化问题. 通过拟蒙特卡洛方法，本文得到问题的离散近似问题，并研究了问题目标函数的可微性及其水平集的有界性，然后对问题进行了收敛性分析.

关键词：随机变分不等式；加权期望残差；收敛性；拟蒙特卡洛方法

中图分类号：O221.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0482-05

Improved method of weighted expected residual for solving stochastic variational inequality problems

ZHANG Sha-Sha[1], *KOU Xi-Peng*[2]

(1. College of Mathematics and Statistic, Chongqing University, Chongqing 401331, China;
2. Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper is concerned about constructing a new deterministic model for the stochastic affine variational inequality problems with nonlinear perturbation based on the least absolute deviation method and weighted expected residual minimization method. By means of quasi-Monte Carlo method, we obtain a discrete approximation of the problem. Some properties of the problem are studied under suitable conditions. The convergence of optimal solutions and stationary points of the approximation problem are also analyzed.

Keywords: Stochastic variational inequality; Weighted expected residual; Convergence; Quasi-Monte Carlo method

(2010 MSC 70G75)

1　引　言

记 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维的欧几里得空间. 传统的变分不等式记为 $VI(f,S)$，即，找到适当的 $x' \in S$ 满足

$$(x-x')^T f(x') \geqslant 0, \forall x \in S,$$

其中 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集，$f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. 针对问题 $VI(f,S)$，Fukushima 定义了一个正则间隙函数[1,2].

$$g(x) := \max_{y \in S} \left\{ (x-y)^T f(x) - \frac{\alpha}{2} \| x-y \|_G^2 \right\},$$

其中 $\alpha > 0$ 是常数，G 是一个 $n \times n$ 的对称正定矩阵. 对 $x \in \mathbf{R}^n$，$\| x \|_G$ 表示 x 的 G- 范数，其定义是 $\| x \|_G = \sqrt{x^T G x}$. 根据函数 $g(x)$ 的性质[3]可知，求解 $VI(f,S)$ 等价于求解问题：

$$\min_{x \in S} g(x).$$

近年来，顺应解决实际问题的需求，随机变分不等式的分析越来越受到人们的关注[4-8]. 随机变

收稿日期：2016-09-13
基金项目：国家自然科学基金(11601437)
作者简介：张莎莎(1992－)女，河南商丘人，硕士研究生，主要研究方向为随机优化理论. Email：zhangss@cqu.edu.cn

分不等式的定义是找到 $\tilde{x}\in S$ 满足

$$(x-\tilde{x})^T F(\tilde{x},\omega)\geqslant 0,\ x\in S\omega\in\Omega,\ \text{a.s.},\tag{1}$$

其中 $F:\mathbf{R}^n\times\Omega\to\mathbf{R}^n$，$\Omega\subseteq\mathbf{R}^m$ 是定义的样本空间，a.s. 表示在给定的概率测度下的几乎真的缩写.

问题(1)的正则间隙函数定义如下：

$$g:\mathbf{R}^n\times\Omega\to[0,\infty),$$

$$g(x,\omega):=\max_{y\in S}\left\{(x-y)^T F(x,\omega)-\frac{\alpha}{2}\|x-y\|_G^2\right\}\tag{2}$$

根据文献[9]中的定理 10.2.3(a)可知，对任意的 $x\in S$ 以及 $\omega\in\Omega$ 都有

$$g(x,\omega)=(x-H(x,\omega))^T F(x,\omega)-\frac{\alpha}{2}\|x-H(x,\omega)\|_G^2\tag{3}$$

其中 $H(x,\omega):=P_{S,G}(x-\alpha^{-1}G^{-1}F(x,\omega))$. 在本文中我们假定对于任意的 $x\in S$，$g(x,\cdot)$ 在 Ω 上是可积的，且 $n\times n$ 的对称正定矩阵 G 已给出. 此外，由 $\|x\|_G$ 的定义有 $\sqrt{\lambda_{\min}}\|x\|\leqslant\|x\|_G\leqslant\sqrt{\lambda_{\max}}\|x\|$ 成立，其中 $\lambda_{\min}$ 和 $\lambda_{\max}$ 分别指的是矩阵 G 的最小特征值和最大特征值.

