2017 年 5 月 四川大学学报(自然科学版) May. 2017
第 54 卷 第 3 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 54 No. 3

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.03.008

(2+1)维 Konopelchenko-Dubrovsky 方程的扰动非行波双孤子和周期解

康晓蓉，鲜大权
（西南科技大学理学院，绵阳 621010）

摘　要：应用退耦变换和 Lie 对称群方法，本文首先将(2+1)维 KD 方程约化为(1+1)维非线性偏微分方程，然后通过广义同宿测试法获得了该方程新的扰动非行波双孤子解及其动力学临界点，得到了参数极限情况下的非行波有理函数奇解. 最后，本文运用二维平面动力系统的 Hamilton 函数讨论了对称约化方程在波变换下的周期解的存在性，并用正切函数拟设法得到了该周期解的显式精确表达，从而相应获得了 KD 方程的扰动非行波周期解析解.

关键词：(2+1)维 KD 方程；扰动非行波双孤子；Hamilton 函数；扰动非行波周期解
中图分类号：O175.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)03-0477-05

Perturbed non-traveling wave double solitary and periodic solutions for (2+1)-D Konopelchenko-Dubrovsky equation

KANG Xiao-Rong, *XIAN Da-Quan*
(School of Sciences, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

Abstract: Based on the decoupling transformation and the Lie point symmetry group method, the (2+1)-D KD equation is reduced to the (1+1)-D nonlinear PDE. By extended homoclinic test approach, new perturbed non-traveling wave double solitary solutions of the (2+1)-D KD equation are obtained. Also, the dynamic critical point and the non-traveling wave rational function singular solutions in the limitation of parameters are derived. Applying the Hamilton function in 2-D planar dynamical system, we discuss the existence of the periodic solutions for the symmetrical and reduced equation with the wave transformation. Moreover, some periodic solutions are derived by the Tan-function test method, and then the perturbed non-traveling wave periodic solutions for the (2+1)-D KD equation are shown.

Keywords: (2+1)-D KD equation; Perturbed non-traveling wave double solitary; Hamilton function; Perturbed non-traveling wave periodic solution
(2010 MSC 34C25)

1　引　言

1984 年，Konopelchenko 和 Dubrovsky 导出了在非线性物理学中有着重要意义的模型[1]

$$\begin{cases} 2u_t+(\alpha^2u^3-2u_{xx}-6\beta u^2)_x-6v_y+6\alpha u_xv=0, \\ u_y-v_x=0 \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2016-10-28
基金项目：四川省教育发展研究中心基金(CJF15014)；国家自然科学基金(11202175)；国家自然科学青年基金(12zg2103)
作者简介：康晓蓉(1970-)，女，副教授，主要研究方向为可积系统理论与应用. E-mail：kangxiaorong@swust.edu.cn

其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$,$u=u(x,y,t)$,$v=v(x,y,t)$:$R_x\times R_y\times R_t^+\to\mathbf{R}$ 通常称为(2+1)维 KD 方程. 该方程一经导出就受到科学界广泛关注,研究成果不断丰富,先后获得了多孤子行波解[2],双曲正切函数法的孤立波解[3],“徐氏”稳定法的多参数精确解[4],CRE 方法的椭圆余弦波解[5],Lie 对称群和同宿测试思想相结合的带任意时间函数的非行波孤子相互作用解[6]以及类孤波解、椭圆周期孤立波相互作用解等[7-10]. 尽管如此,作为高维非线性物理模型,其复杂动力学特性远不止这些,有待可用的研究方法还有很多[11-17].

本文将综合运用 Lie 群方法、广义同宿测试法、平面动力系统定性理论和拟设函数法研究 KD 方程(1)的奇异非行波双孤子解、非行波周期解存在性及其显式精确表达[14-17].

2 KD 方程(1)的对称约化

取变换

$$u=w_x,\ v=w_y \tag{2}$$

则方程(1)退耦为

$$2w_{xt}+(\alpha^2w_x^3-2w_{xxx}-6\beta w_x^2)_x-6w_{yy}+6\alpha w_{xx}w_y=0 \tag{3}$$

之前,我们已获得方程(3)如下形式的 Lie 点对称[6]:

$$\sigma=aw_x+bw_y+cw_t+dw+e \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} a=\frac{1}{3}c_1xt+\frac{1}{3}c_2x+\frac{1}{18}c_1y^2+\frac{1}{6}q'(t)y+h(t),\\ b=\frac{2}{3}c_1yt+\frac{2}{3}c_2y+q(t),c=\frac{1}{2}c_1t^2+c_2t+c_3,\\ d=0,\\ e=-\frac{1}{36\alpha^3}[24\alpha\beta x(c_1t+c_2x)+2\alpha^2x(2c_1y+3q'(t))+\alpha^2y^2q''(t)+12(\alpha^2yh'(t)+4\beta^2y(c_1t+c_2)-3\alpha^3p(t))+4\alpha\beta y(c_1y+3q'(t))] \end{cases} \tag{5}$$

这里 $c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}$,$p(t)$,$q(t)$,$h(t)$是时间变量 t 的任意光滑函数.

