doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2017.04.006

一维不连续分段光滑映射的加周期分岔

张　鑫
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：本文讨论了一类一维不连续非线性分段光滑映射的动力学行为，得到了其不动点存在和稳定时参数应满足的条件，讨论了其形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨($m\geqslant 2$)的存在性，得到了此类周期轨存在及稳定时的参数条件，并进一步讨论了这些周期轨的倍周期分岔和鞍结点分岔现象.

关键词：分段光滑映射；周期轨；分岔
中图分类号：O175.14　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2017)04-0698-05

Period-adding bifurcations in one-dimensional discontinuous piecewise smooth maps

ZHANG Xin
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we consider the dynamics of a class of one-dimensional discontinuous nonlinear maps. We obtain the existence and stability conditions of fixed points in the parameter space. Then we study the existence and stability of period-m orbit of type $A^{m-1}B$. Analytical conditions for the existence and stability of the periodic orbits are found. The period doubling and saddle-node bifurcations of the orbits are also considered.

Keywords: Piecewise smooth system; Periodic orbit; Bifurcation
(2010 MSC 37G15)

1　引　言

在很多工程问题中，涉及碰撞、摩擦及切换的系统经常出现，这一类系统往往是分段光滑系统. 在工程力学、控制理论等学科的推动下，近年来对分段光滑系统动力学行为的研究吸引了越来越多的关注[1-12].

分段光滑映射是一类重要的分段光滑系统，其动力学行为在非线性动力学的早期发展中起到了基础性作用[2,10]. 同时，这些映射本身又具有非常丰富的动力学行为，即便是很简单的分段线性映射也可以出现非常复杂的分岔现象[9]，因而直到目前都仍然是研究的热点之一.

对分段光滑映射，加周期分岔是一类非常重要的分岔现象[1,2,3,9]. 它指的是随着参数的变化，系统出现一个稳定周期轨序列，相应的周期形成一个有限或无限的等差数列，各个周期轨窗口之间还可能交替出现混沌带. 对分段光滑映射的加周期分岔现象，目前已有很多结果[6]，但也还有很多问题尚待解决.

本文讨论如下形式的一维不连续的非线性分段光滑映射的加周期分岔现象：

$$x\to\begin{cases}\alpha x-\mu, & \text{当 } x\leq 0 \text{ 时},\\ \alpha x+\beta x^{\gamma}-(\mu+\nu), & \text{当 } x>0 \text{ 时}\end{cases}\qquad(1)$$

收稿日期：2016-10-31
基金项目：国家自然科学基金(11371264)
作者简介：张鑫(1995－)，男，硕士，四川广安人，主要研究方向为微分方程与动力系统. Email：xinz95@163.com

其中 $\alpha,\beta,\mu,\nu,\gamma\in\mathbf{R},\beta\neq0,\gamma>1$. 映射(1)来自非光滑系统的擦边和滑动分岔的 Poincare 映射[6]，有很多实际应用. 当 $\nu=0$ 时，映射(1)为一个连续的非线性分段光滑映射，这种情况已经在文献[1]中讨论过了. 本文将讨论映射(1)不连续的情形，因此设 $\nu\neq0$. 在这种情况下，ν 的符号很重要，而其大小对映射(1)的动力学行为并不重要，因此通过尺度变换，可设 $\nu\in\{1,-1\}$.

令 m_1 和 m_2 为两个非负整数，与文献[1]中的符号一样，用 $A^{m_1}B^{m_2}$ 表示映射(1)在线性部分迭代 m_1 次，且在非线性部分迭代 m_2 次的稳定 (m_1+m_2)-周期轨，对应的不稳定周期轨用 $a^{m_1}b^{m_2}$ 表示. 本文主要研究映射(1)的形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨的存在性，其中 $m=1,2,3,\cdots$，从而证明了映射(1)随着参数的变化将依次出现周期为 1，2，3，4，5…的周期轨，即加周期分岔现象，我们还讨论了这些周期轨的倍周期分岔和鞍结点分岔现象.

