

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2017.05.008

# 含时间参数的离散障碍期权偏微分 布朗模型的 Romberg 解法

成佩<sup>1</sup>, 严定琪<sup>2</sup>, 张瑜<sup>3</sup>

(1. 山西财经大学应用数学学院, 太原 030000; 2. 兰州大学数学与统计学院, 兰州 730000;  
3. 长治学院法律与经济学系, 长治 046000)

**摘要:** 为提高 down-and-out 离散障碍期权定价问题的求解精度, 降低计算复杂度, 本文提出一种具有离散时间参数的障碍期权偏微分布朗模型的 Romberg 求解方法. 首先, 本文将 down-and-out 离散障碍期权问题建模为带有时间参数的几何 Brownian 运动模型, 该模型采用与时间无关的对应时间变换进行偏微分方程的期权定价; 然后将得到的时间独立的偏微分方程转化为简单的热传导方程的积分形式, 并给出了离散障碍期权定价定理; 最后, 采用 Romberg 求解方法, 本文对离散障碍期权 Brownian 模型进行了求解. 数值试验结果验证了方法的有效性.

**关键词:** 离散障碍期权; 偏微分方程; 布朗模型; Romberg 求解法

**中图分类号:** O212      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0490-6756(2017)05-0941-06

## Romberg numerical method for partial differential Brownian model with time parameter for discrete barrier option

CHENG Pei<sup>1</sup>, YAN Ding-Qi<sup>2</sup>, ZHANG Yu<sup>3</sup>

(1. School of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance & Economics, Taiyuan 030000, China;  
2. School of Mathematics and Statistics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;  
3. Department of Law and Economics, Changzhi Colledge, Changzhi 046000, China)

**Abstract:** In order to improve the numerical precision of down-and-out discrete barrier option pricing problem and reduce the computational complexity, we present a Romberg method for solving partial differential Brownian model with discrete time parameter. Firstly, the down-and-out discrete barrier option is modeled by a geometric Brownian motion model with time varying parameters, which uses time independent transformation to make option pricing with partial differential equation. Then, the time independent partial differential equation is transformed into a simple form of heat conduction equation. Finally, the Romberg numerical method is used to solve the discrete barrier option Brownian model. An example is proposed to verify the effectiveness of the method.

**Keywords:** Discrete barrier option; Partial differential equation; Brownian model; Romberg solution

# 1 引言

近年来,针对不同的市场需求,金融机构提出了不同的新型期权,障碍期权(亦称作门槛期权)即是其中的一种<sup>[1-2]</sup>. 障碍期权一般分为敲入和敲出期权<sup>[3-4]</sup>,前者是资产标的价格到达特定障碍时,期权存在,而后者正好相反.

在美式障碍期权中,由于股票价格与时间路径的不确定性,为其定价具有较高难度,不易获得闭环解,因而通常采用数值方法进行求解. 经典的期权定价数值方法有蒙特卡罗和树图方法<sup>[5-6]</sup>,如二叉、三叉树等. 其中,树图障碍期权方法的问题主要是存在非常大的计算误差<sup>[7]</sup>,其原因是真实障碍与树图障碍的差异. 资产标的定价会呈现偶发的“跳跃”现象,主要原因是突发事件,如人为投机、政策调整、破产等. 为克服这个问题,文献[8]设计了二叉树的期权定价限制方法. 该方法虽然实现了资产标的与期权障碍的近似收敛,但当价格与障碍水平接近时计算收敛时间较长. 此外,文献[9]设计了基于最小二乘算法的蒙特卡罗期权定价方法,证明了该方法在低维情况下可利用序列确定性代替伪随机序列,以实现误差的降低. 该方法虽采用插值方法来克服障碍问题,但该算法同样存在收敛性问题.

