doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.01.008

对一般滤子情形下 SLQ 问题最优反馈的刻画

任 燕
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘 要：控制论中的一个基本问题是为系统设计反馈最优控制. 这已在 LQ 问题中得到了很好的实现. 但是,在已有的文献中,对这一问题的随机情形的讨论多集中在自然滤子情形. 本文应用转置解这一概念在一般滤子情形下给出了带随机系数的 SLQ 问题最优反馈控制存在的充分条件，证明了对一维控制问题而言这还是必要条件.

关键词：随机线性二次问题；反馈控制；一般滤子；转置解
中图分类号：O231.3 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)01-0042-07

Characterization of optimal feedback for SLQ with general filtration

REN Yan
(College of Mathematics，Sichuan University，Chengdu 610064，China)

Abstract：In control theory，one of the fundamental issues is to design feedback controls，which is well achieved in the case of linear quadratic control problems. To date，the study of this problem in the stochastic setting is focused much on the natural filtration. In this paper，we utilize the notion of transposition solution to give a sufficient condition for the existence of an optimal feedback control for the stochastic linear quadratic control problems with random coefficients in the general filtration setting，and we also show that it is also necessary for 1-D system.

Keywords：Stochastic linear quadratic problems；Feedback control；General filtration；Transposition solution

1 引 言

在控制理论中,为受控系统设计反馈控制是一个重要的基本问题. 对确定情形下的线性二次最优控制问题(简称为 LQ 问题)，在一些必要的假设下，人们通过引入 Riccati 方程建立了 LQ 问题的可解性与其对应的 Riccati 方程的可解性之间的联系，然后利用该 Riccati 方程的解为该系统设计反馈控制. 对随机情形下的 LQ 问题(简称为 SLQ 问题)，已有大量的文献，比如文献[1～18]等. 在对 SLQ 问题的研究中，Riccati 方程仍是一个重要的基本工具. 在研究 SLQ 问题的早期工作中，比如文献[3,18]中，无论是状态方程还是代价泛函的系数都假设为确定性系数，此时与之对应的 Riccati 方程还是倒向的常微分方程.

自文献[1]开始，人们开始研究带随机系数的 SLQ 问题. 此时与之对应的 Riccati 方程则是一个倒向的随机微分方程. 对这个方程的适定性，文献[11]对扩散项不含控制的情形给出了结果. 之后的文献[14]对扩散项含控制的情形也给出了结

收稿日期：2017-05-08
基金项目：国家自然科学基金(11401404)
作者简介：任燕(1991－)，男，陕西汉中人，硕士研究生，主要研究方向为分布参数系统控制理论，E-mail：yan9ren@gmail.com

果，且文献[14]在一些假设下得到的解 $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ 所在空间为 $L_F^\infty(0,T;S(\mathbf{R}^n))\times L_F^p(\Omega;L^2(0,T;S(\mathbf{R}^n)))(\forall p\in[1,\infty))$，但是在这个解空间上做出的反馈不能抗干扰. 之后的文献[7]在一定假设下通过直接建立最优反馈算子的存在性与对应的倒向随机 Riccati 方程(简称为 BSRE)可解性之间的等价关系，对(具有抗干扰的)最优反馈算子给出了刻画，说明了是否存在这样的反馈完全取决于其对应的 BSRE 是否可解(其解还需满足一些条件). 对比确定情形，在那里 Riccati 方程可解只是可以构造反馈的一种情形而已. 文献[7]还通过一个反例说明了 SLQ 问题即便可解(但其解不满足某些条件)也可能不存在(具有抗干扰的)反馈控制.

以上是在自然滤子情形下的结果. 尽管在通常的文献中常常假定自然滤子条件，然而从数学上讲，一般滤子才应当是更为自然的条件. 这是因为,对任意给定的一个滤子，往往很难验证它是由哪一个 Brown 运动生成的. 比如,在金融领域内对完全有效市场假设一直都存在质疑，而一个非完全有效市场的假设在数学上就需要用一般滤子来描述.

那么，在一般滤子情形下是否也有类似文献[7]那样对反馈控制的刻画? 注意到当 F 为一般滤子时，由 Brown 运动 $W(\cdot)$ 生成的自然滤子 W 可能只是 F 的一个子类,因此此时鞅表示定理将失效，从而对倒向随机微分方程的 Itô 公式也将不再适用. 本文将应用文献[8]提出的转置解这一概念来克服以上提到的困难，给出在一般滤子情形下带随机系数的 SLQ 问题最优反馈的刻画.

设 $T>0$，$(\Omega,\mathcal{F},F,P)$ 为一个完备的带滤子 $F=\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ 的概率空间，其中 F 右连续，$\{W(t)\}_{t\in[0,T]}$ 为定义在其上的一个 1-维标准 Brown 运动.