2　主要结果

为叙述方便，引入如下的记号：令 $\gamma>1,\nu\in\{1,-1\},p=1/(\gamma-1),q_m^{\pm}=\dfrac{\pm1-\alpha^m}{\gamma}+\alpha^m-1,\kappa_m^{\pm}=\left(\dfrac{\pm1-\alpha^m}{\gamma\alpha^{m-1}\beta}\right)^p,\delta_m^{\pm}=\dfrac{-\kappa_m^{\pm}}{1+\alpha},\chi_m=\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha^m}$，以及

$$\Upsilon_{\pm}^m(\alpha,\beta,\mu)=(-\mu)^{\gamma}\pm\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{\alpha^{m-2}\beta\chi_m},\quad \mu<0,m\geqslant2,$$

$$\Delta_{\pm}^m(\alpha,\beta,\mu)=(-(1+\alpha)\mu)^{\gamma}\pm\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{\alpha^{m-3}\beta\chi_m},\quad \mu>0,\alpha<-1,m\geqslant3,$$

$$\Lambda_{\pm}^m(\alpha,\beta)=\chi_m(\alpha^{m-1}+q_m^{\pm}\kappa_m^{\pm}),$$

$$\Pi_{\pm}^m(\alpha,\beta)=\chi_m(-\alpha^{m-1}+q_m^{\pm}\kappa_m^{\pm}).$$

下列定理给出了映射(1)的不动点的存在性和稳定性条件.

定理 2.1　当且仅当 $|\alpha|<1,\mu>0$ 时，映射(1)的线性部分有一个稳定不动点 $-\mu/(1-\alpha)$，当 $\beta>0$ 且 $-1<\alpha<1$ 时，映射(1)的非线性部分当且仅当 $\mu\in(-\nu+q_1^+\kappa_1^+,-\nu)$ 时有一个稳定不动点；当 $\beta>0$ 且 $\alpha\leqslant-1$ 时，映射(1)的非线性部分当且仅当 $\mu\in(-\nu+q_1^+\kappa_1^+,-\nu+q_1^-\kappa_1^-)$ 时有一个稳定不动点；当 $\beta<0$ 且 $-1<\alpha<1$ 时，映射(1)的非线性部分当且仅当 $\mu\in(-\nu+q_1^-\kappa_1^-,-\nu)$ 时有一个稳定不动点；当 $\beta<0$ 且 $\alpha\geqslant1$ 时，映射(1)的非线性部分当且仅当 $\mu\in(-\nu+q_1^-\kappa_1^-,-\nu+q_1^+\kappa_1^+)$ 时有一个稳定不动点.

定理的证明比较简单，为节省篇幅，本文在此省略. 接下来我们根据 β 和 ν 的正负不同，考虑映射(1)形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨的存在性，其中 $m\geqslant1$ 为整数. 我们的结果分为以下四个定理.

定理 2.2　设 $\beta<0,\nu=-1$. 若 $\alpha<0$ 且 $m\geqslant3$，或 $\alpha\leqslant-1$ 且 $m=2$，则映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定周期轨. 对于剩下的情况，我们有

(i) 若 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $m\geqslant2$，则当且仅当 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)<0$ 且 $\mu\in I_{11}$ 时，映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨，其中

$$I_{11}=(\Lambda_-^m(\alpha,\beta),0)\cap((-\infty,-\kappa_m^-)\cup\{\mu\in(-\kappa_m^-,0):\Upsilon_+^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{11}$，则该周期轨在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔，否则没有分岔现象发生.

(ii) 若 $\alpha>1$ 且 $m\geqslant2$，则当且仅当 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)<0$ 且 $\mu\in I_{12}$ 时，映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨，其中

$$I_{12}=(\Lambda_-^m(\alpha,\beta),\min(\Lambda_+^m(\alpha,\beta),0))\cap((-\infty,-\kappa_m^-)\cup\{\mu\in-\kappa_m^-,-\kappa_m^+):\Upsilon_+^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{12}$，则该周期轨在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔；如果 $\Lambda_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{12}$，则该周期轨在 $\mu=\Lambda_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔，否则没有分岔现象发生.

(iii) 若 $-1<\alpha<0$，则当且仅当 $\mu\in I_{13}$ 时，映射(1)恰好有一个形如 AB 的稳定 2-周期轨，其中

$$I_{13}=(\Lambda_+^2(\alpha,\beta),\alpha/(1+\alpha))\cap\{\mu\in(-\kappa_2^+,0):\Upsilon_+^2(\alpha,\beta,\mu)>0\}.$$

如果 $\Lambda_+^2(\alpha,\beta)\in\partial I_{13}$，则该周期轨在 $\mu=\Lambda_+^2(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔，否则没有分岔现象发生.