基于方程(3)的可积性,取 $c_1=c_2=0$,$c_3=c_3$,$p(t)=q(t)=1$,$h(t)=t$,则有

$$\sigma=w_xt+w_y+c_3w_t+1-\frac{1}{3\alpha}y \tag{6}$$

求解线性偏微分方程 $\sigma=0$,得方程(3)的变换:

$$\begin{cases} w=\frac{1}{3\alpha c_3^2}(c_3(x+yt-3\alpha t)-t^2+3\alpha c_3^2F(\xi,\eta)),\\ \xi=t^2-2c_3x,\\ \eta=y-\frac{1}{c_3}t \end{cases} \tag{7}$$

其中关于 ξ,η 的函数 $F(\xi,\eta)$ 待定. 将(7)式代入(3)式,得关于 F 的(1+1)维非线性 PDE

$$2((\alpha-12\beta c_3)F_\xi+3\alpha(F_\eta+4c_3^4(\alpha^2F^3-2F_{\xi\xi})_\xi+2(6\beta c_3-\alpha)c_3^2F_\xi^2))_\xi+9\alpha(4\alpha c_3^2F_{\xi\xi}F_\eta-F_{\eta\eta})=0 \tag{8}$$

3 KD 方程(1)的扰动非行波双孤子解

对方程(8)取变换

$$F=\frac{2}{\alpha}\ln\varphi,\varphi=\varphi(\xi,\eta) \tag{9}$$

应用广义同宿测试法[17],取测试函数

$$\varphi=k_1\sinh(\omega_1(\xi+\mu_1\eta))+k_2\cosh(\omega_2(\xi+\mu_2\eta)) \tag{10}$$

其中 $k_i,\omega_i,\mu_i(i=1,2)$是待定参数. 将(9)式和(10)式代入(8)式可得关于待定参数的非线性超定代数方程组

$$\begin{cases} k_2^4c_3^2\omega_2^3(12\beta c_3-2\alpha+3\mu_2\alpha)=0,\\ k_1^4c_3^2\omega_1^3(12\beta c_3-2\alpha+3\alpha\mu_1)=0,\\ k_1^3k_2c_3^2\omega_1(2\omega_1^2+\omega_2^2)(12\beta c_3-2\alpha+3\alpha\mu_2)=0,\\ k_1^2k_2^2c_3^2\omega_2[(12\beta c_3-2\alpha)(\omega_1^2-\omega_2^2)-3\alpha\mu_2(\omega_2^2+\omega_1^2)+6\alpha\omega_1^2\mu_1]=0,\\ k_1^3k_2\omega_1\omega_2[\alpha(2-196c_3^4\omega_2^2+3\mu_1+3\mu_2+192c_3^4\omega_1^2-9\mu_1\mu_2)-24\beta c_3]=0,\\ k_1^2k_2^2c_3^2\omega_1^2\omega_2(12\beta c_3-\alpha\mu_2-2\alpha+2\alpha\mu_1)=0,\cdots\cdots \end{cases} \tag{11}$$

上述方程组的解为:$k_1=k_1$,$k_2=k_2$,$c_3=c_3$,$\mu_1=\mu_2=\frac{2(\alpha-6\beta c_3)}{3\alpha}$,$\mu_3=\mu_3$,$\omega_1=\omega_2=\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}}{12\alpha c_3^2}$,$\omega_3=\omega_3$. 故

$$\varphi=k_1\sinh(\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha\xi+2(\alpha-6\beta c_3)\eta)}{36\alpha^2c_3^2})+k_2\cosh(\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha\xi+2(\alpha-6\beta c_3)\eta)}{36\alpha^2c_3^2}) \tag{12}$$