在本文中,我们尝试将 down-and-out 离散障碍期权问题建模为含时变参数的几何布朗运动,并采用与时间无关的对应时间变换进行偏微分方程的期权定价. 然后,我们将得到的时间独立的偏微分方程转化为简单的热传导方程积分形式. 最后,采用 Romberg 求解法实现了离散障碍期权布朗模型精确求解.

# 2 模型描述

由于外汇看涨期权定价总和等于简单的欧式期权定价,因此仅研究其中之一即可,其他种类的障碍期权,如看跌期权,可以使用买入看涨期权定价.

假设标的股票的价格可利用随机过程  $X_t$  表示,遵循布朗几何运动(GBM)过程<sup>[10,11]</sup>:

$$dX_t = (\rho(t) - D(t))X_t dt + \sigma(t)X_t dW_t^Q \quad (1)$$

其中,  $X(0) = x_0$ , 随机过程  $W_t^Q$  是在风险中性测度  $Q$  和确定性函数  $\rho(t)$  情况下的标准布朗运动,这里  $\rho(t)$  是随时间变化的无风险利率,  $D(t)$  为一定时间内的单位股息,  $\sigma(t)$  是时间依赖的瞬时波

动. 考虑单调递增的监测日期,形式为

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T \quad (2)$$

假定  $L$  和  $E$  分别是较低壁垒价格和行权价格,  $P_b = P_b(x, t, n)$  代表看涨期权价格,  $x$  表示时间段  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  内的股票价格. 根据著名的 Black-Scholes 偏微分方程<sup>[12,13]</sup>, 期权价格满足如下关系表达式:

$$-\frac{\partial P_b}{\partial t} + (\rho(t) - D(t))x \frac{\partial P_b}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)x^2 \frac{\partial^2 P_b}{\partial x^2} - \rho(t)P_b = 0 \quad (3)$$

初值条件为

$$\begin{cases} P_b(x, T, 0) = (x - E)1_{(x \geq \max\{E, L\})}, n = N, \\ P_b(x, t_{N-n}, N - n - 1) = \\ P_b(x, t_{N-n}, N - n)1_{(x \geq L)}, n = 1, 2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

本文主要研究初始时间  $t = 0$  未知的期权价格问题,因而还必须从最终到期日  $T$  的期权支付条件出发求解逆向偏微分方程,以获得时间零点的期权价格. 为寻找到离散障碍期权价格(基于上下障碍期权定义),在每个监测日期中必须有以下初始条件:

$$\begin{cases} P_b(x, t_0, 0) = (x - E)1_{(x \geq \max\{E, L\})}, n = 0 \\ P_b(x, t_n, n) = P_b(x, t_n, n - 1)1_{(x \geq L)}, \\ n = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (4)$$

其中  $1_{(x \geq L)}$  是特征函数,即当  $x \geq L$  时,  $1_{(x \geq L)} = 1$ , 当  $x < L$  时,  $1_{(x \geq L)} = 0$ ,  $P_b(x, t_n, n)$  可定义为

$$P_b(x, t_n, n - 1) := \lim_{t \rightarrow t_n} P_b(x, t, n - 1) \quad (5)$$

为将式(3)中的时变参数转换为固定参数,我们分别给出期权价格、股价和时间三个变量的变化形式为

$$\begin{cases} P_b(x, t, n) = h_n(t)\bar{P}_b(\bar{x}, \bar{t}, n) \\ \bar{x} = \varphi_n(t)x, \bar{t} = \psi_n(t) \end{cases} \quad (6)$$

