doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.04.002

(3+1)维时空分数阶 mKdV-ZK 方程的新精确解

洪　韵，孙峪怀，江　林，张　雪
(四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610066)

摘　要：(3+1)维时空分数阶 mKdV-ZK 方程精确解的构建重要而令人感兴趣. 本文通过含三维空间、一维时间的分数阶复变换将分数阶 mKdV-ZK 方程转化为非线性常微分方程，再引入新的辅助微分方程解及其新展开形式，构建了 mKdV-ZK 方程的系列精确解.

关键词：扩展的 (G'/G)-展开法；(3+1)维时空分数阶 mKdV-ZK 方程；精确解

中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)04-0679-04

New exact solutions for the (3+1)-dimensional space-time fractional mKdV-ZK equation

HONG Yun, *SUN Yu-Huai*, *JIANG Lin*, *ZHANG Xue*
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: It is very important and interesting to construct exact solutions of the (3+1)-dimensional space-time fractional mKdV-ZK equation. In this paper, by using fractional complex transformation, the mKdV-ZK equation was transformed into the nonlinear ordinary deferential equation, and then the extends (G'/G)-expansion method is introduced to construct the exact solution. Finally, a series of new exact solutions for the mKdV-ZK equations are obtained.

Keywords: Extended (G'/G)-expansion method; (3+1)-dimensional space-time fractional mKdV-ZK equation; Exact solution
(2010 MSC 35R11, 83C15)

1　引　言

近年来，非线性分数阶偏微分方程受到人们广泛的关注，在物理学、工程、生物学、控制理论、流体动力学等领域都有着广泛的应用. 因而求解其精确解具有非常重要的理论和实用价值. 人们对此也做了大量的工作，获得了许多研究方法，如分数阶首次积分法[1,2]、分数阶辅助方程展开法[3,4]、指数函数法[5,6]、(G'/G)-展开法[7-12]等.

(3+1)维时空分数阶 mKdV-ZK 方程[13-16]，

$$D_t^{\alpha}u+\delta u^2D_x^{\alpha}u+D_x^{3\alpha}u+D_x^{\alpha}D_y^{2\alpha}u+D_x^{\alpha}D_z^{2\alpha}u=0 \tag{1}$$

是一个描述等离子体中离子声波扰动的演化模型，其中 $0<\alpha\leqslant 1$，δ 是任意常数，x,y,z 分别代表三维空间坐标，t 代表时间. 这样高维且对时间、空间均为分数阶偏导的微分方程精确解有广泛应用背景. 文献[14]分别用指数函数法、(G'/G)-展开法、广义 Kudryashov 法求解了该方程的多个精确解. 文献[15]利用直接对称法得到了该方程的对称约化、精确解，并求出了其守恒律. 文献[16]用 exp-展开法求解了该方程的多个行波解.

本文利用分数阶复变换以及改进的黎曼-刘维

收稿日期：2016-10-06
基金项目：国家自然科学基金(11371267)；四川省教育厅自然科学重点基金(2012ZA135)
作者简介：洪韵(1993－)，女，四川渠县人，硕士研究生，主要从事偏微分方程研究. E-mail：460227268@qq.com
通讯作者：孙峪怀. E-mail：sunyuhuai63@163.com

尔导数[17]将(3+1)维时空分数阶 mKdV-ZK 方程转化为常微分方程,再应用扩展的 (G'/G)-展开法,引入新的辅助方程[18] $G''G=AG'^2+BGG'+CG^2$ 构建方程新的精确解.