在本文中，我们考虑如下带有非线性扰动的随机仿射变分不等式问题，也即找到 $\tilde{x}\in S$ 满足：

$$(x-\tilde{x})^T(M(\omega)\tilde{x}+q(\omega)+Q(\tilde{x},\omega))\geqslant 0,\quad x\in S,\omega\in\Omega\text{a.s.},\tag{4}$$

其中 $Q:\mathbf{R}^n\times\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是非线性函数，$M(\omega):=(m(\omega)_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$q(\omega):=(q(\omega)_i)\in\mathbf{R}^n$.

为方便表示，我们令 $F(x,\omega)=M(\omega)x+q(\omega)+Q(x,\omega)$ 并假定 $M(\omega)$ 和 $q(\omega)$ 满足下面的条件：

(A_1) $E[(\|M(\omega)\|+\|q(\omega)\|)^3]<+\infty$；

(A_2) $\overline{M}:=E[M(\omega)]$ 是正定的，

其中 $E[\cdot]$ 表示关于随机变量 $\omega\in\Omega$ 的数学期望，$\|M\|=(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$，$\|q\|=(\sum_{i=1}^n q_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

假定 $Q(x,\omega)$ 满足以下条件：

(Q_1) 对某个 $x\in S$ 有 $E[\|Q(x,\omega)\|^3]<+\infty$；

(Q_2) 对某个 $x\in S$ 有 $E[\|\nabla_x Q(x,\omega)\|^2]<+\infty$；

(Q_3) 对所有的 $\omega\in\Omega$ 以及 $x,y\in S$ 有 $\|Q(x,\omega)-Q(y,\omega)\|\leqslant L_1(\omega)\|x-y\|$，且有 $E[L_1^3(\omega)]=L_1^3<\infty$；

(Q_4) 对所有的 $\omega\in\Omega$ 以及 $x,y\in S$ 有 $\|\nabla_x Q(x,\omega)-\nabla_x Q(y,\omega)\|\leqslant L_2(\omega)\|x-y\|$，而且有 $E[L_2^2(\omega)]=L_2^2<\infty$；

(Q_5) 对所有的 $\omega\in\Omega$ 以及 $x,y\in S$ 有 $(x-y)^T(Q(x,\omega)-Q(y,\omega))\geqslant 0$.

在实际问题中，考虑到样本空间的样本量常常比较大，式(4)一般无解. 所以，为了得到一个相对合理的解，文献[10,11]提出了绝对值残差问题，文献[12]提出了加权期望残差问题，并分别进行了研究. 在以上方法的基础上，我们提出如下改进的加权期望残差极小化的确定性问题：即对于 $\tau\in(0,1]$.

$$\begin{aligned}\min_{x\in S}\theta(x):=&\\ &\tau E[g(x,\omega)]+(1-\tau)D[g(x,\omega)]=\\ &\tau E[g(x,\omega)]+(1-\tau)E[g^2(x,\omega)]-\\ &(1-\tau)(E[g(x,\omega)])^2=\\ &\int_\Omega(\tau g(x,\omega)+(1-\tau)g^2(x,\omega))\rho(\omega)\mathrm{d}\omega-\\ &(1-\tau)\left(\int_\Omega g(x,\omega)\rho(\omega)\mathrm{d}\omega\right)^2\end{aligned}\tag{5}$$

显然，此时的 $\theta(x)$ 表示的是 $g(x,\omega)$ 期望和方差的凸组合. 利用凸组合的形式能够在保证波动尽可能小也即是风险尽可能小的同时得到合理的极小解.