在式(6)中,函数  $h_n$ 、 $\varphi_n$  和  $\psi_n$  是未知的,通过这些函数可在每个监测间隔内将偏微分方程式(3)转化为常系数偏微分方程. 利用链规则,可给出  $\frac{\partial P_b}{\partial t}$ ,

$$\frac{\partial P_b}{\partial x} \text{ 和 } \frac{\partial^2 P_b}{\partial x^2} \text{ 形式为}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_b}{\partial t} &= \frac{\partial h_n(t)\bar{P}_b}{\partial t} = h_n^r(t)\bar{P}_b + \\ &h_n(t)\left(\frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{t}}\psi_n'(t) + \frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{x}}\varphi_n'(t)x\right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_b}{\partial x} = \frac{\partial (h_n(t)\bar{P}_b)}{\partial x} = h_n(t)\varphi_n(t)\frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{x}} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 P_b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (h_n(t)\bar{P}_b)}{\partial x^2} = h_n(t)\varphi_n(t)^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_b}{\partial \bar{x}^2} \quad (9)$$

利用上述变量, 可将偏微分方程式(3)改写为

$$-\frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{t}} + \left( \frac{-\varphi_n^r(t) + (\rho(t) - D(t))\varphi_n(t)}{\psi_n(t)} x \right) \frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{x}} + \frac{\sigma^2(t)\varphi_n(t)^2}{2\psi_n^2(t)} x^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_b}{\partial \bar{x}^2} = \bar{P}_b \left( \frac{h_n'(t)}{h_n(t)\psi_n'(t)} + \frac{\rho(t)}{\psi_n(t)} \right) \quad (10)$$

对于上述常数方程的系数, 对  $\rho_n$  和  $\sigma_n$  可得如下方程:

$$P_{n\bar{x}} = \frac{-\varphi_n'(t) + (\rho(t) - D(t))\varphi_n(t)}{\psi_n'(t)} x \frac{1}{2} \sigma_n^2 \bar{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(t)\varphi_n(t)^2}{\psi_n^2(t)} x^2, \rho_n = \frac{h_n'(t)}{h_n(t)\psi_n'(t)} + \frac{\rho(t)}{\psi_n(t)} \quad (11)$$

对上述方程求解, 可得

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = B_n \exp\left(\int_{t_n}^t ((\rho(u) - D(u)) - \rho_n\psi_n'(u)) du\right), \\ \psi_n(t) = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{t_n}^t \sigma^2(u) du + A_n, \\ h_n(t) = C_n \exp\int_{t_n}^t (\rho_n\psi_n'(u) - \rho(u)) du \end{cases} \quad (12)$$

因此, 函数  $h_n(t)$ 、 $\psi_n(t)$  和  $\varphi_n(t)$  的一般形式可在监测区间  $[t_n, t_{n+1}]$  内获得. 通过这种变换, 偏微分方程式(3)可转化为如下偏微分方程:

$$-\frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{t}} + \rho_n \bar{x} \frac{\partial \bar{P}_b}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \sigma_n^2 \bar{x}^2 \frac{\partial^2 \bar{P}_b}{\partial \bar{x}^2} - \rho_n \bar{P}_b = 0 \quad (13)$$

其中  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . 选取新的常量值  $A_n, B_n, C_n, \rho_n$  和  $\sigma_n$ , 使得条件式(4)满足. 首先, 我们尝试确定固定值  $A_0, B_0$  和  $C_0$ , 然后根据式(12), 考虑  $B_0 = 1$ , 可得到  $\varphi_0(t_0) = 1$ , 由此可得

$$\begin{aligned} (\bar{x} - E) D 1_{(x \geq \max(E, L))} &= \\ (\bar{\omega}_n(t_0)x - E) 1_{(\bar{\omega}_n(t_0)x \geq \max(E, L))} &= \\ (x - E) 1_{(x \geq \max(K, L))} & \end{aligned} \quad (14)$$

根据式(12), 设定  $C_0 = 1$ , 则可得  $h_0(t_0) = 1$ , 从而有如下等式:

$$P_b(\bar{x}, \bar{t}_0, 0) = \frac{P_b(x, t_0, 0)}{h_0(t_0)} = P_b(x, t_0, 0) \quad (15)$$

