2017 年 11 月 四川大学学报(自然科学版) Nov. 2017
第 54 卷 第 6 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 54 No. 6

doi:10.3969/j.issn.0490-6756.2017.06.008

有理曲面上的曲线与正交李代数的表示

周维彬, 张加劲
(四川大学数学学院, 成都 610064)

摘 要: 本文研究了一类有理曲面上的有理曲线的 configurations 与 D_n-型李代数的一个基本不可约表示(其最高权在正文中记作 λ_{n-2})之间的关系,发现该不可约表示可以由对应的有理曲面上满足两组丢番图方程的(可约)有理曲线所给出,每组方程的解构成一个外尔群轨道.

关键词: 有理曲面; 有理曲线; 正交李代数; 不可约表示; 根格

中图分类号: O187.1 **文献标识码**: A **文章编号**: 0490-6756(2017)06-1173-04

Configurations of curves on rational surfaces and representations of orthogonal Lie algebras

ZHOU Wei-Bin, *ZHANG Jia-Jin*
(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: We study the relation between certain rational surfaces and orthogonal Lie algebras of D_n-type. We find that a fundamental irreducible representation (whose highest weight is denoted by λ_{n-2}) is determined by finitely many rational curves on these surfaces satisfying two systems of Diophantine equations, and the solutions of each system of these equations form a Weyl group orbit.

Keywords: Rational surface; Rational curve; Orthogonal Lie algebra; Irreducible representation; Root lattice
(2010 MSC 14J26)

1 引 言

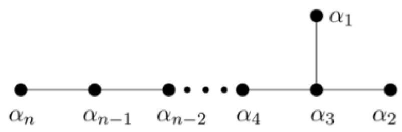
众所周知,有理曲面与单李代数之间存在着深刻的联系[1-5],比如 del Pezzo 曲面与 E_n-型李代数的关系就被很多数学家及数学物理学家广泛地研究. 本文第二作者及其合作者的一系列论文[1,2]揭示了有理曲面的 Picard 格与单李代数的根格及其部分基本不可约表示之间的关系,特别是所有的(quasi-)minuscule 表示正好可以由有理曲面上的某类有理曲线所唯一确定,而这些有理曲线正好是某类丢番图方程组的全部解.

对非 (quasi-)minuscule 的基本不可约表示,情况则复杂得多. 本文研究了 D_n-型李代数(仍然记作 D_n)的一个非 (quasi-)minuscule 基本不可约表示(其最高权在正文中记作 λ_{n-2})与有理曲面上的有理曲线的 configurations 之间的关系. 我们发现该不可约表示可由对应的有理曲面上满足两组丢番图方程的有理曲线所给出,每组丢番图方程的解构成一个外尔群轨道. 这一结果部分完善了文献[2]的研究.

为此,设 D_n-型李代数的对应于最高权 λ 的有限维不可约表示为 V_λ. 设 S 为射影平面 $\boldsymbol{CP}^2$ 在 $n+1$ 个一般点处的 blow-up,则它的 Picard 格 $Pic(S)$ 同构于指标为 $(1,n+1)$ 的奇幺模格 $I_{1,n+1}$.

收稿日期: 2017-05-16
基金项目: 国家自然科学基金(11401489, 11271268); 教育部"新世纪优秀人才支持计划"(NCET-13-0396)
作者简介: 周维彬(1990-), 男, 河南商丘人, 硕士研究生, 主要研究领域为代数几何. E-mail: chowweibin@163.com
通讯作者: 张加劲. E-mail: jjzhang@scu.edu.cn

设 $K\in Pic(S)$ 是 S 的典范类，$C\in Pic(S)$ 是一条光滑有理曲线满足 $C^2=0$. 则根据文献[1]，格 $Pic(S)$ 的子格 $<K,C>^{\perp}$ 是一个 D_n-型根格，而格 $\Lambda_w:=Pic(S)/\mathbf{Z}<K,C>$是对应的权格. 李代数 D_n 的 Dynkin 图如下：