定理 2.3　设 $\beta>0$ 且 $\nu=-1$. 若 $\alpha\geqslant-1$，则对 $m\geqslant2$，映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨. 对于剩下的情况，我们有

(i) 若 $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant3$ 为奇数，则当且仅当 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)>0$ 且 $\mu\in I_{21}$ 时，映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨，其中

$$I_{21}=(\max(\Lambda_+^m(\alpha,\beta),0),\Lambda_-^m(\alpha,\beta))\cap((\delta_m^+,+\infty)\cup\{\mu\in(\delta_m^-,\delta_m^+):\Delta_+^m(\alpha,\beta,\mu)<0\}).$$

如果 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{21}$，则该周期轨在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔；如果 $\Lambda_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{21}$，则该周期轨在 $\mu=\Lambda_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔，否则没有分岔现象发生.

(ii) 若 $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant4$ 为偶数，则当且仅当 $\mu\in I_{22}$ 时，映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的

m-周期轨,其中

$$I_{22}=(\Lambda_+^m(\alpha,\beta),\Lambda_-^m(\alpha,\beta))\cap((\delta_m^-,+\infty)\cup\{\mu\in(\delta_m^+,\delta_m^-):\ \Delta_+^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{22}$,则该周期轨在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔;如果 $\Lambda_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{22}$,则该周期轨在 $\mu=\Lambda_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔,否则没有分岔现象发生.

(iii) 若 $\alpha<-1$,则当且仅当 $\mu\in(\Lambda_+^2(\alpha,\beta),\Lambda_-^2(\alpha,\beta))$ 时,映射(1)恰好有一个形如 AB 的稳定 2-周期轨,且该周期轨在 $\mu=\Lambda_+^2(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔,在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔.

定理 2.4 设 $\beta<0$ 且 $\nu=1$. 若 $\alpha<0$ 且 $m\geqslant3$,或 $\alpha\leqslant-1$ 且 $m=2$,映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨. 对于剩下的情况,我们有:

(i) 若 $0<\alpha\leqslant1$ 且 $m\geqslant2$,则当且仅当 $\mu\in I_{31}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨,其中

$$I_{31}=(\Pi_-^m(\alpha,\beta),\ -\alpha^{m-1}\chi_m)\ \cap\ ((-\infty,\ -\kappa_m^-)\cup\{\mu\in(-\kappa_m^-,0):\ \Upsilon_-^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Pi_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{31}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔,否则没有分岔现象发生.

(ii) 若 $\alpha>1$ 且 $m\geqslant2$,则当且仅当 $\mu\in I_{32}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨,其中

$$I_{32}=(\Pi_-^m(\alpha,\beta),\Pi_+^m(\alpha,\beta))\ \cap\ ((-\infty,\ -\kappa_m^-)\cup\{\mu\in(-\kappa_m^-,-\kappa_m^+):\ \Upsilon_-^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Pi_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{32}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔;如果 $\Pi_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{32}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔;否则没有分岔现象发生.

(iii) 若 $-1<\alpha<0$,则当且仅当 $\mu\in I_{33}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 AB 的稳定 2-周期轨,其中

$$I_{33}=(\Pi_+^2(\alpha,\beta),\ -\alpha/(1+\alpha))\ \cap\ \{\mathbf{R}_+\cup\{\mu\in(-\kappa_2^+,0):\ \Upsilon_-^2(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Pi_+^2(\alpha,\beta)\in\partial I_{33}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_+^2(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔,否则没有分岔现象发生.

定理 2.5 设 $\beta>0$ 且 $\nu=1$. 若 $-1\leqslant\alpha\leqslant0$ 且 $m\geqslant3$,或者 $\alpha\geqslant1$ 且 $m\geqslant2$,或者 $\alpha\leqslant-1$ 且 $m\geqslant3$ 为奇数,映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨. 对于剩下的情况,我们有

(i) 若 $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant4$ 为偶数,则当且仅当 $\mu\in I_{41}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨,其中

$$I_{41}=(\Pi_+^m(\alpha,\beta),\Pi_-^m(\alpha,\beta))\cap((\delta_m^-,+\infty)\cup\{\mu\in(\delta_m^+,\delta_m^-):\ \Delta_-^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}).$$

如果 $\Pi_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{41}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔;如果 $\Pi_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{41}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔;否则没有分岔现象发生.