我们先引入一些记号. 对任意的 $k\in\mathbf{N}$，$t\in[0,T]$ 以及 $r\in[1,\infty)$，记

$L_{\mathcal{F}_t}^r(\Omega;\mathbf{R}^k)\triangleq\{\xi:\Omega\to\mathbf{R}^k\mid\xi$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测，且 $E|\xi|_{R^k}^r<\infty\}$，

$L_F^r(\Omega;C([t,T];\mathbf{R}^k))\triangleq\{\varphi:(t,T)\times\Omega\to\mathbf{R}^k\mid\varphi(\cdot)$ 关于 F 适应. 连续，且 $E\sup\limits_{\tau\in[t,T]}|\varphi(\tau)|_{\mathbf{R}^k}^r<\infty\}$，

$D_F(t,T;L^r(\Omega;\mathbf{R}^k))\triangleq\{\varphi:(t,T)\times\Omega\to\mathbf{R}^k\mid\varphi(\cdot)$ 关于 F 适应，且 $\varphi(\cdot):[t,T]\to L_{\mathcal{F}_T}^r(\Omega;\mathbf{R}^k)$ 左极右连$\}$.

容易验证 $L_{\mathcal{F}_t}^r(\Omega;\mathbf{R}^k)$，$L_F^r(\Omega;C([t,T];\mathbf{R}^k))$ 以及 $D_F(t,T;L^r(\Omega;\mathbf{R}^k))$ 都为 Banach 空间，其上的范数为标准范数. 对任意固定的 $r_1,r_2,r_3,r_4\in[1,\infty)$，记

$L_{\mathcal{F}}^{r_1}(\Omega;L^{r_2}(t,T;\mathbf{R}^k))\triangleq\{\varphi:(t,T)\times\Omega\to\mathbf{R}^k\mid\varphi(\cdot)$ 关于 F 适应，且 $E\left(\int_t^T|\varphi(\tau)|_{\mathbf{R}^k}^{r_2}\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{r_1}{r_2}}<\infty\}$，

$L_{\mathcal{F}}^{r_2}(t,T;L^{r_1}(\Omega;\mathbf{R}^k))\triangleq\{\varphi:(t,T)\times\Omega\to\mathbf{R}^k\mid\varphi(\cdot)$ 关于 F 适应，且 $\int_t^T\left(E|\varphi(\tau)|_{\mathbf{R}^k}^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\mathrm{d}\tau<\infty\}$.

容易验证 $L_F^{r_1}(\Omega;L^{r_2}(t,T;\mathbf{R}^k))$ 以及 $L_F^{r_2}(t,T;L^{r_1}(\Omega;\mathbf{R}^k))$ 都为 Banach 空间，其上的范数为标准范数. 类似地，可以定义 $L_F^\infty(\Omega;L^{r_2}(t,T;\mathbf{R}^k))$，$L_F^{r_1}(\Omega;L^\infty(t,T;\mathbf{R}^k))$ 以及 $L_F^\infty(\Omega;L^\infty(t,T;\mathbf{R}^k))$. 对任意的 $q\in[1,\infty]$，我们把 $L_F^q(\Omega;L^q(t,T;\mathbf{R}^k))$ 简记为 $L_F^q(t,T;\mathbf{R}^k)$. 记 $S(\mathbf{R}^k)$ 为由所有 k-维对称阵组成的集合，I_k 为 k-维单位阵.

对任意的 $n,m\in\mathbf{N}$ 以及 $(t,\eta)\in[0,T)\times L_{\mathcal{F}_t}^2(\Omega;\mathbf{R}^n)$，我们考虑以下带控制的线性随机微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(\tau)=(A(\tau)x(\tau)+B(\tau)u(\tau))\mathrm{d}\tau+\\\quad(C(\tau)x(\tau)+D(\tau)u(\tau))\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[t,T],\\x(t)=\eta\end{cases}\tag{1}$$

以及以下的二次代价泛函：

$$\begin{aligned}&J(t,\eta;u(\cdot))=\\&\quad\frac{1}{2}E\Big\{\int_t^T[\langle Q(\tau)x(\tau),x(\tau)\rangle_{\mathbf{R}^n}+\\&\quad\langle R(\tau)u(\tau),u(\tau)\rangle_{\mathbf{R}^m}]\mathrm{d}\tau+\\&\quad\langle Gx(T),x(T)\rangle_{\mathbf{R}^n}\Big\}\end{aligned}\tag{2}$$

在(1)-(2)式中，$u(\cdot)(\in L_F^2(t,T;\mathbf{R}^m)$，即允许控制集)为控制变量，$x(\cdot)$ 为状态变量，而随机过程 $A(\cdot),B(\cdot),C(\cdot),D(\cdot),Q(\cdot),R(\cdot)$ 以及随机变量 G 满足以下假设：

$$\begin{cases}A(\cdot)\in L_F^1(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{n\times n})),\\C(\cdot)\in L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{n\times n})),\\B(\cdot)\in L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{n\times m})),\\D(\cdot)\in L_F^\infty(0,T;\mathbf{R}^{n\times m}),\\Q(\cdot)\in L_F^1(0,T;L^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n))),\\R(\cdot)\in L_F^\infty(0,T;S(\mathbf{R}^m)),\\G\in L_{\mathcal{F}_T}^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n))\end{cases}\tag{AS1}$$

从而方程(1)存在唯一解 $x(\cdot;t,\eta,u(\cdot))\in L_F^2(\Omega;C([t,T];\mathbf{R}^n))$ 以及(2)式为良定的. 为了符号

上的简化，在不引起混淆的前提下，时间 τ 往往略去，即将 $A(\tau),B(\tau)$ 等简记为 A,B 等.