设 $\lambda_i\in Pic(S)$使得 $\bar{\lambda}_i\in\Lambda_w:=Pic(S)/\mathbf{Z}<K,C>(i=1,\cdots,n)$分别为对偶于单根 α_i 的 n 个基本支配权. 我们可以求出丢番图方程组 $\{X\in Pic(X)\mid XC=0,X^2=-3,XK=-3\}$ 及 $\{X\in Pic(X)\mid XC=0,X^2=-1,XK=-3\}$ 的全部解，解集分别记为 W_1,W_2，分别是一个外尔群轨道. 进一步，这两组解恰好构成以 λ_{n-2}为最高权的最高权模 $V=V_{\lambda_{n-2}}$的权集. 这些解有明显的几何意义：它们都是曲面上满足特定条件的有理曲线的 configurations. 由此我们还可以构造一个向量丛 V，它的每条纤维作为 D_n 的表示都同构于 V. 这些结果部分完善了文献[1] 等的研究.

2 有理曲面与 D_n-型根格

设 $S=X_{n+1}$是射影平面 $\mathbf{CP}^2$ 上的 $n+1$ 个一般点 $x_i(i=1,\cdots,n+1)$上的 blow-up，则 Picard 群 $Pic(S)\cong H^2(S,Z)$ 同构于奇幺模 Lorentzian 格 $I_{1,n+1}$. $Pic(S)$有整基 $h,l_1,\cdots,l_{n+1}$，其中 h 是 $\mathbf{CP}^2$ 中的线的类，l_i 是 $\mathbf{CP}^2$ 在 x_i 处的 blow-up 的例外曲线. S 上的相交形式如下：

$$h^2=1=-l_i^2;hl_i=l_il_j=0,i\neq j.$$

令

$$K=-3h+\sum_{i=1}^{n+1}l_i.$$

称 K 为曲面 S 的典范类，它是曲面 S 上的典范线丛的除子类.

设 C 是 S 上的光滑有理曲线，满足 $C^2=0$，则根据文献[1]，可以适当选择 blow-up 的方式，使得 $C=h-l_1$.

命题 2.1[1] 设 C 是 S 上的光滑有理曲线，满足 $C^2=0$，可设 $C=h-l_1$，则有 $<K,C>^{\perp}$ 是 D_n 型李代数(仍记作 D_n)的根格，且 $\Delta_r(D_n)=\{\alpha_1=h-l_1-l_2-l_3,\alpha_i=l_i-l_{i+1},i=2,\cdots,n\}$为根基.

注意，我们也可将 S 看作 $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ 在 n 个一般点 $y_1,\cdots,y_n$ 处的 blow-up. 设 C 定义了一个 S 到一个 $\mathbf{P}^1$ 的纤维化，纤维的类为 f(即 $C=f$)，截面类为 s，对应于 y_i 处的 blow-up 的例外曲线类为 $l_{i'}$. 从格的层面看，这实际上是对格 $Pic(S)$ 的整基进行如下的变换：

$$f=h-l_1,s=h-l_2,l'_1=h-l_1-l_2,$$
$$l_{i'}=l_{i+1},i=2,\cdots,n.$$

新的整基 $f,s,l'_i(i=1,2,\cdots,n)$满足如下的关系：

$$fs=1=-l'^2_i,f^2=s^2=l'_il'_j=$$
$$fl'_i=sl'_i=0,i\neq j.$$

为了方便起见，我们仍然将 $l_{i'}$ 记作 l_i. 则上述命题的结论可重新叙述为：

$$\Delta_r(D_n)=\{\alpha_1=f-l_1-l_2,$$
$$\alpha_i=l_{i-1}-l_i,i=2,\cdots,n\}.$$

命题 2.2[1] 格 $Pic(S)/\mathbf{Z}<K,C>$ 同构于 D_n 的权格，则有与根基 $\Delta_r(D_n)$相对应的权基

$$\Delta_w(D_n)=\{\bar{\lambda}_i\in Pic(S)/\mathbf{Z}<K,C>,$$
$$i=1,\cdots,n\},$$