考虑  $A_0 = 0$ , 可得  $\bar{t}_0 = \psi_0(t_0) = 0$ .  $\bar{t}$  的起始点与时间变量  $t$  一致. 然后, 确定其他常量  $A_n, B_n, C_n$ , 因此, 根据式(4)的第二个条件, 可得式(6)成立, 并对式(6)左侧进行修改, 可得

$$P_b(\bar{x}, \bar{t}_n, n) = \frac{P_b(x, t_n, n)}{h_n(t_n)},$$

$$\bar{x} = \varphi_n(t_n)x, \bar{t}_n = \psi_n(t_n) \quad (16)$$

对式(6)右侧进行修改, 可得

$$\begin{cases} P_b(\bar{x}, \bar{t}_n, n-1) 1_{(x \geq L)} = \\ \frac{P_b(x, t_n, n-1)}{h_{n-1}(t_n)} 1_{(\omega_{n-1}(t_n)x \geq L)}, \\ \bar{x} = \bar{\omega}_{n-1}(t_n)x, \bar{t}_n = \psi_{n-1}(t_n) \end{cases} \quad (17)$$

因此, 如果考虑以下关于  $h_n(t)$ 、 $\varphi_n(t)$  和  $\psi_n(t)$  的假设, 则所需的等价性可以保证.

$$\begin{cases} \varphi_{n-1}(t_n) = \varphi_n(t_n) = 1, \\ \psi_{n-1}(t_n) = \psi_n(t_n), \\ h_n(t_n) = h_{n-1}(t_n) \end{cases} \quad (18)$$

### 3 期权定价

**定理 3.1** 如果在每个监测时间间隔考虑条件

$$\begin{cases} A_n = t_n, n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \sigma_n^2 = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma^2(u) du, n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (19)$$

则等式  $\psi_{n-1}(t_n) = \psi_n(t_n)$  成立.

**证明** 应用  $\psi_n(t)$  的定义, 可得

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}(t_n) &= \frac{1}{\sigma_{n-1}^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma^2(u) du + A_{n-1} = \\ &= \frac{\int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma^2(u) du}{\frac{1}{t_n - t_{n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma^2(u) du} + t_{n-1} = t_n = \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma^2(u) du + A_n = \psi_n(t_n) \end{aligned} \quad (20)$$

因此, 对于每个监测日期, 值  $\sigma_n^2$  可认为是该区间波动平方的均值.

**定理 3.2** 对于每监测时间间隔考虑条件

$$\begin{cases} B_n = 1, n = 1, 2, \dots, N-1, \\ \rho_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\rho(u) - D(u)) du, \\ n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (21)$$

等式  $\varphi_{n-1}(t_n) = \varphi_n(t_n) = 1$  成立. 此外, 对于等式  $h_n(t_n) = h_{n-1}(t_n)$ , 可得常数  $C_n$  的形式为

$$C_n = C_{n-1} \exp\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((\rho(u) - D(u)) - \rho_n\psi_n'(u)) du\right) \quad (22)$$

$n = 1, 2, \dots, N-1$ .

**证明** 基于函数  $\psi_n(t)$  和  $\varphi_n(t)$  可得

$$\varphi_{n-1}(t_n) = B_{n-1} \exp\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} ((\rho(u) - D(u)) - \rho_{n-1}\psi_{n-1}'(u)) du\right)$$

$$\rho_{n-1}\phi'_{n-1}(u)du = \exp\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (\rho(u) - D(u))du\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\rho(u) - D(u))du = 1 \tag{23}$$

由此可得

$$\varphi_n(t_n) = B_n \exp\left(\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\rho(u) - D(u)) - \rho_n\phi'_n(u)\right)du\right) = 1 \tag{24}$$

同理,根据  $h_n(t)$  的定义可证明定理 3.2 的第二部分成立. 证毕.