注 1　若 $\tau=0$，则 $\theta(x)=D[g(x,\omega)]$. 此时 $\min_{x\in S}\theta(x)$ 只能表示问题整体波动程度的最小，并不能得到变分不等式合理的解，故 $\tau\neq 0$. 若 $\tau=1$，问题则退化为文献[11]中的(1.3).

由文献[12]中的例子可知其提出的加权期望残差方法比文献[10,11]中提出的绝对值残差方法更加稳定有效. 考虑到恒有

$$\begin{aligned}&\tau E[g(x,\omega)]+(1-\tau)E[g^2(x,\omega)]-\\ &(1-\tau)(E[g(x,\omega)])^2\leqslant\\ &\tau E[g(x,\omega)]+(1-\tau)E[g^2(x,\omega)]\end{aligned}\tag{6}$$

本文所提出的改进期望加权残差方法比加权期望残差方法和绝对值残差方法更好.

2　预备知识

根据文献[9]中的定理 2.3.3 可知，$VI(E[F(x,\omega),S])$ 有唯一解，不妨设其为 x^*，则有

$$(x-x^*)^T E[F(x^*,\omega)]\geqslant 0\ \forall x\in S\tag{7}$$

利用拟蒙特卡洛方法对于积分的计算[13]，对于每个 k 我们可以定义

$$\theta^k(x):=\frac{\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x,\omega^i)\rho(\omega^i)+$$

$$\frac{1-\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g^2(x,\omega^i)\rho(\omega^i)-\frac{1-\tau}{N_k^2}\Big[\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x,\omega^i)\rho(\omega^i)\Big]^2 \tag{8}$$

其中 $\Omega_k:=\{\omega^i,i=1,2,\ldots,N_k\}$，$\Omega_k\subset\Omega$ 而且当 $k\to\infty$ 时，有 $N_k\to\infty$.

本文中，我们主要研究(5)式的近似问题，即

$$\min\ \theta^k(x)\quad \text{s. t.}\ \ x\in S \tag{9}$$

首先，我们先给出几个后面证明过程中会用到的结果.

引理 2.1[13] 若 $\varphi:\Omega\to\mathbf{R}$ 在 Ω 上是可积的，则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\varphi(\omega^i)\rho(\omega^i)=E[\varphi(\omega)].$$

引理 2.2[10] 假定 $\overline{M}$ 是正定的，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}M_k=\overline{M}$，$\mu_k$ 是 $\frac{M_k^T+M_k}{2}$ 的最小特征值，则有 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k=\mu_{\min}$，其中 $\mu_{\min}$ 是 $\frac{\overline{M}^T+\overline{M}}{2}$ 的最小特征值.

3 函数 θ 的性质

定理 3.1(函数 θ 的可微性) 假定 $Q(x,\omega)$ 关于 x 是可微的，并且满足假定条件(Q_1)~(Q_5)，则 g 和 θ 都是关于 x 可微的，并且对于任意的 $x\in S$ 均有

$$\begin{aligned}\nabla\theta(x)=&\tau E[\nabla_x g(x,\omega)]+\\&2(1-\tau)E[g(x,\omega)\cdot\nabla_x g(x,\omega)]-\\&2(1-\tau)E[g(x,\omega)]\cdot E[\nabla_x g(x,\omega)]\end{aligned}\tag{10}$$

证明 据文献[12]中定理3.1的证明可知 g 可微，且 $\|\nabla_x g(x,\omega)\|$ 和 $g(x,\omega)\cdot\|\nabla_x g(x,\omega)\|$ 在 Ω 上可积. 因此由文献[14]中的定理16.8可以得到

$$\nabla_x E[g(x,\omega)]=E[\nabla_x g(x,\omega)],$$
$$\nabla_x E[g^2(x,\omega)]=2E[g(x,\omega)\cdot\nabla_x g(x,\omega)],$$
$$\nabla_x(E[g(x,\omega)])^2=2E[g(x,\omega)]\cdot E[\nabla_x g(x,\omega)].$$

综上，可知 θ 可微，且

$$\begin{aligned}\nabla\theta(x)=&\tau E[\nabla_x g(x,\omega)]+\\&2(1-\tau)E[g(x,\omega)\cdot\nabla_x g(x,\omega)]-\\&2(1-\tau)E[g(x,\omega)]\cdot E[\nabla_x g(x,\omega)].\end{aligned}$$

证毕.