其中

$$\lambda_1=s,\lambda_2=f,\lambda_i=l_i+\cdots+l_n,i\geqslant 3.$$

在文献[2] 中，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_n$ 及 λ_{n-1}都已研究过，它们都是 (quasi-)minuscule 权. 以下我们考虑一个非 (quasi-)minuscule 权 $\lambda_{n-2}=l_{n-2}+l_{n-1}+l_n$，以及其对应的最高权模 $V=V_{\lambda_{n-2}}$. 由外尔公式[3]，可计算出 V 的维数为

$$\deg(\lambda_{n-2})=\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}=\binom{2n}{3}.$$

3 主要结果

在这一节，我们将证明以基本支配权 λ_{n-2}为最高权的权模 $V=V_{\lambda_{n-2}}$完全由曲面 S 上的某类有理曲线的 configurations 所确定. 令 Σ 是 V 的所有权的集合，

$$W_1=\{l_i+l_j+l_k,f-l_i+l_j+l_k,2f-l_i-$$
$$l_j+l_k,3f-l_i-l_j-l_k\mid i,j,k \text{ 互不相等}\},$$
$$W_2=\{f+l_i,2f-l_i\mid i=1,\cdots,n\}.$$

则我们有

定理 3.1 W_1 及 W_2 分别是一个外尔群轨道：$W_1=W(D_n).\lambda_{n-2},W_2=W(D_n).(f+l_1)$，且

$$\Sigma=W_1\cup W_2.$$

证明 首先证明 $W_1=W(D_n).\lambda_{n-2},W_2=W(D_n).(f+l_1)$. 根据命题 2.1，经过计算可知，外尔群 $W(D_n)$在 $Pic(S)$ 上的作用保持 f 不动，且由下列元素生成：n 个元素 $l_1,\cdots,l_n$ 上的所有置换 σ，

及变换 $\sigma_{ij}, i\neq j, i,j=1,\cdots,n$，此处 σ_{ij} 定义为将 $\{l_1,\cdots,l_n\}$ 中的两个元素 l_i, l_j 替换为 $f-l_i, f-l_j$，而其他元素保持不动. 从而有

$$W_1 = W(D_n).\lambda_{n-2}, W_2 = W(D_n).(f+l_1).$$

其次，证明 $\Sigma = W_1 \cup W_2$. 令 $\lambda=\lambda_{n-2}$，设 $\mu\in\Sigma$ 是 $V=V_{\lambda_{n-2}}$ 的任意一个权. 记 $\lambda_\alpha = \dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 及 $\delta(\lambda) = 2\sum\limits_{\alpha\in\Delta_r(D_n)}\lambda_\alpha$. 令

$$\gamma(\mu) = \frac{1}{2}(\delta(\lambda)-\delta(\mu)).$$

从文献[3]第 100 页的定理 10.1 可知，$\gamma(\mu)$ 恒是一个整数，而且 $\lambda-\mu$ 的表达式中单根的个数即为 $\gamma(\mu)$（注意，我们的内积与文献[4]中的标准内积差一个符号，参见文献[1]). 我们用 Σ^k 来表示所有满足 $\gamma(\mu)=k$ 的权 $\mu\in\Sigma$ 所构成的集合，称这样的子集为 Σ 的第 k 层次. 则

$$\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \cdots \cup \Sigma^T,$$

其中 T 是层次的总数减去 1，称为不可约表示的高度. 设 S_k 表示属于第 k 层次的所有权的重复度之和，$M=\max(S_k)$ 称为不可约表示的宽度.

根据文献[4]第 105 页定理 10.7 和定理 10.8，从 V 的最高权 λ 能求出它的所有权 Σ. 由这两个定理可得

$$T = 3(2n-4), r = \frac{T}{2} = 3n-6$$

且不可约表示的权集是呈纺锤形的，从而求出前 $3n-5$ 层的权即可，每层的计算结果如下：

$\Sigma^0: \lambda = l_{n-2}+l_{n-1}+l_n$,

$\Sigma^1: l_{n-3}+l_{n-1}+l_n$,

$\Sigma^2: l_{n-4}+l_{n-1}+l_n, l_{n-3}+l_{n-2}+l_n$,

$\Sigma^3: l_{n-5}+l_{n-1}+l_n, l_{n-4}+l_{n-2}+l_n, l_{n-3}+l_{n-2}+l_{n-1}$,

$\Sigma^4: l_{n-6}+l_{n-1}+l_n, l_{n-5}+l_{n-2}+l_n, l_{n-4}+l_{n-3}+l_n, l_{n-4}+l_{n-2}+l_{n-1}$,