于是方程(8)有解

$$F=\frac{2}{\alpha}\ln(k_1\sinh(\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha\xi+2(\alpha-6\beta c_3)\eta)}{36\alpha^2c_3^2})+$$
$$k_2\cosh(\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha\xi+2(\alpha-6\beta c_3)\eta)}{36\alpha^2c_3^2}))\tag{13}$$

相应地，方程(3)的解为

$$w=\frac{1}{3\alpha c_3^2}(c_3(x+yt-3\alpha t)-t^2)+\frac{2}{\alpha}\ln|k_1\sinh(\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha(t^2-2c_3x)+2(\alpha-6\beta c_3)(y-\frac{1}{c_3}t))}{36\alpha^2c_3^2})+$$
$$k_2\cosh(\frac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha(t^2-2c_3x)+2(\alpha-6\beta c_3)(y-\frac{1}{c_3}t))}{36\alpha^2c_3^2})|\tag{14}$$

从而我们得到 KD 方程(1)新的扰动非行波双孤子解如下：

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{3\alpha c_3}-\dfrac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(k_1\cosh\tau-k_2\sinh\tau)}{3\alpha^2c_3(k_1\sinh\tau+k_2\cosh\tau)},\\ v=\dfrac{t}{3\alpha c_3}+\dfrac{(\alpha-6\beta c_3)\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(k_1\cosh\tau-k_2\sinh\tau)}{9\alpha^3c_3^2(k_1\sinh\tau+k_2\cosh\tau)}\end{cases}\tag{15}$$

其中 $\tau=\dfrac{\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3\alpha(t^2-2c_3x)+2(\alpha-6\beta c_3)(y-\frac{1}{c_3}t))}{36\alpha^2c_3^2}$. 显然，参数 c_3 对结果(15)式有显著的扰动效应：

1) 当 $c_3=\dfrac{\alpha}{6\sqrt{2}\beta}$ 时，$u=\dfrac{2\sqrt{2}\beta}{\alpha^2}$ 为时空稳态解，$v=\dfrac{2\sqrt{2}\beta}{\alpha^2}t$ 仅为空间稳态解，而对时间线性演化；

2) 当 $c_3=\dfrac{\alpha}{6\beta}$ 时，u 的动力学演化行为与空间变量 y 无关，而 v 的演化行为与全部空间变量无关.

因此 $c_3=\dfrac{\alpha}{6\sqrt{2}\beta}$ 和 $c_3=\dfrac{\alpha}{6\beta}$ 是(15)式的两个动力学临界点. 同时，当 $k_2\neq\pm k_1$ 时，函数 (u,v) 的奇点轨迹方程如下：

$$\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}(3c_3\alpha t^2+2(6c_3\beta-\alpha)(t-c_3y)-6c_3^2\alpha x)-18\ln\left|\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right|c_3^3\alpha^2=0\tag{16}$$

若取(15)式中 $k_2=\sqrt{216\beta^2c_3^2-3\alpha^2}$ 后再取 $c_3\to\dfrac{\sqrt{2}\alpha}{12\beta}$，则

$$\begin{cases}u=\dfrac{2\sqrt{2}[6rk_1\alpha\beta^2t^2-24k_1\beta^3t-sk_1\alpha^2\beta x+2\alpha\beta^2(\sqrt{2}k_1y+36r)-rk_1\alpha^3]}{\alpha^2[6rk_1\alpha\beta t^2-24k_1\beta^2t-\sqrt{2}[sk_1\alpha^2x-2\alpha\beta(\sqrt{2}k_1y+36r)]]}\\ v=\dfrac{-12sk_1\alpha\beta^2t^3+4\sqrt{2}k_1\beta(12\beta^3t^2-\alpha^2)+4[rk_1\alpha x-2k_1\beta y-36s\beta]\alpha\beta t}{-6rk_1\alpha^3\beta t^2+24k_1\alpha^2\beta^2t+\sqrt{2}[rk_1\alpha x-2\beta(k_1y+16r)]}\end{cases}\tag{17}$$

其中 $r=1+\sqrt{2}$，$s=2+\sqrt{2}$. 这两个函数无驻点，但有奇性，因此(17)式为方程(1)的一组非行波有理函数奇解.

4　KD 方程(1)非行波周期解的存在性

定理 4.1　当 Lie 对称约化方程(8)中的参数满足 $c_3k\neq0$ 时，KD 方程(1)的非行波周期解存在.