定理 3.2(θ 水平集的有界性) 假设 $\alpha\in(0,2\mu_{\min}\lambda_{\max}^{-1})$，则对任意的 $c\geqslant 0$，水平集 $L_\theta^S(c)$ 是有界的.

证明 首先，反设存在某个 $\bar{c}\geqslant 0$，使得 $L_\theta^S(\bar{c})$ 是无界的，即存在一个序列 $\{x^k\}\subseteq L_\theta^S(\bar{c})$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\|x^k\|\to\infty$. 考虑到 $\theta(x)=\tau E[g(x,\omega)]+(1-\tau)D[g(x,\omega)]$，其中 $\tau\in(0,1]$ 且 $D[g(x,\omega)]\geqslant 0$ 恒成立，可知 $\theta(x)\geqslant\tau E[g(x,\omega)]\tau\in(0,1]$. 因此

$$\bar{c}\geqslant\theta^k(x)\geqslant\tau E[g(x^k,\omega)].$$

再根据文献[11]中定理3.2的证明可知

$$\bar{c}\geqslant\tau E[g(x^k,\omega)]\geqslant\tau\lambda_{\min}\Big(\mu_{\min}\lambda_{\max}^{-1}-\frac{\alpha}{2}\Big)\|x^k-x^*\|^2 \tag{11}$$

因为 $\mu_{\min}\lambda_{\max}^{-1}-\frac{\alpha}{2}>0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\|x^k\|\to\infty$，所以有 $\bar{c}\geqslant\theta(x^k)\to\infty$. 矛盾. 定理得证.

4 稳定点的收敛性分析

在接下来的内容中，我们就一种特殊的 S 考虑问题，此时

$$S=\{x\in\mathbf{R}^n\mid c(x)\leqslant 0\},$$

其中 $c(x)=(c_1(x),c_2(x),\ldots,c_m(x))$，且 $c_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}(i=1,2,\ldots,m)$ 是连续可微的凸函数. 首先，我们先介绍一下稳定点的概念.

定义 4.1 (a) 对 $\Omega_k=\{\omega^i,i=1,2,\ldots,N_k\}$，若存在拉格朗日乘子向量 $\lambda^k=\{\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_m^k\}\in\mathbf{R}^m$ 满足

$$\nabla\theta^k(x^k)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^k\nabla c_i(x^k)=0 \tag{12}$$

$$0\leqslant\lambda^k\perp c(x^k)\leqslant 0 \tag{13}$$

其中 $\mu\perp\nu$ 表示的是 $\mu^T\nu=0$，则称 x^k 是式(9)的稳定点；

(b) 若存在拉格朗日乘子向量 $\lambda^*=\{\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_m^*\}\in\mathbf{R}^m$ 满足

$$\nabla\theta(\tilde{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i^*\nabla c_i(\tilde{x})=0 \tag{14}$$

$$0\leqslant\lambda^*\perp c(\tilde{x})\leqslant 0 \tag{15}$$

则称 $\tilde{x}$ 是式(5)的稳定点.

定义 4.2 若存在 $y\in\mathbf{R}^n$，使得对于任意的 $i=1,2,\ldots,m$，都有 $c_i(y)<0$ 成立，则称 Slater 约束品性成立.

引理 4.3[10] 对于 $\Omega_k=\{\omega^i,i=1,2,\ldots,N_k\}$，令 x^k 是式(9)的稳定点，并且 $\lim\limits_{k\to\infty}x^k=x^*$. 假定式(5)的 Slater 约束品性成立，则 $\{\lambda^k\}$ 是有界的.