$\Sigma^5: l_{n-7}+l_{n-1}+l_n, l_{n-6}+l_{n-2}+l_n, l_{n-5}+l_{n-3}+l_n, l_{n-5}+l_{n-2}+l_{n-1}, l_{n-4}+l_{n-3}+l_{n-1}$,

……

$\Sigma^{n-4}: l_2+l_{n-1}+l_n, l_3+l_{n-2}+l_n,\cdots, l_k+l_{n-k+2}+l_{n-1}, l_k+l_{n-k+3}+l_{n-2},\cdots$,

$\Sigma^{n-3}: l_1+l_{n-1}+l_n, l_2+l_{n-2}+l_n,\cdots, l_k+l_{n-k}+l_n, l_3+l_{n-2}+l_{n-1},\ldots, l_k+l_{n-k+1}+l_{n-1},\cdots, f-l_1+l_{n-1}+l_n,\cdots$

$\Sigma^{n-2}: l_1+l_{n-2}+l_n, l_2+l_{n-3}+l_n,\cdots, l_k+l_{n-k-1}+l_n,\cdots, f-l_1+l_{n-2}+l_n, f-l_2+l_{n-1}+l_n$,

$\Sigma^{n-1}: l_1+l_{n-3}+l_n, l_2+l_{n-4}+l_n,\cdots, l_k+l_{n-k-2}+l_n,\cdots, f-l_1+l_{n-3}+l_n, f-l_2+l_{n-2}+l_n, f-l_1+l_{n-2}+l_{n-1}, f-l_3+l_{n-1}+l_n$,

$\Sigma^n: l_1+l_{n-4}+l_n, l_2+l_{n-5}+l_n,\cdots, l_k+l_{n-k-3}+l_n,\cdots, f-l_1+l_{n-4}+l_n, f-l_1+l_{n-3}+l_{n-1}, f-l_2+l_{n-2}+l_{n-1}, f-l_3+l_{n-2}+l_n, f-l_4+l_{n-1}+l_n$,

……

$\Sigma^{2n-6}: l_1+l_2+l_n, l_1+l_3+l_{n-1},\cdots, l_i+l_j+l_{n-k}, f-l_1+l_2+l_n, f-l_2+l_3+l_n, f-l_3+l_4+l_n,\cdots, f-l_{n-3}+l_{n-2}+l_n, f-l_{n-2}+l_{n-1}+l_n,\cdots,(i+j=k+3)$,

$\Sigma^{2n-5}: l_1+l_2+l_{n-1}, l_1+l_3+l_{n-2},\cdots, l_i+l_j+l_{n-k}, f+l_n,(i+j=k+2)$,

$\Sigma^{2n-4}: l_1+l_2+l_{n-2},\cdots, l_i+l_j+l_{n-k}, f-l_2+l_k+l_{n-k+1},\cdots, 2f-l_1-l_2+l_n, f+l_1-l_2+l_n, f+l_2-l_3+l_n,\cdots, f+l_{n-2}-l_{n-1}+l_n, f+l_n,(i+j=k+1)$,

$\Sigma^{2n-3}: 2f-l_1-l_3+l_n, f+l_1-l_3+l_n, f+l_k-l_{k+2}+l_n, f+l_{n-2}$,

……

$\Sigma^{3n-7}: f+l_2,\cdots$,

$\Sigma^{3n-6}: f+l_1, 2f-l_1,\cdots$.

由上面计算结果可知以 λ_{n-2} 为最高权的不可约表示 $V_{\lambda_{n-2}}$ 的所有权是

$$\Sigma = W_1 \cup W_2.$$

证毕.

下面的定理说明，外尔群轨道 W_1, W_2 正好是两组丢番图方程的解集.