在本文中，我们关心以下的 SLQ 问题：

对任意的 $(t,\eta)\in[0,T]\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$，找一个 $\bar{u}(\cdot)\in L^2_F(t,T;\mathbf{R}^m)$ 使得

$$J(t,\eta;\bar{u}(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in L^2_F(t,T;\mathbf{R}^m)} J(t,\eta;u(\cdot)) \tag{3}$$

2 预备知识

对我们的 SLQ 问题，考虑以下形式的 BSRE 方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}P=-(PA+A^TP+\Lambda C+C^T\Lambda+C^TPC+ \\ \quad Q-L^TK^{\dagger}L)\mathrm{d}\tau+\Lambda\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T], \\ P(T)=G\end{cases} \tag{4}$$

其中 A^T 为 A 的转置，

$$K\triangleq R+D^TPD,\ L\triangleq B^TP+D^T(PC+\Lambda) \tag{5}$$

$K^{\dagger}$ 为 K 的 Moore-Penrose 广义逆. 为了定义方程(4)的转置解，受文献[9]的启发，对任意的 $t\in[0,T]$，引入以下的正向随机微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_i=(Ax_i+u_i)\mathrm{d}\tau+(Cx_i+v_i)\mathrm{d}W(\tau), \\ \quad \tau\in[t,T], \\ x_i(t)=\eta_i\end{cases} \tag{6}$$

其中 $u_i,v_i\in L^2_F(t,T;L^4(\Omega;\mathbf{R}^n))$，$\eta_i\in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$，$i=1,2$. 我们引入如下的概念.

定义 2.1 称 $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))\in D_F(0,T;L^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n)))\times L^2_F(0,T;S(\mathbf{R}^n))$ 为 BSRE 方程(4)的转置解，若对任意的 $t\in[0,T]$，$u_1,u_2\in L^2_F(t,T;L^4(\Omega;\mathbf{R}^n))$，$v_1,v_2\in L^2_F(t,T;L^4(\Omega;\mathbf{R}^n))$，$\eta_1,\eta_2\in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$，成立

$$\begin{aligned}&E\langle Gx_1(T),x_2(T)\rangle_{\mathbf{R}^n}-E\langle P(t)\eta_1,\eta_2\rangle_{\mathbf{R}^n}= \\ &\quad E\int_t^T[\langle Pu_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle Px_1,u_2\rangle_{\mathbf{R}^n}+ \\ &\quad \langle PCx_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle Pv_1,Cx_1\rangle_{\mathbf{R}^n}+ \\ &\quad \langle Pv_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau+E\int_t^T[\langle L^TK^{\dagger}Lx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}- \\ &\quad \langle Qx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau+E\int_t^T[\langle\Lambda v_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}+ \\ &\quad \langle\Lambda x_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7}$$

其中 x_1,x_2 分别为方程(6)在 $i=1$ 和 $i=2$ 时的解.

注 1 对一般滤子的情形，我们选择让解的第一个分量 $P(\cdot)$ 属于 $D_F(0,T;L^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n)))$，而不同于文献[7]中的 $L^\infty_F(\Omega;C([0,T];S(\mathbf{R}^n)))$. 这是因为我们只假设了滤子 F 右连续，而且这个空间对我们设计反馈控制而言足够了.

注 2 对自然滤子情形，对 $\langle P(t)x_1(t),x_2(t)\rangle_{\mathbf{R}^n}$ 用 Itô 公式，容易验证(7)式成立.

注 3 在本文中，我们通过先构造 P 以及 Λ 之后证明其唯一来给出转置解的存在唯一性.

定义 2.2 一个随机过程 $\Theta(\cdot)\in L^2_F(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$ 称为是 SLQ 问题在 $[0,T]$ 上的最优反馈算子，若对任意的 $(t,\eta)\in[0,T)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$ 以及 $u(\cdot)\in L^2_F(t,T;\mathbf{R}^m)$，成立

$$J(t,\eta;\Theta(\cdot)\bar{x}(\cdot))\leqslant J(t,\eta;u(\cdot)) \tag{8}$$

其中 $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;t,\eta,\Theta(\cdot)\bar{x}(\cdot))$.

注 4 在定义 2.2 中，$\Theta(\cdot)$ 独立于初始时刻 t 以及初始状态 $\eta(\in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n))$. 对任意的 $(t,\eta)\in[0,T)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$，不等式(8)蕴含了控制

$$\bar{u}(\cdot)\equiv\Theta(\cdot)\bar{x}(\cdot)\in L^2_F(t,T;\mathbf{R}^m)$$

为问题 SLQ 的最优控制. 因此，对 SLQ 问题而言，在 $[0,T]$ 上存在一个最优反馈算子蕴含着对任意的 $(t,\eta)\in[0,T)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$ 存在最优控制.

注 5 在定义 2 中，反馈算子 $\Theta(\cdot)$ 应当属于空间 $L^2_F(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$，而不是空间 $L^2_F(0,T;L^p(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))(\forall\,p\geqslant1)$. 这是因为为系统设计反馈的目的之一是抗干扰，详情可见文献[7]的分析.

我们再回顾以下结论，可参考文献[7,8].