定理 4.4 假定 $\overline{M}$ 是正定的，$\alpha\in(0,2\mu_{\min}\lambda_{\max}^{-1})$，则存在整数 $k_0>0$，使得对于任意的 $k>k_0$，水平集 $L_{\theta^k}^{S_k}(c)$ 对任意 $c\geqslant 0$ 是有界的. 特别地，对于足够大的 k，S_k^* 是非空有界的.

证明 由(A_2)和(Q_5)可知，$E[F(x,\omega)]$ 是强

单调的，且 $VI(E[F(x,\omega)],S)$ 有唯一解，设为 x^*. 则有

$$(x-\bar{x}^*)^T\cdot E[F(x^*,\omega)]\geqslant 0,\forall x\in S.$$

接下来利用反证法，假定对每一个 $k_0>0$ 都存在 $k>k_0$，使得水平集 $L^{S_k}_{\theta^k}(\bar{c})$ 对某个 $\bar{c}\geqslant 0$ 无界，即存在序列 $\{x^j\}\subseteq L^{S_k}_{\theta^k}(\bar{c})$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|x^j\|=\infty$. 不失一般性，假定对每一个 j 有 $\|x^j-x^*\|\geqslant 1$. 考虑到

$$\theta(x)=\tau E[g(x,\omega)]+(1-\tau)D[g(x,\omega)],\tau\in(0,1],$$

可知

$$\theta(x)\geqslant\tau E[g(x,\omega)].$$

因此有

$$\bar{c}\geqslant\theta^k(x^j)\geqslant\tau\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^j,\omega^i)\rho(\omega^i).$$

再由文献[11]中定理 4.1 的证明可知

$$\bar{c}\geqslant\tau\left(\mu_{\min}-\frac{\alpha}{2}\lambda_{\max}-(2+\frac{\alpha}{2}\lambda_{\max})\varepsilon\right)\|x^j-x^*\| \tag{16}$$

其中 $\varepsilon\in(0,\frac{2\mu_{\min}-\alpha\lambda_{\max}}{4+\alpha\lambda_{\max}})$. 因为 $\tau\in(0,1]$，且 $\mu_{\min}-\frac{\alpha}{2}\lambda_{\max}-(2+\frac{\alpha}{2}\lambda_{\max})\varepsilon>0$，所以

$$\lim_{j\to\infty}\tau\left(\mu_{\min}-\frac{\alpha}{2}\lambda_{\max}-(2+\frac{\alpha}{2}\lambda_{\max})\varepsilon\right)\|x^j-x^*\|\to\infty.$$

这与 $\bar{c}\geqslant\theta^k(x^j)$ 矛盾. 从而存在整数 $k_0>0$，使得对任意的 $k>k_0$，$L^{S_k}_{\theta^k}(c)$ 对任意的 $c\geqslant 0$ 是有界的. 显然，对足够大的 k，S_k^* 是非空有界的.

定理 4.5　假设 $\bar{M}$ 正定，$\alpha\in(0,2\mu_{\min}\lambda_{\max}^{-1})$，且对于充分大的 k 有 $x^k\in S_k^*$. 则序列 $\{x^k\}$ 的每个聚点都包含在 S^* 中.

证明　假定 $\bar{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的一个聚点. 不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty}x^k=\bar{x}$，显然有 $\bar{x}\in S$.