(1)式中改进的黎曼-刘维尔导数由下式定义:

$$D_t^\alpha f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t(t-\xi)^{-\alpha}(f(\xi)-f(0))\mathrm{d}\xi,\\ \quad 0<\alpha<1,\\ (f^n(t))^{(\alpha-n)},n\leqslant\alpha<n+1,n\geqslant 1\end{cases}\tag{2}$$

具有如下性质:

$$D_t^\alpha t^r=\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)}t^{r-\alpha}\tag{3}$$

$$D_t^\alpha(f(t)g(t))=g(t)D_t^\alpha f(t)+f(t)D_t^\alpha g(t)\tag{4}$$

$$D_t^\alpha f[g(t)]=f'_g[g(t)]D_t^\alpha g(t)=D_g^\alpha f[g(t)](g'(t))^\alpha\tag{5}$$

2 方法简述

扩展的 (G'/G)-展开法求解非线性分数阶演化方程步骤为:

步骤1 考虑非线性分数阶演化方程

$$P(u,D_t^\alpha u,D_x^\beta u,D_y^\gamma u,D_z^\theta u,D_t^{2\alpha}u,D_t^\alpha D_x^\beta u,D_x^{2\beta}u,D_x^\beta D_y^\gamma u,\cdots)=0\tag{6}$$

其中 $0<\alpha,\beta,\gamma,\theta<1$,$u=u(x,y,z,t)$ 是未知函数,P 是关于 u 及其各阶偏导数的多项式. 首先对(6)式做分数阶复变换

$$u(x,y,z,t)=u(\xi)\tag{7}$$

$$\xi=\frac{ax^\beta}{\Gamma(1+\beta)}+\frac{by^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}+\frac{cz^\theta}{\Gamma(1+\theta)}-\frac{vt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\tag{8}$$

其中 a,b,c,v 是任意的非零常数. 将(7)、(8)式代入(6)式,方程(6)就化为常微分方程

$$P(u,u',u'',u''',\cdots)=0\tag{9}$$

其中 $u'=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$,$u''=\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}$,$\cdots$.

步骤2 设常微分方程(9)具有行波解

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^m a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i+\sum_{i=1}^m b_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{-i}\tag{10}$$

其中 a_i,b_i 是待定系数,m 由平衡(9)式中最高阶导数项和非线性项得到,且 G 满足如下形式的常微分方程:

$$G''G=AG'^2+BGG'+CG^2\tag{11}$$

其中 A,B,C 为待定系数.

步骤3 将(10)式结合(11)式代入(9)式,合并 (G'/G) 的相同幂次项,并令各次幂系数为零,得到一个关于 $a_i,b_i(i=1,2,3,\cdots,m)$ 的代数方程组,则可以解出 $a_i,b_i(i=1,2,3,\cdots,m)$ 的值.

步骤4 将 $a_i,b_i(i=1,2,3,\cdots,m)$ 的值代入(10)式,得到的结果与(11)式的解联立,就得到了原方程(6)的多个精确解.

其中,计算(11)式可得

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2(1-A)}\left(\dfrac{C_1\sinh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)+C_2\cosh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)}{C_1\cosh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)+C_2\sinh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)}\right)+\\ \quad\dfrac{B}{2(1-A)},(B^2-4(A-1)C>0,A\neq 1),\\ \dfrac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2(1-A)}\left(\dfrac{-C_1\sin(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)+C_2\cos(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)}{C_1\cos(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)+C_2\sin(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)}\right)+\\ \quad\dfrac{B}{2(1-A)},(4(A-1)C-B^2>0,A\neq 1),\\ \dfrac{1}{(1-A)}\left(\dfrac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\dfrac{B}{2}\right),(4(A-1)C-B^2=0,A\neq 1)\end{cases}\tag{12}$$

3 过程与结果

对方程(1)引入分数阶复变换,并积分一次,可得到

$$-vu+\frac{\delta\alpha}{3}u^3+(a^3+ab^2+ac^2)u''+\xi_0=0\tag{13}$$

其中 ξ_0 是积分常数. 平衡(13)式中的最高阶导数项 u'' 和非线性项 u^3,有 $3m=m+2$,即 $m=1$. 因

此方程(10)为：

$$u(\xi)=a_0+a_1\frac{G'}{G}+b_1(\frac{G'}{G})^{-1}\tag{14}$$

其中 a_0,a_1,b_1 为待定系数. 将(14)式代入(13)式，合并$(\frac{G'}{G})^i(i=1,2,\cdots)$，并令其各次幂系数为零，得到一个关于 a_0,a_1,b_1 的超定代数方程组