如前所述,选取  $\rho_n$  作为在第  $n$  个监测时间区间  $[t_n, t_{n+1}]$  上  $\rho(t) - D(t)$  的均值,偏微分方程(3)和初始条件式(4)可转化为偏微分方程(13). 值得注意的是,在此转换下,监测日期、股票价格和期权价格保持不变. 我们需要对偏微分方程式(13)进行求解,以获得  $\bar{P}_b(\bar{x}, T, N-1)$ . 对此,在每个监测时间区间内执行下列常规转换:

$$\begin{cases} \bar{P}_b(\bar{x}, \bar{t}, n) = W(z, \bar{t}, n), \\ z = \ln(\frac{\bar{x}}{L}), k = \ln(\frac{E}{L}) \end{cases} \tag{25}$$

利用  $W(z, \bar{t}, n)$  对偏微分方程式(13)进行改写,可得

$$-\frac{\partial W}{\partial \bar{t}} + m_n \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\sigma_n^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \rho_n W = 0 \tag{26}$$

进而可得  $m_n = \rho_n - \frac{\sigma_n^2}{2}$ , 且

$$\begin{cases} W(z, \bar{t}_0, 0) = L(e^z - e^k)1_{(z \geq \delta)}, \\ W(z, \bar{t}_n, n) = W(z, \bar{t}_{n-1}, n-1)1_{(z \geq 0)} \end{cases} \tag{27}$$

其中  $\delta = \max\{k, 0\}, n = 1, 2, \dots, N-1$ . 对于每个监测区间,进一步转换得

$$W(z, \bar{t}, n) = e^{\alpha_n z + \beta_n \bar{t}} g(z, \bar{t}, n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{28}$$

可定义  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  形式为

$$\alpha_n = -\frac{m_n}{\sigma_n^2}, \beta_n = \alpha_n m_n + \alpha_n^2 \frac{\sigma_n^2}{2} - \rho_n \tag{29}$$

考虑  $g(z, \bar{t}, n)$ . 对式(26)进行改写,可得热传导方程

$$-\frac{\partial g}{\partial \bar{t}} + \hat{C}_n^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0, \hat{C}_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{2} \tag{30}$$

这里  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . 根据(4)式初始条件可得如下初始条件:

$$\begin{cases} g(z, \bar{t}_0, 0) = L e^{-\alpha_0 z} (e^z - e^k) 1_{(z \geq \delta)}, \\ \delta = \max\{k, 0\}, \\ g(z, \bar{t}_n, n) = g(z, \bar{t}_{n-1}, n-1) \exp\{z(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + (\beta_{n-1} - \beta_n)\bar{t}_n\} 1_{(z \geq 0)} \end{cases} \tag{31}$$

其中  $1 \leq n \leq N-1$ . 上述偏微分方程对于每个时间区间  $\bar{t} = [\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$  具有唯一的解析解

$$g(z, \bar{t}, n) = \begin{cases} L \int_0^\infty S_n(z - \xi, \bar{t} - \bar{t}_n) e^{-\alpha \xi} (e^\xi - e^k) 1_{(\xi \geq \delta)} d\xi, \\ \int_0^\infty S_n(z - \xi, \bar{t} - \bar{t}_n) g(\xi, \bar{t}_n, n-1) \cdot e^{\xi \Delta \alpha_n + \Delta \beta_n \bar{t}_n} 1_{(\xi \geq 0)} d\xi \end{cases} \tag{32}$$

其中,

$$\Delta \alpha_n = \alpha_{n-1} - \alpha_n, \Delta \beta_n = \beta_{n-1} - \beta_n,$$

核函数  $S_n(z, \bar{t})$  为高斯分布函数 ( $N(0, \sqrt{4\hat{C}_n^2 \bar{t}})$ ), 即

$$S_n(z, \bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\hat{C}_n^2 \bar{t}}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\hat{C}_n^2 \bar{t}}\right) \tag{33}$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$ . 根据得到的结果,在监测日期的离散障碍期权定价定理为

**定理 3.3** 在股票价格为  $x$ 、行权价格为  $E$ , 障碍水平为  $L$  情况下,离散监测日期  $t = t_{n+1}$  的障碍期权定价为

$$P_b(x, t_{n+1}, n) = g\left(\ln\left(\frac{x}{L}\right), t_{n+1}, n\right) \exp\left\{\alpha_n \ln\left(\frac{x}{L}\right) + \beta_n t_{n+1}\right\} \tag{34}$$

这里  $n = 0, 1, \dots, N-1, \alpha_n$  和  $\beta_n$  的定义见式(29),  $g(z, t_{n+1}, n)$  可利用式(32)进行计算.