下面我们来证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\theta^k(x^k)=\theta(\bar{x})$，由 θ^k 的定义可知

$$\begin{aligned}&|\theta^k(x^k)-\theta^k(\bar{x})|\leqslant\\&\frac{\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}|g(x^k,\omega^i)-g(\bar{x},\omega^i)|\rho(\omega^i)+\\&\frac{1-\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}|g^2(x^k,\omega^i)-g^2(\bar{x},\omega^i)|\rho(\omega^i)+\\&\frac{1-\tau}{N_k^2}\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)^2-\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(\bar{x},\omega^i)^2\right|\rho^2(\omega^i)\end{aligned} \tag{17}$$

由文献[12]中定理 4.2 的证明可知

$$\begin{aligned}&\frac{\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}|g(x^k,\omega^i)-g(\bar{x},\omega^i)|\rho(\omega^i)\leqslant\\&\frac{\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\|\nabla_x g(y_1^k,\omega^i)\|\ \|x^k-\bar{x}\|\rho(\omega^i)\to 0,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&\frac{1-\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}|g^2(x^k,\omega^i)-g^2(\bar{x},\omega^i)|\rho(\omega^i)\leqslant\\&\frac{1-\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}2g(y_2^k,w^i)\|\nabla_x g(y_2^k,\omega^i)\|\cdot\\&\|x^k-\bar{x}\|\rho(\omega^i)\to 0,\end{aligned}$$

其中 y_1^k 和 y_2^k 介于 x^k 和 $\bar{x}$ 之间，且 $\lim\limits_{k\to\infty}y_1^k=\bar{x}$，$\lim\limits_{k\to\infty}y_2^k=\bar{x}$. 所以只需证

$$\frac{1-\tau}{N_k^2}\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)^2-\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(\bar{x},\omega^i)^2\right|\rho^2(\omega^i)\to 0 \tag{18}$$

因为

$$\begin{aligned}&\frac{1-\tau}{N_k^2}\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)^2-\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(\bar{x},\omega^i)^2\right|\rho^2(\omega^i)\leqslant\\&\frac{1-\tau}{N_k^2}\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}(g(x^k,\omega^i)+g(\bar{x},\omega^i))\right|\rho(\omega^i)\cdot\\&\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}(g(x^k,\omega^i)-g(\bar{x},\omega^i))\right|\rho(\omega^i)\leqslant\\&\frac{1-\tau}{N_k}\left|\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}(g(x^k,\omega^i)+g(\bar{x},\omega^i))\right|\rho(\omega^i)\cdot\\&\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\|\nabla_x g(y_1^k,\omega^i)\|\ \|x^k-\bar{x}\|\rho(\omega^i),\end{aligned}$$

考虑到 $g(x,\omega)$ 在 Ω 上可积，因而有

$$\frac{1}{N_k}\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}(g(x^k,\omega^i)+g(\bar{x},\omega^i))\right|\rho(\omega^i)<\infty.$$

又因为

$$\frac{1-\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\|\nabla_x g(y_1^k,\omega^i)\|\ \|x^k-\bar{x}\|\rho(\omega^i)\to 0,$$

所以

$$\frac{1-\tau}{N_k^2}\left|\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)^2-\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(\bar{x},\omega^i)^2\right|\rho^2(\omega^i)\to 0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty}|\theta^k(x^k)-\theta^k(\bar{x})|=0 \tag{19}$$

此外，注意到

$$\begin{aligned}&|\theta^k(x^k)-\theta(\bar{x})|\leqslant\\&\quad|\theta^k(x^k)-\theta^k(\bar{x})|+|\theta^k(\bar{x})-\theta(\bar{x})|,\end{aligned}$$

据上述证明及引理 1.1,我们可以得到$\lim\limits_{k\to\infty}\theta^k(x^k)=\theta(\bar{x})$.因为对足够大的 k,$x^k\in S_k^*$,对任意的 $x\in S$ 都有$\theta^k(x^k)\leqslant\theta^k(x)$,对该不等式两侧取极限,并结合以上证明,我们可以得到结论 $\theta(\bar{x})\leqslant\theta(x)$,$x\in S$,定理得证.

定理 4.5 说明了式(9)的最优解的极限性质.然而,相对于计算最优解,更加方便的是得到稳定点.所以接下来研究式(9)稳定点的极限性质.