定理 3.2　集合 W_1, W_2 有如下刻画：

$$W_1 = \{X\in Pic(S)\mid XC=0, X^2=-3, XK=-3\},$$

$$W_2 = \{X\in Pic(S)\mid XC=0, X^2=-1, XK=-3\}.$$

证明　$K=-2(s+f)+l_1+l_2+\cdots+l_n$. 设 $X=a_0f+b_0s+a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_nl_n, a_i, b_0\in\mathbf{Z}$. 则丢番图方程组 $XC=0, X^2=-3, XK=-3$ 可以写成

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 = 3, \\ 2a_0+\sum\limits_{i=1}^n a_i = 3 \end{cases} \tag{1}$$

从方程

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 3$$

可得 $n \geqslant 3$ 且存在 i,j,k，使得 $a_i = \pm 1, a_j = \pm 1, a_k = \pm 1, a_m = 0, m \neq i,j,k$. 从而 $0 \leqslant a_0 \leqslant 3$.

当 $a_0 = 0$ 时，方程组可化简为

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 3, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 3 \end{cases} \tag{2}$$

易得方程的解为 $a_i = 1, a_j = 1, a_k = 1$. 从而 $X = l_i + l_j + l_k$，其中 i,j,k 互不相等.

当 $a_0 = 1$ 时，方程组可化简为

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 3, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \end{cases} \tag{3}$$

易得存在 $a_i = 1, a_j = 1, a_k = -1$，且 $a_m = 0, m \neq i,j,k$. 此时 $X = f - l_i + l_j + l_k$，其中 i,j,k 互不相等.

同理可得，当 $a_0 = 2$ 时，$X = 2f - l_i - l_j + l_k$，其中 i,j,k 互不相等.

当 $a_0 = 3$ 时，$X = 3f - l_i - l_j - l_k$，其中 i,j,k 互不相等. 集合

$$\{X \in Pic(S) \mid XC = 0, X^2 = -1, XK = -3\}$$

里面的元素由方程组

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1, \\ 2a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 3 \end{cases} \tag{4}$$

所确定. 此方程组的解有两种：存在 $i \neq 0$ 使得 $a_i = 1, a_0 = 1, a_j = 0, j \neq i$ 或 $a_i = -1, a_0 = 2, a_j = 0, j \neq i$. 从而 $X = f + l_i$ 或 $X = 2f - l_i$. 基本支配权 λ_{n-2} 的不可约表示 $V_{\lambda_{n-2}}$ 的所有权在外尔群的作用下构成两个外尔群轨道，每个轨道上的元素恰好是一组丢番图方程的解. 证毕.

值得注意的是，包含在纤维 f 中的例外曲线只有 $2n$ 条，它们是

$$\varepsilon = \{l_i, f - l_i \mid i = 1, \cdots, n\}.$$

这样，W_1 的元素恰好是 3 条包含于不同纤维中的例外曲线的和，反之亦然. 而 W_2 中的元素恰好是 $C = f$ 与任一条包含于纤维中的例外曲线的和. 同时注意到，若两条例外曲线处于同一条纤维之中，则它们的和为 f. 这样我们就有

定理 3.3 最高权模 $V_{\lambda_{n-2}}$ 的权集 Σ 由包含于纤维中的 3 条不同的例外曲线的和所组成.

据此，根据文献[1] 的方法我们还可以构造出曲面上的主 D_n-丛的一个表示向量丛如下：

$$V_{\lambda_{n-2}} = \bigoplus_{E = E_1 + E_2 + E_3, E_i \in \varepsilon} O_S(E).$$

这些结果补充了文献[1,2] 的内容.

参考文献：

[1] Leung N C, Zhang J J. Moduli of bundles over rational surfaces and elliptic curves I: simply laced cases [J]. J Lond Math Soc, 2009, 80: 750.

[2] Xu M, Zhang J J. Lattices, Diophantine equations and applications to rational surfaces [J]. Sci China Math, 2012, 55: 1189.

[3] 怀邦. 典型群及其在物理学上的应用 [M]. 北京：科学出版社，1982.

[4] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1978: 139.

[5] 林记. $\widetilde{A}_n$-型丛倾斜代数的 Cohen-Macaulay Auslander 代数的导出等价分类 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：967.