(ii) 若 $0<\alpha<1$ 且 $m\geqslant2$,则当且仅当 $\mu\in I_{42}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 $A^{m-1}B$ 的稳定的 m-周期轨,其中

$$I_{42}=(\max(\Pi_+^m(\alpha,\beta),\ -1),\ -\alpha^{m-1}\chi_m)\ \cap((-\infty,-\kappa_m^+)\cup\{\mu\in(-\kappa_m^+,0):\ \Upsilon_-^m(\alpha,\beta,\mu)<0\}).$$

如果 $\Pi_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{42}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔,否则没有分岔现象发生.

(iii) 若 $-1<\alpha<0$,则当且仅当 $\mu\in I_{43}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 AB 的稳定 2-周期轨,其中

$$I_{43}=(\Pi_-^2(\alpha,\beta),\ -\alpha/(1+\alpha))\ \cap\ \{\mathbf{R}_+\cup\{\mu\in(-\kappa_2^-,0):\ \Upsilon_-^2(\alpha,\beta,\mu)<0\}).$$

如果 $\Pi_-^2(\alpha,\beta)\in\partial I_{43}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_-^2(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔,否则没有分岔现象发生.

(iv) 若 $\alpha<-1$,则当且仅当 $\mu\in I_{44}$ 时,映射(1)恰好有一个形如 AB 的稳定 2-周期轨,其中

$$I_{44}=(\Pi_+^2(\alpha,\beta),\Pi_-^2(\alpha,\beta)))\ \cap\ \{R_+\cup\{\mu\in(-\kappa_2^-,0):\ \Upsilon_-^2(\alpha,\beta,\mu)<0\}).$$

如果 $\Pi_-^2(\alpha,\beta)\in\partial I_{44}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_-^2(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔;如果 $\Pi_+^2(\alpha,\beta)\in\partial I_{44}$,则该周期轨在 $\mu=\Pi_+^2(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔,否则没有分岔现象发生.

3 主要结果的证明

本文只给出定理 2.2 的证明,定理 2.3~2.5 的证明是类似的.

定理 2.2 的证明 令 $\beta<0$ 且 $\nu=-1$. 我们考虑映射(1)的形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨的存在性,其中 $m\geqslant2$ 为整数. 不失一般性,假设第一个迭代点 $x_1>0$. 则形如 $A^{m-1}B/\alpha^{m-1}b$ 的 m-周期轨的存在性等价于存在一个映射(1)的迭代序列

$$x_1>0,\quad x_2<0,\quad \cdots,\quad x_m<0 \tag{2}$$

使得

$$x_2=\alpha x_1+\beta x_1^\gamma-(\mu-1) \tag{3}$$

$$x_j=\alpha x_{j-1}-\mu,\quad j=3,4,\cdots,m \tag{4}$$

$$x_1=\alpha x_m-\mu \tag{5}$$

从式(3~5)得

$$x_1=\alpha^m x_1+\alpha^{m-1}\beta x_1^\gamma-\left(\frac{\mu}{\chi_m}-\alpha^{m-1}\right) \tag{6}$$

由式(6)得

$$\frac{1}{\alpha^{m-1}\beta}\left(\frac{\mu}{\chi_m}-\alpha^{m-1}\right)=x_1^{\gamma}+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{\alpha^{m-1}\beta}\right)x_1:=\varphi_m(x_1,\alpha,\beta)\tag{7}$$

易见，形如 $A^{m-1}B/a^{m-1}b$ 的 m-周期轨的存在性等价于方程(7)存在一个解满足(2)和(3～5).

(i) 若 $\alpha<0$，我们先考虑 $m\geqslant3$ 的情况. 从式(2～5)可得形如 $A^{m-1}B/a^{m-1}b$ 的 m-周期轨存在的一个必要条件为

$$\mu>0,\ -\mu<x_3<0,\ \cdots,\ -\mu<x_m<0\tag{8}$$

从式(5)和(8)，得到 $-\mu<x_m=(x_1+\mu)/\alpha<0$. 因为 $\alpha<0$，故有 $x_1<-(1+\alpha)\mu$. 若 $\alpha\in[-1,0]$，则 $x_1<0$，与 $x_1>0$ 的假设矛盾. 故若 $-1\leqslant\alpha<0$，则对于 $m\geqslant3$，映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨.