引理 2.3 设 $\Theta(\cdot)$ 为 SLQ 问题的一个最优反馈算子，则对任意的 $(t,\eta)\in[0,T)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$，以下的正倒向随机微分方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\bar{x}(\tau)=(A+B\Theta)\bar{x}(\tau)\mathrm{d}\tau+ \\ \quad (C+D\Theta)\bar{x}(\tau)\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[t,T], \\ \mathrm{d}\bar{y}(\tau)=-(A^T\bar{y}(\tau)+C^T\bar{z}(\tau)+ \\ \quad Q\,\bar{x}(\tau))\mathrm{d}\tau+\bar{z}(\tau)\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[t,T], \\ \bar{x}(t)=\eta,\ \bar{y}(T)=G\,\bar{x}(T)\end{cases}$$

存在唯一解 $(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot),\bar{z}(\cdot))\in L^2_F(\Omega;C([t,T];\mathbf{R}^n))\times D_F(t,T;L^2(\Omega;\mathbf{R}^n))\times L^2_F(t,T;\mathbf{R}^n)$，且 $R\Theta\,\bar{x}(\cdot)+B^T\bar{y}(\cdot)+D^T\bar{z}(\cdot)=0$, a. e. $(\tau,\omega)\in[t,T]\times\Omega$，其中 $(\bar{y}(\cdot),\bar{z}(\cdot))$ 是转置解，而关于该转置解的定义可参考文献[8].

3 主要结果

本文的主要结果如下.

定理 3.1 设假设(AS1)成立，则 SLQ 问题存在最优反馈算子 $\Theta(\cdot)\in L^2_F(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$ 的充分条件是 BSRE 方程(4)存在转置解

$(P(\cdot),\Lambda(\cdot))\in D_F(0,T;L^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n)))\times L_F^2(0,T;S(\mathbf{R}^n))$ 使得 $R(K(t,\omega))\Leftrightarrow R(L(t,\omega))$ 以及

$$K(t,\omega)\geqslant 0,\ \text{a.e.}\ (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega \tag{10}$$

并且

$$K(\cdot)^T L(\cdot)\in L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n})) \tag{11}$$

成立(对一维控制问题，这也是必要条件). 此时，最优反馈算子 $\Theta(\cdot)$ 给出下式：

$$\Theta(\cdot)=-K(\cdot)^T L(\cdot)+(I_m-K(\cdot)^T K(\cdot))\theta \tag{12}$$

其中 $\theta\in L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$ 任意给定. 进而

$$\inf_{u(\cdot)\in L_F^2(t,T;\mathbf{R}^m)} J(t,\eta;u(\cdot))=\frac{1}{2}E\langle P(t)\eta,\eta\rangle_{\mathbf{R}^n} \tag{13}$$

证明　本节我们借用文献[7]中的一些思想来证明定理 3.1. 为了使证明过程更加简洁，我们在保证证明过程完整的前提下，略去与文献[7]中重复的细节.

充分性. 设 BSRE 方程(4)存在一个转置解

$$(P(\cdot),\Lambda(\cdot))\in D_F(0,T;L^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n)))\times L_F^2(0,T;S(\mathbf{R}^n)),$$

使得(10)及(11)式成立. 对任意的 $\theta\in L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$，由(5)式及(11)式知，由式(12)给出的 $\Theta(\cdot)$ 属于 $L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$. 对任意的 $t\in[0,T)$，$\eta\in L_{\mathcal{F}_t}^2(\Omega;\mathbf{R}^n)$ 及 $u(\cdot)\in L_F^2(t,T;\mathbf{R}^m)$，记 $x(\cdot)\equiv x(\cdot;t,\eta,u(\cdot))$ 为方程(1)对应的状态过程. 由 $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ 是 BSRE 方程(4)转置解，并注意到式(5)以及 $L_F^2(t,T;L^4(\Omega;\mathbf{R}^n))$ 在 $L_F^2(t,T;R^n)$ 中稠密，有

$$\begin{aligned}
&E\langle Gx(T),x(T)\rangle_{\mathbf{R}^n}-E\langle P(t)\eta,\eta\rangle_{\mathbf{R}^n}=\\
&\quad E\int_t^T[\langle PBu,x\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle Px,Bu\rangle_{\mathbf{R}^n}+\\
&\quad \langle PCx,Du\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle PDu,Cx\rangle_{\mathbf{R}^n}+\\
&\quad \langle PDu,Du\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau+E\int_t^T[\langle L^TK^TLx,x\rangle_{\mathbf{R}^n}-\\
&\quad \langle Qx,x\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau+E\int_t^T[\langle \Lambda Du,x\rangle_{\mathbf{R}^n}+\\
&\quad \langle \Lambda x,Du\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau=\\
&\quad E\int_t^T[-\langle (Q-L^TK^TL)x,x\rangle_{\mathbf{R}^n}+\\
&\quad 2\langle L^Tu,x\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle D^TPDu,u\rangle_{\mathbf{R}^m}]\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

从而，由文献[7]知，由(12)式给定的 $\Theta(\cdot)$ 是 SLQ 问题的一个最优反馈算子.

必要性. 我们将分三步完成. 对必要条件的证明，高维情形与一维情形的区别出现在步骤 2 中证明 Λ 对称性处. 因此，不失一般性，我们对必要性的证明仍按高维情形加以叙述.