### 4 Romberg 数值算法

采用反向数值迭代算法计算  $g(z_0, \bar{t}_{N+1}, N)$ , 并将其作为  $N$  个监测日期后的离散障碍期权最终定价. 因为式(32)中的所有积分函数均具有指数衰减特性的高斯分布函数  $S_n(z - \xi, \tau)$ , 选取合适的  $l_n$ , 半无限区间  $[\max(0, z - l_n), z + l_n]$  中的不恰当积分就可以近似为区间  $[\max(\delta, z - l_n), z + l_n]$  和上的恰当积分,如图 1 所示.

图 1 示出了监测点  $Z$  的离散障碍期权积分函数图像,随着  $Z$  值的增加,这些高斯图的最大值急剧增长. 图 2 示出了监测点  $Z$  的离散障碍期权积分函数图像,部分区间内指数衰减积分域图不恰当. 利用式(32)定义新的积分边界,可计算如下近似:

$$g(z, \bar{t}, n) \cong \begin{cases} L \int_{\max(\delta, z-l_n)}^{z+l_n} S_n(z - \xi, \bar{t} - \bar{t}_n) e^{-\alpha \xi} (e^\xi - e^k) d\xi, \\ \int_{\max(0, z-l_n)}^{z+l_n} S_n(z - \zeta, \bar{t} - \bar{t}_n) g(\xi, \bar{t}_n, n-1) \cdot e^{\xi \Delta \alpha_n + \Delta \beta_n \bar{t}_n} d\xi \end{cases} \tag{35}$$

很多数值积分方法可以应用于计算上述积分, 但为了减少计算复杂度, 这里选用 Romberg 方法, 但需要注意如下计算过程:

(i) 为计算  $g(z_0, \bar{t}_N, N-1)$ , 需要获知  $g(\xi, \bar{t}_{N-1}, N-2)$ , 其中  $\xi \in I_{N-1} = [\max(0, z_0 - l_{N-1}), z_0 + l_{N-1}]$ ;

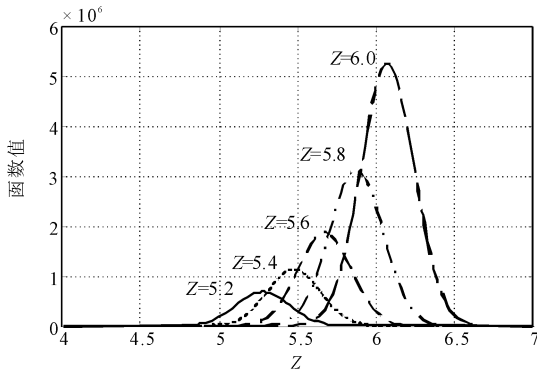


图 1 恰当积分分布图

Fig. 1 Proper integral distribution

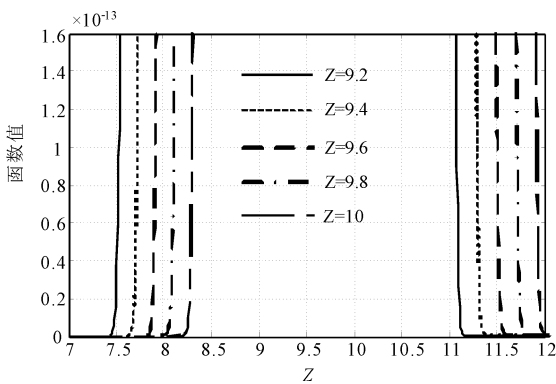


图 2 不恰当积分分布图

Fig. 2 Improper integral distribution

(ii) 类似地, 在  $z \in I_{N-1}$  情况下, 为计算  $g(z, \bar{t}_{N-1}, N-2)$ , 需要获知  $g(\xi, \bar{t}_{N-2}, N-3)$ , 其中  $\xi \in$