定理 4.6 对于足够大的 k,假定 x^k 是(9)式的稳定点,$\tilde{x}$ 是序列$\{x^k\}$的一个聚点. 如果 Slater 约束品性成立,则 $\tilde{x}$ 是(5)式的稳定点.

证明 不妨假定$\lim\limits_{k\to\infty}x^k=\tilde{x}$.首先我们来证明

$$\lim_{k\to\infty}\nabla\theta^k(x^k)=\nabla\theta(\tilde{x}) \tag{20}$$

由 $\theta^k(x)$的定义有

$$\nabla\theta^k(x^k)=\frac{\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\nabla_x g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)+\frac{2(1-\tau)}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\nabla_x g(x^k,\omega^i)g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)-\frac{2(1-\tau)}{N_k^2}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)\cdot\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\nabla_x g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i),$$

根据文献[12]中定理 4.3 的证明可知

$$\frac{\tau}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\nabla_x g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)\to\tau E[\nabla_x g(\tilde{x},\omega^i)],$$

$$\frac{2(1-\tau)}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\nabla_x g(x^k,\omega^i)g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)\to 2(1-\tau)E[\nabla_x g(\tilde{x},\omega^i)g(\tilde{x},\omega^i)].$$

此外,结合文献[12]中的引理 4.2 可以得到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{N_k}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)=E[g(\tilde{x},\omega^i)] \tag{21}$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2(1-\tau)}{N_k^2}\sum_{\omega^i\in\Omega_k}g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)\cdot\sum_{\omega^i\in\Omega_k}\nabla_x g(x^k,\omega^i)\rho(\omega^i)=2(1-\tau)E[g(\tilde{x},\omega^i)]\cdot E[\nabla_x g(\tilde{x},\omega^i)].$$

综上可知,$\lim\limits_{k\to\infty}\nabla\theta^k(x^k)=\nabla\theta(\tilde{x})$.由引理 3.1 可知如果序列$\{\lambda^k\}$是有界的,那么$\{\lambda^k\}$必有收敛的子列.不失一般性,我们可假定$\lim\limits_{k\to\infty}\lambda^k=\lambda^*$. 因为对于每个 i,c_i 以及∇c_i 均是连续的,在(12)式和(13)式中取极限即可得到(14)式及(15)式,定理得证.

参考文献:

[1] Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems [J]. Math Program, 1992, 53: 101.

[2] Fukushima M. Merit functions for variational inequality and complementarity problems [M]. New York: Plenum, 1996.

[3] Fukushima M. 非线性最优化理论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[4] Chen X, Fukushima M. Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problem [J]. Math Oper Res, 2005, 30: 1028.

[5] 李欢, 寇喜鹏. 一种新的求解单调变分不等式的非精确并行分裂法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 505.

[6] 陈小彪, 薛小维. 非精确求解凸规划的部分交替方向算法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2015, 52: 736.

[7] Fang H, Chen X, Fukushima M. Stochastic R_0 matrix linear complementarity problems [J]. SIAM J Optimiz, 2007, 18: 495.

[8] Xu H F. Sample average approximation methods for a class of stochastic variational inequality problems [J]. Asia-Pac J Oper Res, 2010, 27: 112.

[9] Facchinei F, Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems [M]. New York: Springer, 2003.

[10] Luo M J, Lin G H. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems [J]. J Optimiz Theory App, 2009, 140: 110.

[11] Ma H Q, Wu M, Huang N J, *et al*. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems with nonlinear perturbations [J]. Appl Math Comput, 2013, 219: 6263.

[12] Lu F, Li S J. Method of weighted expected residual for solving stochastic variational inequality problems [J]. Appl Math Comput, 2015, 269: 657.

[13] Niederreiter H. Random number generation and quasi-monte Carlo method [M]. Philadelphia: SIAM, 1992.

[14] Patrick B. Probability and measure [M]. New York: Wiley-Interscience, 1995.