现在我们假定 $\alpha<-1$. 易得 $A^{m-1}B/a^{m-1}b$ 型的 m-周期轨存在的一个必要条件为 $\mu>0$ 且 $0<x_1<-(1+\alpha)\mu$. 且 $A^{m-1}B/a^{m-1}b$ 型的 m-周期轨如果存在，则其特征值为 $\lambda=\alpha^m+\gamma\alpha^{m-1}\beta x_1^{\gamma-1}$. 若周期轨存在且稳定，则必有 $|\lambda|<1$，这等价于

$$-1-\alpha^m<\gamma\alpha^{m-1}\beta x_1^{\gamma-1}<1-\alpha^m\tag{9}$$

下面我们分两种情形讨论.

情形 1. $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant3$ 为奇数.

这种情形下，若周期轨存在且稳定，必有 $|\lambda|<1$，则

$$-1-\alpha^m<\gamma\alpha^{m-1}\beta x_1^{\gamma-1}<1-\alpha^m.$$

因为 $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant3$ 为奇数，故上式对 $x_1>0$ 不成立. 故映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨.

情形 2. $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant4$ 为偶数.

这种情况下，若周期轨存在且稳定，同样有 $|\lambda|<1$，即

$$-1-\alpha^m<\gamma\alpha^{m-1}\beta x_1^{\gamma-1}<1-\alpha^m.$$

因为 $\alpha<-1$ 且 $m\geqslant4$ 为偶数，故上式对 $x_1>0$ 也不成立. 故映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨. 因此，对于 $\alpha<0$ 和 $m\geqslant3$，映射(1)没有形如 $A^{m-1}B$ 的稳定 m-周期轨.

(ii) 若 $\alpha>0$，则从式(2～5)易得 $A^{m-1}B/a^{m-1}b$ ($m\geqslant2$)型的 m-周期轨存在的一个必要条件为 $\mu<0$ 且 $0<x_1<-\mu$. 以下也分两种情形进行讨论.

情形 1. $0<\alpha<1$ 且 $m\geqslant2$.

这种情形下，从(9)式可得 $0<x_1<\kappa_m^-$. 而且对 $x_1>0$，(7)式中的函数 $\varphi_m(x_1,\alpha,\beta)$ 为正且单调递增. 故 $A^{m-1}B$ 型稳定周期轨若存在，则要求 $\mu<0$ 且

$$0<\frac{1}{\alpha^{m-1}\beta}\left(\frac{\mu}{\chi_m}-\alpha^{m-1}\right)<\varphi_m(\kappa_m^-,\alpha,\beta),$$

故要求 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)<0$ 且 $\mu\in(\Lambda_-^m(\alpha,\beta),0)$. 另外，条件 $0<x_1<-\mu$ 也必须满足. 因此，若 $-\mu<\kappa_m^-$，映射(1)恰好有一个 $A^{m-1}B$ 型的稳定的 m-周期轨当且仅当 $0<x_1<-\mu$，即 $\mu<0$ 且

$$0<\frac{1}{\alpha^{m-1}\beta}\left(\frac{\mu}{\chi_m}-\alpha^{m-1}\right)<\varphi_m(-\mu,\alpha,\beta),$$

即

$$\mu\in(\Lambda_-^m(\alpha,\beta),0)\cap\{\mu\in(-\kappa_m^-,0):\Upsilon_+^m(\alpha,\beta,\mu)>0\}.$$

若 $-\mu>\kappa_m^-$，即 $\mu\in(-\infty,-\kappa_m^-)$，映射(1)恰好有一个 $A^{m-1}B$ 型的稳定的 m-周期轨当且仅当 $0<x_1<\kappa_m^-$，即 $\mu\in(\Lambda_-^m(\alpha,\beta),0)$，即

$$\mu\in(\Lambda_-^m(\alpha,\beta),0)\cap(-\infty,-\kappa_m^-).$$

因此我们证明了当且仅当 $\mu\in I_{11}$ 时，映射(1)恰有一个 $A^{m-1}B$ 型的稳定的 m-周期轨. 如果 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{11}$，则其对应的特征值为 $\lambda=-1$. 从而该周期轨在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔，否则没有分岔现象发生.