步骤 1　设 $\Theta(\cdot)\in L_F^2(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$ 为 SLQ 问题在 $[0,T]$ 上的一个最优反馈算子. 由引理 2.3，对任意的 $\zeta\in\mathbf{R}^n$，以下的正倒向随机微分方程：

$$\begin{cases}
\mathrm{d}x(\tau)=(A+B\Theta)x(\tau)\mathrm{d}\tau+(C+D\Theta)x(\tau)\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T],\\
\mathrm{d}y(\tau)=-(A^Ty(\tau)+C^Tz(\tau)+Qx(\tau))\mathrm{d}\tau+z(\tau)\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T],\\
x(0)=\zeta,\ y(T)=Gx(T)
\end{cases} \tag{14}$$

存在唯一解 $(x(\cdot),y(\cdot),z(\cdot))\in L_F^2(\Omega;C([0,T];\mathbf{R}^n))\times D_F(0,T;L^2(\Omega;\mathbf{R}^n))\times L_F^2(0,T;\mathbf{R}^n)$，且 $R\Theta x+B^Ty+D^Tz=0$，a.e. $(\tau,\omega)\in[0,T]\times\Omega$. 再考虑以下随机微分方程：

$$\begin{cases}
\mathrm{d}\tilde{x}=[-A-B\Theta+(C+D\Theta)^2]^{\mathrm{T}}\tilde{x}\mathrm{d}\tau-(C+D\Theta)^{\mathrm{T}}\tilde{x}\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T],\\
\tilde{x}(0)=\zeta
\end{cases} \tag{15}$$

由文献[13]知，方程(15)存在唯一解 $\tilde{x}(\cdot)\in L_F^2(\Omega;C([0,T]\tilde{;}^n))$.

进一步，我们考虑以下 $\mathbf{R}^{n\times n}$-值方程：

$$\begin{cases}
\mathrm{d}X=(A+B\Theta)X\mathrm{d}\tau+(C+D\Theta)X\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T],\\
\mathrm{d}Y=-(A^TY+C^TZ+QX)\mathrm{d}\tau+Z\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T],\\
X(0)=I_n,\ Y(T)=GX(T)
\end{cases} \tag{16}$$

以及

$$\begin{cases}
\mathrm{d}\tilde{X}=[-A-B\Theta+(C+D\Theta)^2]^T\tilde{x}\mathrm{d}\tau-(C+D\Theta)^T\tilde{x}\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[0,T],\\
\tilde{X}(0)=I_n
\end{cases} \tag{17}$$

类似地，易知方程(16)以及(17)分别存在唯一解 $(X(\cdot),Y(\cdot),Z(\cdot))\in L_F^2(\Omega;C([0,T];\mathbf{R}^{n\times n}))\times D_F(0,T;L^2(\Omega;\mathbf{R}^{n\times n}))\times L_F^2(0,T;\mathbf{R}^{n\times n})$ 以及 $\tilde{x}(\cdot)\in L_F^2(\Omega;C([0,T];\mathbf{R}^{n\times n}))$. 从而，由文献[7]知 $\tilde{x}(t)^T=X(t)^{-1}$，P-a.s.

步骤 2　令

$$\begin{aligned}
&P(\tau,\omega)\triangleq Y(\tau,\omega)\tilde{x}(\tau,\omega)^T,\\
&\Pi(\tau,\omega)\triangleq Z(\tau,\omega)\tilde{x}(\tau,\omega)^T
\end{aligned} \tag{18}$$

考虑以下正向随机微分方程：

$$\begin{cases}
\mathrm{d}x_i=(A+B\Theta)x_i\mathrm{d}\tau+(C+D\Theta)x_i\mathrm{d}W(\tau),\ \tau\in[t,T],\\
x_i(t)=\eta_i
\end{cases} \tag{19}$$

其中 $\eta_i \in L^8_{\mathcal{F}_t}(\Omega;R^n)$,$i=1,2$.

注意到 $L^2_F(t,T;L^8(\Omega;\mathbf{R}^n))$在 $L^2_F(t,T;L^4(\Omega;\mathbf{R}^n))$中稠密,因此对任意的 $\eta_i \in L^8_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)(i=1,2)$以及方程(19)对应的解 $x_i(i=1,2)$,定义 2.1 中的等式(7)可重写为

$$E\langle Gx_1(T),x_2(T)\rangle_{\mathbf{R}^n} - E\langle P(t)\eta_1,\eta_2\rangle_{\mathbf{R}^n} = E\int_t^T [\langle Px_1,B\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} - \langle Qx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle PCx_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle PD\Theta x_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle \Lambda x_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle PB\Theta x_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle PD\Theta x_1,Cx_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle L^TK^TLx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle \Lambda D\Theta x_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}]d\tau \tag{20}$$

令 $\Phi(\tau)=x_2(\tau)x_1(\tau)^T$. 直接计算可知 $\Phi(\tau)$ 为以下方程的解:

$$\begin{cases} d\Phi=[A\Phi+\Phi A^T+C\Phi C^T+\Phi\Theta^TB^T+ \\ \quad B\Theta\Phi+C\Phi\Theta^TD^T+D\Theta\Phi C^T+ \\ \quad D\Theta\Phi\Theta^TD^T]d\tau+[C\Phi+\Phi C^T+\Phi\Theta^TD^T \\ \quad +D\Theta\Phi]dW(\tau),\ \tau\in[t,T], \\ \Phi(t)=\eta_2\eta_1^T, \end{cases}$$