$I_{N-2} = [\max(0, z - l_{N-2}), z + l_{N-2}]$ . 因此,  $g(\xi, \bar{t}_{N-2}, N-3)$  需要下式进行计算:

$$I_{N-2} = [\max(0, z_0 - l_{N-1} - l_{N-2}), z_0 + l_{N-1} + l_{N-2}] \tag{36}$$

(iii) 为计算  $g(z, \bar{t}_2, 1)$ , 其中  $z \in I_2$ , 需在以下区间计算

$$g(\zeta, \bar{t}_1, 0) = L \int_0^\infty S_1(\zeta - \xi, \tau) e^{-a\zeta} (e^\zeta - e^k) 1_{(\zeta \geq \delta)} d\xi;$$

$$\zeta \in I_1 = [\max(0, z_0 - \sum_{i=1}^{N-1} l_i), z_0 + \sum_{i=1}^{N-1} l_i] \tag{37}$$

在式 (35) 中计算相对于变量  $\xi = \ln(\frac{\bar{x}}{L})$  的积分时, 为了评价第  $n$  步的  $g(z, \bar{t}_n, n-1)$ , 应考虑以下时间间隔内如何选择合适的  $U$  作为上界.

$$I_n = \begin{cases} \max(\delta, z_0 - \sum_{i=1}^{N-1} l_i), \max(z_0 + \sum_{i=1}^{N-1} l_i, U), & n = 0 \\ \max(0, z_0 - \sum_{i=1}^{N-1} l_i), \max(z_0 + \sum_{i=1}^{N-1} l_i, U), & n \neq 0 \end{cases} \tag{38}$$

### 5 数值实例

下面以欧式看涨障碍期权为例, 对不同模拟算法获得的方差及其缩减指标进行对比. 考虑如表 1 所示的 down-and-out 离散障碍期权问题<sup>[14,15]</sup>, 参数取值为: 股票价格为 100, 行权价格为 100,  $\rho = 0.1, \sigma = 0.3$ , 到期时间  $T = 0.2$ . 对比算法分别选取递归积分(RI)、连续监测公式(CC)、二叉树方法(TT)、辛普森求积法(SQ)、Monte Carlo 方法(MC)、解析解方法(AS).

表 1 障碍期权合约定价

Tab. 1 Pricing of barrier option contracts

N	L	本方法	RI	TT	SQ	MC	AS	CC
5	89	6.28075513	6.2763	6.281	6.2809	6.28092	6.28076	6.284
5	95	5.67110494	5.6667	5.671	5.6712	5.67124	5.67111	5.646
5	97	5.16724501	5.1628	5.167	5.1675	5.16739	5.16725	5.028
5	99	4.48917224	4.4848	4.489	4.4894	4.48931	4.48917	4.050
25	89	6.20979224	6.2003	6.210	6.2101	6.21059	6.20995	6.210
25	95	5.08124991	5.0719	5.081	5.0815	5.08203	5.08142	5.084
25	97	4.11594901	4.1064	4.115	4.1160	4.11621	4.11582	4.113
25	99	2.81259931	2.8036	2.812	2.8128	2.81261	2.81244	2.673
计算时间均值		5.346	9.752	10.492	9.817	9.184	8.941	5.639

由表 1 可知,在算例中,本方法的计算结果与对比算法相比结果更为接近. 这表明本方法具有更高的期权模型定价精度. 从计算时间均值上看,本文算法计算时间较少,具有较高的计算效率.