情形 2. $\alpha>1$ 且 $m\geqslant2$.

与情形 1 类似，我们可证明当且仅当 $\mu\in I_{12}$ 时，映射(1)恰有一个 $A^{m-1}B$ 型的稳定的 m-周期轨. 若 $\Lambda_-^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{12}$，则 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 对应的特征值为 $\lambda=-1$，周期轨在 $\mu=\Lambda_-^m(\alpha,\beta)$ 处发生倍周期分岔. 若 $\Lambda_+^m(\alpha,\beta)\in\partial I_{12}$，则 $\mu=\Lambda_+^m(\alpha,\beta)$ 对应的特征值为 $\lambda=1$，周期轨在 $\mu=\Lambda_+^m(\alpha,\beta)$ 处发生鞍结点分岔. 否则没有分岔现象发生.

(iii) 若 $\alpha<0$ 且 $m=2$，则从式(2～5)，易得 AB/ab 型的 2-周期轨存在的一个必要条件为 $x_1>-\mu$. 从式(9)，我们得到

$$-1-\alpha^2<\gamma\alpha\beta x_1^{\gamma-1}<1-\alpha^2\tag{10}$$

若 $\alpha\leqslant-1$，则式(10)对 $x_1>0$ 不成立. 因此当 $\alpha\leqslant-1$ 时，映射(1)没有形如 AB 的稳定 2-周期轨. 若 $-1<\alpha<0$，从式(10)可得 $0<x_1<\kappa_2^+$，且对 $x_1>0$，式(7)中的函数 $\varphi_2(x_1,\alpha,\beta)$ 为负且单调递减. 故 AB 型稳定周期轨若存在，则要求

$$x_1>0,\ -\mu<x_1<\kappa_2^+,\ \varphi_2(\kappa_2^+,\alpha,\beta)<\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{\chi_2}-\alpha\right)<0,$$

即

$$\mu\in(\Lambda_+^2(\alpha,\beta),\alpha/(1+\alpha))\cap\{\mu\in(-\kappa_2^+,0):\Upsilon_+^2(\alpha,\beta,\mu)>0\}),$$

因此，当且仅当 $\mu\in I_{13}$ 时，映射(1)恰有一个 AB 型

的稳定2-周期轨.若$\Lambda_{+}^{2}(\alpha,\beta)\in\partial I_{13}$,则周期轨在$\mu=\Lambda_{+}^{2}(\alpha,\beta)$处发生鞍结点分岔,否则没有分岔现象发生.证毕.

参考文献:

[1] Halse C, Homer M, di Bernardo M. C-bifurcations and period-adding in one-dimensional piecewise-smooth maps [J]. Chaos Soliton Fract, 2003, 18: 953.

[2] Colombo A, di Bernardo M, Hogan S J, *et al*. Bifurcations of piecewise smooth flows: perspectives, methodologies and open problems [J]. Physica D, 2012, 241: 1845.

[3] Du Z. Period-adding and the Farey tree structure in a class of one-dimensional discontinuous nonlinear maps [J]. Nonlinear Dynam, 2016, 84: 2211.

[4] 高俊明.倒置单摆在拟周期扰动下的同宿分岔[J].四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 11.

[5] Luo A C J. Discontinuous dynamical systems [J]. IEEE Contr Syst, 2008, 28: 36.

[6] di Bernardo M, Budd C, Champneys A, *et al*. Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications [J]. IEEE Contr Syst Mag, 2008, 28: 141.

[7] Hassouneh M A, Abed E H, Nusse H. Robust dangerous border-collision bifurcations in piecewise smooth systems [J]. Phys Rev Lett, 2004, 92: 2835.

[8] Makarenkov O, Lamb J S W. Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems [J]. Physica D, 2012, 241: 1826.

[9] di Bernardo M, Feigin M I, Hogan S J, *et al*. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems [J]. Chaos Soliton Fract, 1999, 10: 1881.

[10] Ott E. Chaos in Dynamical systems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[11] Dutta P, Routroy B, Banerjee S, *et al*. On the existence of low period orbits in n-dimensional piecewise linear discontinuous maps [J]. Nonlinear Dynam, 2008, 53: 369.

[12] Simpson D J W, Meiss J D. Aspects of bifurcation theory for piecewise-smooth continuous systems [J]. Physica D, 2012, 241: 1868.