$$\begin{cases}(\frac{G'}{G})^3:\frac{\delta a}{3}a_1^3+2a_1(A-1)^2(a^3+ab^2+ac^2)=0,\\(\frac{G'}{G})^2:\delta aa_0a_1^2+3a_1B(A-1)(a^3+ab^2+ac^2)=0,\\(\frac{G'}{G})^1:\delta a(a_0^2a_1+a_1^2b_1)+(a^3+ab^2+\\\quad ac^2)[2a_1C(A-1)+a_1B^2]-va_1=0,\\(\frac{G'}{G})^0:\frac{\delta a}{3}(a_0^3+6a_0a_1b_1)+(a^3+ab^2+\\\quad ac^2)[a_1BC+b_1B(A-1)]-va_0+\xi_0=0,\\(\frac{G'}{G})^{-1}:\delta a(a_0^2b_1+a_1b_1^2)+(a^3+ab^2+\\\quad ac^2)[b_1B^2+2b_1C(A-1)]-vb_1=0,\\(\frac{G'}{G})^{-2}:\delta aa_0b_1^2+\\\quad 3b_1BC(a^3+ab^2+ac^2)=0,\\(\frac{G'}{G})^{-3}:\frac{\delta a}{3}b_1^3+2b_1C^2(a^3+ab^2+ac^2)=0,\end{cases}$$

解上述方程组得到如下两组解：

$$a_0=\mp\frac{3B(A-1)}{|A-1|}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-6\delta}},$$

$$a_1=\pm|A-1|\sqrt{\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{-\delta}},b_1=0,$$

$$v=[2C(A-1)-\frac{1}{2}B^2](a^3+ab^2+ac^2),$$

$$\xi_0=\mp2\sqrt{6}BC|A-1|(a^3+ab^2+ac^2)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}}\tag{15}$$

及

$$a_0=\mp\frac{3BC}{|C|}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-6\delta}},a_1=0,$$

$$b_1=\pm|C|\sqrt{\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{-\delta}},$$

$$v=[2C(A-1)-\frac{1}{2}B^2](a^3+ab^2+ac^2),$$

$$\xi_0=\mp2\sqrt{6}BC|A-1|(a^3+ab^2+ac^2)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}}\tag{16}$$

将(12)式、(15)式以及(16)式代入(14)式，得到方程(1)有如下形式的解：

情形 1. 当 $B^2-4(A-1)C>0,A\neq1$，方程(1)的双曲函数形式解为

$$u_{1,2}=\pm\frac{2\sqrt{6}B+H_1(\xi)\sqrt{6(B^2+4C-4AC)}}{2(1-A)}\cdot|A-1|\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}},$$

$$u_{3,4}=\pm[\frac{2\sqrt{6}(1-A)|C|}{H_1(\xi)\sqrt{B^2+4C-4AC}+B}-\frac{\sqrt{6}BC}{2|C|}]\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}}\tag{17}$$

其中 $H_1(\xi)=\dfrac{C_1\sinh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)+C_2\cosh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)}{C_1\cosh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)+C_2\sinh(\frac{\sqrt{B^2+4C-4AC}}{2}\xi)}$，$C_1,C_2$ 是任意常数.

情形 2. 当 $4(A-1)C-B^2>0,A\neq1$，方程(1)的三角函数形式解为

$$u_{5,6}=\pm\frac{2\sqrt{6}B+H_2(\xi)\sqrt{6(4AC-B^2-4C)}}{2(1-A)}|A-1|\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}}$$

$$u_{7,8}=\pm[\frac{2\sqrt{6}(1-A)|C|}{H_2(\xi)\sqrt{4AC-B^2-4C}+B}-\frac{\sqrt{6}BC}{2|C|}]\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}}\tag{18}$$

其中 $H_2(\xi)=\dfrac{-C_1\sin(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)+C_2\cos(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)}{C_1\cos(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)+C_2\sin(\frac{\sqrt{4AC-B^2-4C}}{2}\xi)}$，$C_1,C_2$ 是任意常数.