$\Phi\widetilde{X}$ 为以下方程的解:

$$\begin{cases} d\Phi\widetilde{X}=(A\Phi+B\Theta\Phi)\widetilde{X}d\tau+ \\ \quad (C\Phi+D\Theta\Phi)\widetilde{X}dW(\tau),\ \tau\in[t,T], \\ \Phi(t)\widetilde{x}(t)=\eta_2\eta_1^T. \end{cases}$$

由式(17)知 $\widetilde{X}(\cdot)$ 可属于 $L^4_F(\Omega;C([0,T];\mathbf{R}^{n\times n}))$,再由 $(Y(\cdot),Z(\cdot))$ 是转置解有

$$E\langle Y(T),\Phi(T)\widetilde{X}(T)\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} - E\langle Y(t),\Phi(t)\widetilde{X}(t)\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} = E\int_t^T\langle Y,A\Phi\widetilde{X}+B\Theta\Phi\widetilde{X}\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}d\tau + E\int_t^T\langle -(A^TY+C^TZ+QX),\Phi\widetilde{X}\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}d\tau + E\int_t^T\langle Z,C\Phi\widetilde{X}+D\Theta\Phi\widetilde{X}\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}d\tau \tag{21}$$

其中,对任意 $P_1,P_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$,

$$\langle P_1,P_2\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} \triangleq \mathrm{tr}(P_1P_2^T).$$

由(21)以及(18)式,有

$$E\langle G,\Phi(T)\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} - E\langle P(t),\Phi(t)\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} = E\int_t^T\langle P,A\Phi+B\Theta\Phi\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}d\tau + E\int_t^T\langle -(A^TP+C^T\Pi+Q),\Phi\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}d\tau + E\int_t^T\langle \Pi,C\Phi+D\Theta\Phi\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}d\tau \tag{22}$$

从而由(22)式有

$$E\langle Gx_1(T),x_2(T)\rangle_{\mathbf{R}^n} - E\langle P(t)\eta_1,\eta_2\rangle_{\mathbf{R}^n} = E\int_t^T(\langle Px_1,Ax_2+B\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle -(A^TP+C^T\Pi+Q)x_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle \Pi x_1,Cx_2+D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n})d\tau = E\int_t^T(\langle Px_1,B\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle \Pi x_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} - \langle Qx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n})d\tau \tag{23}$$

令

$$\Lambda \triangleq \Pi - P(C+D\Theta) \tag{24}$$

则由式(23)有 $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ 满足以下等式:

$$E\langle Gx_1(T),x_2(T)\rangle_{\mathbf{R}^n} - E\langle P(t)\eta_1,\eta_2\rangle_{\mathbf{R}^n} = E\int_t^T[\langle Px_1,B\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle \Lambda x_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle PCx_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \langle PD\Theta x_1,D\Theta x_2\rangle_{\mathbf{R}^n} - \langle Qx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}]d\tau \tag{25}$$

其中 x_1,x_2 分别为方程(19)在 $i=1$ 和 $i=2$ 时的解. 再注意到 $L^2_F(t,T;L^8(\Omega;\mathbf{R}^n))$在 $L^2_F(t,T;L^4(\Omega;R^n))$中稠密,因此当 $\eta_1,\eta_2\in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$时式(25)仍然成立.

对任意的 $t\in[0,T]$ 以及 $\eta\in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$,我们考虑以下的正倒向随机微分方程:

$$\begin{cases} dx^t(\tau)=(A+B\Theta)x^t(\tau)d\tau+ \\ \quad (C+D\Theta)x^t(\tau)dW(\tau),\ \tau\in[t,T], \\ dy^t(\tau)=-(A^Ty^t(\tau)+C^Tz^t(\tau)+ \\ \quad Qx^t(\tau))d\tau+z^t(\tau)dW(\tau),\ \tau\in[t,T], \\ x^t(t)=\eta,\ y^t(T)=Gx^t(T) \end{cases} \tag{26}$$

显然,方程(26)存在唯一解$(x^t(\cdot),y^t(\cdot),z^t(\cdot))\in L^2_F(\Omega;C([t,T];\mathbf{R}^n))\times D_F(t,T;L^2(\Omega;\mathbf{R}^n))\times L^2_F(t,T;\mathbf{R}^n)$.

同样地,再考虑以下的正倒向随机微分方程:

$$\begin{cases} dX^t=(A+B\Theta)X^td\tau+(C+D\Theta)X^tdW(\tau), \\ \quad \in[0,T], \\ dY^t=-(A^TY^t+C^TZ^t+QX^t)d\tau+Z^tdW(\tau), \\ \quad \tau\in[0,T], \\ X^t(t)=I_n,\ Y^t(T)=GX^t(T) \end{cases} \tag{27}$$

类似地,方程(27)存在唯一解$(X^t(\cdot),Y^t(\cdot),Z^t(\cdot))\in L^2_F(\Omega;C([t,T];\mathbf{R}^{n\times n}))\times D_F(t,T;L^2(\Omega;\mathbf{R}^{n\times n}))\times L^2_F(t,T;\mathbf{R}^{n\times n})$. 由方程(26)-(27),对任意的 $\eta\in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$有

$$x^t(\tau;\eta)=X^t(\tau)\eta,\ y^t(\tau;\eta)=Y^t(\tau)\eta,\ \forall\tau\in[t.T],z^t(\tau;\eta)=Z^t(\tau)\eta,\ \text{a.e.}\ \tau\in[t,T] \tag{28}$$