证明　首先对约化方程(8)取如下波变换：

$$F(\xi,\eta)=f(\theta),\theta=k\xi-s\eta\tag{18}$$

其中 k,s 为非零实数. 将(18)式代入方程(8)后对 θ 积分一次，取积分常数为零得

$$(2\alpha k^2-6\alpha ks-24\beta c_3k^2-9\alpha s^2)f'(\theta)+$$
$$24\alpha c_3^4k^4(\alpha f'^3(\theta)-2f'''(\theta))+$$
$$6\alpha c_3^2k^2(12\beta c_3k-3\alpha s-2\alpha k)f'^2(\theta)=0\tag{19}$$

令

$$f'(\theta)=2g(\theta) \tag{20}$$

则(19)式化为

$$g''(\theta)=r_1g(\theta)+r_2g^2(\theta)+2\alpha^2g^3(\theta) \tag{21}$$

或

$$g'^2(\theta)=r_0+r_1g^2(\theta)+\frac{2}{3}r_2g^3(\theta)+\alpha^2g^4(\theta) \tag{22}$$

其中 r_0 为积分常数,$r_1=\frac{\alpha-12\beta c_3}{24\alpha c_3^4k^2}-\frac{s(2k+3s)}{16c_3^4k^4}$,$r_2=\frac{3\beta}{c_3k}-\frac{\alpha}{2c_3^2k}-\frac{3\alpha s}{4c_3^2k^2}$. 方程(21)的等价二阶自治动力系统为

$$\begin{cases}g'(\theta)=h(\theta),\\ h'(\theta)=r_1g(\theta)+r_2g^2(\theta)+2\alpha^2g^3(\theta)\end{cases} \tag{23}$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}=\frac{h}{r_1g(\theta)+r_2g^2(\theta)+2\alpha^2g^3(\theta)} \tag{24}$$

(24)式两边积分一次得系统(23)的总能量 Hamilton 函数为

$$H(g,h)=\frac{1}{2}(r_1g^2+\frac{2}{3}r_2g^3+\alpha^2g^4-h^2) \tag{25}$$

显然,

$$\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial h}=-h=-g',\\ \frac{\partial H}{\partial g}=r_1g+r_2g^2+2\alpha^2g^3=h'\end{cases} \tag{26}$$

这表明系统(23)能量守恒,因此方程(21)存在周期解,基于变换(20)的方程(19)相应存在周期解. 故方程(8)的周期波解存在. 从而证明了 KD 方程(1)的非行波周期解存在.

5 KD 方程(1)的非行波周期解的显式精确表达

依据以上结论,设方程(21)有如下形式的显式周期解

$$g(\theta)=m\tan(\lambda\theta) \tag{27}$$

其中 m,λ 为待定参数. 将(27)式代入方程(21),取 $\tan(\lambda\theta)$ 各次幂系数为零得待定参数满足如下的非线性代数方程组:

$$\begin{cases}c_3^4m\alpha k^4(\lambda^2-\alpha^2m^2)=0,\\ c_3^2m^2\alpha k^2(12c_3k\beta-\alpha(2k+3s))=0,\\ m(6\alpha k(s+16c_3^4\lambda^2k^3)+24k^2\beta c_3+\\ \quad\alpha(9s^2-2k^2))=0\end{cases} \tag{28}$$

求解该代数方程组得

$$m=\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha^2kc_3^2},\lambda=\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2},s=\frac{2k(\alpha-6\beta c_3)}{3\alpha} \tag{29}$$

其中 $mc_3(\alpha-6\beta c_3)\neq0$,$\alpha^2-72\beta^2c_3^2>0$. 因此得方程(21)的周期解如下:

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha^2kc_3^2}\tan(\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2}\theta) \tag{30}$$

将(30)式代入(20)式得方程(19)的周期解如下:

$$f(\theta)=\pm\frac{1}{\alpha}\ln(1+\tan^2(\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2}\theta)) \tag{31}$$

将(31)式和(29)式代入(18)式得方程(8)的周期波解如下:

$$F(\xi,\eta)=\pm\frac{1}{\alpha}\ln(1+\tan^2(\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2}(k\xi-s\eta))) \tag{32}$$

应用变换(7),得方程(3)的非行波周期解为:

$$w(x,y,t)=\frac{1}{3\alpha c_3^2}(c_3(x+yt-3\alpha t)-t^2\pm13c_3^2\ln(1+\tan^2(\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2}(k(t^2-2c_3x)-s(y-\frac{t}{c_3}))))) \tag{33}$$