情形 3. 当 $4(A-1)C-B^2=0,A\neq1$，方程(1)的有理数形式解为

$$u_{9,10}=\pm(\sqrt{6}B+\frac{\sqrt{6}C_1}{C_1\xi+C_2})\frac{|A-1|}{1-A}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}},$$

$$u_{11,12}=\pm[\frac{2\sqrt{6}|C|(1-A)(C_1\xi+C_2)}{2C_1+B(C_1\xi+C_2)}-\frac{\sqrt{6}BC}{2|C|}]\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{-\delta}} \quad (19)$$

其中 C_1,C_2 是任意常数.

4 结 论

本文所引入的辅助方程(11)是原辅助方程 $G''+\mu G'+\lambda G=0$[14] 的推广. 本文得到了双曲函数解、三角函数解、有理函数解，因此结果更加多样化，也更一般化. 同时，对高维且时间空间均是分数阶偏导数的微分方程的精确解构建更具普适性，可应用推广到一些特殊情形，比如只是时间分数阶方程和低维的情形.

参考文献:

[1] Lu B. The first integral method for some time fractional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2012, 395: 684.

[2] Aminikhah H, Sheikhani A R, Rezazadeh H. Exact solutions for the fractional differential equations by using the first integral method [J]. Nonlinear Eng, 2015, 4: 15.

[3] Zhang S, Zhang H Q. Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs [J]. Phys Lett A, 2011, 375: 1069.

[4] Alzaidy J F. Fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in mathematical physics [J]. British J Math Comput Sci, 2013, 3: 153.

[5] 纪娟娟，郭业才，张兰芳. Helmholtz 方程的指数函数法多波解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，52：1069.

[6] Güner Ö, Bekir A, Bilgil H. A note on exp-function method conbined with complex transform method applied to fractional differential equations [J]. Adv Nonlinear Anal, 2015, 4: 201.

[7] 刘倩，周钰谦，王法官. 长短波相互作用方程的精确行波解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2011，48：524.

[8] Younis M, Zafar A, Ul-Haq K, *et al*. Travelling wave solutions of fractional order Coupled Burger's equation by (G'/G)-expansion method [J]. Am J Comput Appl Math, 2013, 3: 81.

[9] Shakeel M, Mohyud-Din S T. A novel (G'/G)-expansion method and its applications to the space-time fractional SRWL equation [J]. Adv Trends Math, 2015, 2: 1.

[10] Bekir A, Güner Ö. The (G'/G)-expansion method using modified Riemann-Liouville derivative for some space-time fractional differential equations [J]. Ain Shams Eng J, 2014, 5: 959.

[11] 李钊，孙峪怀，黄春. 修改的 (G'/G)-展开法与三阶非线性波动方程的精确解[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2016，39：180.

[12] 李钊，孙峪怀，张雪，等. 非线性分数阶 Klein-Gordon 方程的新显式解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：221.

[13] Mace R L, Hellberg M A. The Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov equation for electron-acoustic waves [J]. Phys Plasmas, 2001, 8: 2649.

[14] Güner Ö, Aksoy E, Bekir A, *et al*. Differential methods for (3+1)-dimensional space-time fractional modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation [J]. Comput Math Appl, 2016, 71: 1259.

[15] 于兴江. 广义 KdV-Zakharov-Kuznetsev 方程的对称约化、精确解和守恒律[J]. 量子电子学报，2014，31：670.

[16] Alam M N, Hafez M G, Akbar M A, *et al*. Exact traveling wave solutions to the (3+1)-dimensional mKdV-ZK and the (2+1)-dimensional Burgers equations via exp $(-\varphi(\eta))$-expansion method [J]. Alexandria Eng J, 2015, 54: 635.

[17] Jumarie G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results [J]. Comput Math Appl, 2006, 51: 1367.

[18] 尹君毅. 扩展的 (G'/G)-展开法和 Zakharov 方程组的新精确解[J]. 物理学报，2013，62：200202.