由方程(14)解的唯一性,对任意的 $\zeta\in\mathbf{R}^n$ 以及 $t\in$

$[0,T]$，有

$$X^t(\tau)X(t)\zeta = x^t(\tau;X(t)\zeta) = x(\tau;\zeta),\ \text{a. s.}.$$

因此

$$Y^t(t)X(t)\zeta = y^t(t;X(t)\zeta) = Y(t)\zeta,\ \text{a. s.}.$$

由此蕴含着对任意的 $t\in[0,T]$，成立

$$Y^t(t) = Y(t)X^{-1}(t) = P(t),\ \text{a. s.} \tag{29}$$

对任意的 $\eta,\xi\in L^8_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$，类似于得到式(21)的过程，由$(Y^t(\cdot),Z^t(\cdot))$是转置解有

$$\begin{aligned}&E\langle Y^t(T),X^t(T)\xi\eta^T\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} - \\ &\quad E\langle Y^t(t),X^t(t)\xi\eta^T\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}} = \\ &\quad E\int_t^T\langle Y^t,(A+B\Theta)X^t\xi\eta^T\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}\mathrm{d}\tau + \\ &\quad E\int_t^T\langle Z^t,(C+D\Theta)X^t\xi\eta^T\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}\mathrm{d}\tau + \\ &\quad E\int_t^T\langle -(A^TY^t+C^TZ^t+QX^t), \\ &\quad X^t\xi\eta^T\rangle_{\mathbf{R}^{n\times n}}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{30}$$

重新整理(30)式，并注意到(27)式，(29)式以及我们对矩阵内积的定义，有

$$\begin{aligned}&E\langle P(t)\eta,\xi\rangle_{\mathbf{R}^n} = \\ &\quad E\langle GX^t(T)\eta,X^t(T)\xi\rangle_{\mathbf{R}^n} + \\ &\quad E\int_t^T\langle QX^t\eta,X^t\xi\rangle_{\mathbf{R}^n}\mathrm{d}\tau - \\ &\quad E\int_t^T\langle Y^t\eta,B\Theta X^t\xi\rangle_{\mathbf{R}^n}\mathrm{d}\tau - \\ &\quad E\int_t^T\langle Z^t\eta,D\Theta X^t\xi\rangle_{\mathbf{R}^n}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{31}$$

再次由 $L^2_F(t,T;L^8(\Omega;\mathbf{R}^n))$ 在 $L^2_F(t,T;L^2(\Omega;\mathbf{R}^n))$ 中稠密知，当 $\xi,\eta\in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;R^n)$ 时(31)式仍成立. 再由式(9)有

$$\begin{aligned}&E\langle P(t)\eta,\xi\rangle_{\mathbf{R}^n} = E\langle GX^t(T)\eta,X^t(T)\xi\rangle_{\mathbf{R}^n} + \\ &\quad E\int_t^T(\langle QX^t\eta,X^t\xi\rangle_{\mathbf{R}^n} + \\ &\quad \langle R\Theta X^t\eta,\Theta X^t\xi\rangle_{\mathbf{R}^n})\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}P(t) &= E\Big(X^t(T)^TGX^t(T)+\int_t^T[(X^t)^TQX^t + \\ &\quad (X^t)^T\Theta^TR\Theta X^t]\mathrm{d}\tau \mid \mathcal{F}_t\Big)\end{aligned} \tag{32}$$

由式(32)，并注意到 $G,Q(\cdot)$ 以及 $R(\cdot)$ 的对称性，我们可得知对任意的 $t\in[0,T]$，$P(t)$ 对称，P-a. s.. 另外，令

$$\begin{aligned}\hat{P}(t) &= P(t)+\int_0^t[(X^t)^TQX^t + \\ &\quad (X^t)^T\Theta^TR\Theta X^t]\mathrm{d}\tau,\ \forall\, t\in[0,T].\end{aligned}$$

易验证 $\hat{P}(\cdot)$ 为 F-鞅，从而 $P(\cdot)$ 也有左极右连的修正. 我们有

$$|P(t,\omega)|_{S(\mathbf{R}^n)}\leqslant C,\ \text{a. s.}\ (t,\omega)\in[0,T]\times\Omega,$$

其中 C 为常数. 因此，$P(\cdot)\in D_F(0,T;L^\infty(\Omega;S(\mathbf{R}^n)))$. 而对一维控制问题而言，显然成立

$$\Lambda(t,\omega) = \Lambda(t,\omega)^T,\ \text{a. e.}\ (t,\omega)\in(0,T)\times\Omega \tag{33}$$

再结合 $\Lambda(\cdot)$的定义(24)及(18)式，有 $\Lambda(\cdot)\in L^2_F(0,T;S(\mathbf{R}^n))$.

步骤 3　我们将说明(P,Λ)为 BSRE 方程(4)的转置解，且满足式(10)，(11)，进而式(12)，(13)成立.

由文献[7]知，(10)～(13)式成立，且有

$$(PB+C^TPD+\Lambda D)\Theta = -L^TK^TL \tag{34}$$

由式(34)并注意到式(20)，可知若需说明由式(18)及(24)定义且满足(25)式的(P,Λ)是 BSRE 方程(4)的转置解，只需再说明其唯一.