下面选取 Monte Carlo 模拟方法进行细化参数对比. 设定 Monte Carlo 期权定价的参数为  $\sigma = 0.15, r = 0.05, T = 1, m = 50, \rho = 0.1$ , 并选择 500 个模拟路径. 在障碍值的敲定价格选取不同值

情形下,对本方法和 Monte Carlo 方法进行对比,参见表 2.

如表 2 所示,本文的障碍期权定价相对于 Monte Carlo 方法的精度更高,模拟定价同理论定价之间的误差保持在 15% 左右. 而采用重要性抽样、条件期望、对偶变量、矩匹配不同策略的 Monte Carlo 方法的精度均为低于本方法.

表 2 Monte Carlo 障碍期权定价

Tab. 2 Monte Carlo barrier option pricing

障碍值/美元	敲定价格/美元	理论值	期权价格/美元				
			本文方法	Monte Carlo 方法			
				重要性抽样	条件期望	对偶变量	矩匹配
92	100	2.693	2.691	2.633	2.254	2.483	2.437
92	105	1.625	1.615	1.435	1.576	1.441	1.673
88	96	1.286	1.293	1.557	1.154	1.141	1.119
85	90	1.009	1.104	1.025	0.832	0.875	1.002
85	105	0.121	0.118	0.104	0.141	0.109	0.139

参考文献:

[1] 葛东娇, 文丹丹, 戴朝娟, 等. 基于 Copula-GARCH MMBP 的 Monte Carlo 期权定价方法[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 944.

[2] 孙玉东, 王秀芬. 基于美式障碍期权定价的非线性变分不等式问题[J]. 高校应用数学学报, 2015, 30: 43.

[3] Sun Y, Shi Y M, Gu X. An integro-differential parabolic variational inequality arising from the valuation of double barrier American option [J]. J Syst Sci Complex, 2014, 27: 276.

[4] Nouri K, Abbasi B, Omid F, et al. Digital barrier options pricing: an improved Monte Carlo algorithm [J]. Math Sci, 2016, 10: 65.

[5] Rostan P, Rostan A, Francois-Éric Racicot. A Probabilistic Monte Carlo model for pricing discrete barrier and compound real options [J]. J Deriv Hedge Funds, 2014, 20: 113.

[6] Aunins A W, Petty J T, King T L, et al. River mainstem thermal regimes influence population structuring within an appalachian brook trout population [J]. Conserv Genet, 2015, 16: 15.

[7] 彭斌, 彭维. 双重障碍期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46: 31.

[8] Golbabai A, Ballestra L V, Ahmadian D. A highly accurate finite element method to price discrete double barrier options [J]. Comput Econ, 2014, 44: 153.

[9] Chan L, Zhu S P. An explicit analytic formula for pricing barrier options with regime switching [J]. Math Financ Econ, 2015, 9: 29.

[10] 赖莉, 屠浙, 罗懋康. 色噪声环境下系统记忆性对分数阶布朗马达合作运输特性的影响[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 705.

[11] 王维滨, 罗懋康. 分数阶随机微分方程的修正隐式数值格式[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2015, 52: 451.

[12] Khatskevich V L. Some properties of Legendre polynomials and an approximate solution of the Black-Scholes equation governing option pricing [J]. Diff Equat+, 2015, 51: 1157.

[13] El-Nabulsi R A. Fractional functional with two occurrences of integrals and asymptotic optimal change of drift in the Black-Scholes model [J]. Acta Math Vietnam, 2015, 40: 689.

[14] Fusai G, Recchioni M C. Analysis of quadrature methods for pricing discrete barrier options [J]. J Econom Dynam Control, 2008, 31, 826.

[15] Zhang L H, Zhang W G, Xu W J, et al. A modified least-squares simulation approach to value american barrier options [J]. Comput Econ, 2014, 44: 489.