将(33)式代入(2)式得 KD 方程(1)的扰动非行波周期解如下:

$$\begin{cases}u=\frac{1}{3\alpha c_3}-\frac{13c_3\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{3\alpha}\tan(\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2}(k(t^2-2c_3x)-s(y-\frac{t}{c_3})))\\ v=\frac{t}{3\alpha c_3}-\frac{13s\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{6\alpha k}\tan(\pm\frac{\sqrt{3(\alpha^2-72\beta^2c_3^2)}}{12\alpha kc_3^2}(k(t^2-2c_3x)-s(y-\frac{t}{c_3})))\end{cases} \tag{34}$$

显然,参数 c_3 对结果(34)式也有显著扰动性:

(i) 当 $c_3=\frac{\alpha}{6\sqrt{2}\beta}$ 时,(34)式中的 u 对时空稳定,而 v 只对空间稳定,对时间则线性演化;

(ii) 当 $|c_3|>|\frac{\alpha}{6\sqrt{2}\beta}|$，即 $\alpha^2-72\beta^2c_3^2<0$ 时，(34)式化为非行波扭结解. 因此(34)式是 KD 方程(1)一组新的扰动精确非行波周期解.

6 结　论

本文应用 Lie 群方法将退耦变换后的(2+1)维 KD 方程约化为(1+1)维非线性 PDE,进而应用广义同宿测试法求解约化方程得到了方程(1)新的扰动非行波双孤子解及其动力学临界点,在参数极限情况下获得了非行波有理函数奇解. 然后本文将波变换下的对称约化方程化成了二维平面动力系统,由系统的 Hamilton 函数证明了它的非行波周期解存在,并应用正切函数拟设法获得了该非行波周期解扰动的显式精确表达式.

参考文献:

[1] Konopelchenko B G, Dubrovsky V G. Some new integrable nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions [J]. Phys Lett A, 1984, 102: 15.

[2] Lin J, Lou S, Wang K. Multi-soliton solutions of the Konopelchenko-Dubrovsky equation [J]. Chinese Phys Lett, 2001, 8: 1173.

[3] Zhi H. Lie point symmetry and some new soliton-like solutions of the KD equations [J]. Appl Math Comput, 2008, 203: 931.

[4] Cao B T. Solutions of Jimbo-Miwa equation and Konopelchenko-Dubrovsky equations [J]. Acta Appl Math, 2010, 112: 181.

[5] Yu W F, Lou S Y, Yu J, *et al*. Interactions between solitons cnoidal periodic waves of the (2+1) D KD equation [J]. Commun Theor Phys, 2014, 62: 297.

[6] 康晓蓉,鲜大权. Konopelchenko-Dubrovsky 方程非行波孤子相互作用解[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 710.

[7] Xia T, Lv Z, Zhang H. Symbolic computation and new families of exact soliton-like solutions of KD equations [J]. Chaos Soliton Fract, 2004, 20: 561.

[8] Zhang S. Symbolic computation and new families of exact non-travelling wave solutions of (2+1)-D KD equation [J]. Chaos Soliton Fract, 2007, 31: 951.

[9] Song L, Zhang H. New exact solutions for the KD equation using extended Riccati equation expansion method and symbolic computation [J]. Appl Math Comput, 2007, 187: 1373.

[10] Hang S, Xia T. A generalized F-expansion method and new exact solutions of KD equations [J]. Appl Math Comput, 2006, 183: 1190.

[11] 许镇辉,鲜大权. 应用指数函数法求解广义 Camassa-Holm 方程 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2009, 46: 1601.

[12] 严勇,姚莉. 一类非线性 Kirehoff 波方程的整体解 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2006, 43: 459.

[13] 陈勇明,杨晗. 一类具耗散项的非线性四阶波动方程的爆破 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2008, 45: 21.

[14] Xian D Q, Chen H L. Symmetry reduced and new exact non-traveling wave solutions of PKP equation with *p*-power [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 70.

[15] 康晓蓉,鲜大权. CDGKS 方程的非行波呼吸子和非行波周期解 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 228.

[16] Kang X R, Xian D Q, Dai Z D. Non-traveling wave solutions for the (2+1)-D Caudrey-Dodd-Gibbon-Kotera-Sawada equation [J]. Int J Numer Method H, 2015, 25: 617.

[17] Kang X R, Xian D Q. Symmetry reductions and rational non-traveling wave solutions for the (2+1)-D Ablowitz-Kaup-Newell-Segur equation [J]. Int J Numer Method H, 2016, 26: 2331.