假设 BSRE 方程(4)存在两对转置解$(P_i(\cdot),\Lambda_i(\cdot))$，$i=1,2$，使得

$$R(K_i(t,\omega))\supset R(L_i(t,\omega))\ \text{以及}\ K_i(t,\omega)\geqslant 0,$$

a. e. $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$,

$$K_i(\cdot)^TL_i(\cdot)\in L^2_F(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$$

成立. 其中

$$K_i\triangleq R+D^TP_iD,\ L_i\triangleq B^TP_i+D^T(P_iC+\Lambda_i).$$

设

$$\begin{aligned}\Theta_i(\cdot) &= -K_i(\cdot)^TL_i(\cdot) + \\ &\quad (I_m-K_i(\cdot)^TK_i(\cdot))\theta_i,\end{aligned}$$

其中 $\theta_i\in L^2_F(0,T;L^\infty(\Omega;\mathbf{R}^{m\times n}))$. 则由定理 3.1 的充分性知 $\Theta_1(\cdot),\Theta_2(\cdot)$ 为最优反馈算子，且

$$\begin{aligned}&\inf_{u(\cdot)\in L^2_F(t,T;\mathbf{R}^m)} J(t,\eta;u(\cdot)) = \\ &\quad \frac{1}{2}E\langle P_1(t)\eta,\eta\rangle_{\mathbf{R}^n} = \frac{1}{2}E\langle P_2(t)\eta,\eta\rangle_{\mathbf{R}^n}\end{aligned} \tag{35}$$

由 t,η 的任意性可得 $P_1(\cdot)=P_2(\cdot)$.

再令 $B\Theta x_i=u_i$，$D\Theta x_i=v_i$，类似于得到(25)式的方法，易验证$(P_i(\cdot),\Lambda_i(\cdot))$满足等式

$$\begin{aligned}&E\langle G_ix_1(T),x_2(T)\rangle_{\mathbf{R}^n} - E\langle P_i(t)\eta_1,\eta_2\rangle_{\mathbf{R}^n} = \\ &\quad E\int_t^T[\langle P_ix_1,u_2\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle\Lambda_ix_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n} + \\ &\quad \langle P_iCx_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n}+\langle P_iv_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n} - \\ &\quad \langle Qx_1,x_2\rangle_{\mathbf{R}^n}]\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{36}$$

其中 $i=1,2$，$\eta_i\in L^4_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbf{R}^n)$以及 x_i 为对应方程(6)的解. 由(36)式，并注意到 $P_1(\cdot)=P_2(\cdot)$，有

$$0 = E\int_t^T\langle(\Lambda_1-\Lambda_2)x_1,v_2\rangle_{\mathbf{R}^n}\mathrm{d}\tau \tag{37}$$

由(37)式，并注意到 v_2 的任意性，由反证法可得 $\Lambda_1(\cdot)=\Lambda_2(\cdot)$. 因此$(P,\Lambda)$是 BSRE 方程(4)的转置解. 证毕.

参考文献:

[1] Bismut J M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients [J]. SIAM J Control Optim, 1976, 14: 419.

[2] Bismut J M. Controle des systems lineares quadratiques: applications de l' integrale stochastique [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

[3] Chen S, Li S, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs [J]. SIAM J Control Optim, 1998, 36: 1685.

[4] Chen S and Yong J. Stochastic linear quadratic optimal control problems [J]. Appl Math Optim, 2001, 43: 21-45.

[5] Chen S, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs II [J]. SIAM J Control Uptim, 2000, 39: 1065.

[6] 陈雪梅，马冬梅，张曾丹. 带核函数的随机积分方程解的存在唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，1：1.

[7] Lü Q, Wang T, Zhang X. Characterization of optimal feedback for stochastic linear quadratic cotrol problems [J]. Prob Uncert Quant Risk, 2017, 2: 11.

[8] Lü Q, Zhang X. Well-posedness of backward stochastic differential equations with general filtration [J]. J Differ Equations, 2013, 254: 3200.

[9] Lü Q, Zhang X. General Pontryagin-type stochastic maximum principle and backward stochastic evolution equations in infinite dimensions [M]. Berlin/New York: Springer, 2014.

[10] Lü Q, Zhang X. Transposition method for backward stochastic evolution equations revisited, and its application [J]. Math Control Relat F, 2015, 5: 529.

[11] Peng S. Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations [J]. SIAM J Control Optim, 1992, 30: 284.

[12] Protter P E. Stochastic integration and differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[13] Rami M A, Zhou X Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls [J]. IEEE T Automat Contr, 2000, 45: 1131.

[14] Tang S. General linear quadratic optimal stochastic control problems with random coef-ficients: linear stochastic Hamilton systems and backward stochastic Riccati equations [J]. SIAM J Control Optim, 2003, 42: 53.

[15] 王维滨，罗懋康. 分数阶随机微分方程的修正隐式数值格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，3：451.

[16] Yao D D, Zhang S, Zhou X Y. Stochastic linear-quadratic control via primal-dual semidefinite programming [J]. SIAM Rev, 2004, 46: 87.

[17] 雍炯敏，楼红卫. 最优控制理论简明教程[M]. 北京：高等教育出版社，2006.

[18] Yong J, Zhou X Y. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations [M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 2000.