doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.02.002

含有 p-Laplacian 算子的四阶 Sturm-Liouville 边值问题迭代解的存在性

赵如慧，韩晓玲
（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘　要：本文运用迭代法研究了带 p-Laplacian 算子的四阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases}(\varphi_p(u''(t)))''+q(t)f(t,u(t),u''(t))=0,\ t\in(0,1),\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\gamma u(1)+\delta u'(1)=0,u''(0)=0,u'''(0)=0\end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s,p>1;f:[0,1]\times[0,+\infty)\times\mathbf{R}\to[0,+\infty)$连续；$q(t)>0,t\in(0,1)$.

关键词：Sturm-Liouville 边值问题；p-Laplacian 算子；正解；单调迭代
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)02-0226-05

Existence and iteration of positive solutions for fourth-order Sturm-Liouville boundary value problems with p-Laplacian

ZHAO Ru-Hui, *HAN Xiao-Ling*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we investigate the existence of positive solutions for the following fourth-order Sturm-Liouville boundary value problem with p-Laplacian operator:

$$\begin{cases}(\varphi_p(u''(t)))''+q(t)f(t,u(t),u''(t))=0,\ t\in(0,1),\\ \alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\gamma u(1)+\delta u'(1)=0,u''(0)=0,u'''(0)=0,\end{cases}$$

where $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s,p>1;f:[0,1]\times[0,+\infty)\times\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ is continuous; $q(t)>0,t\in(0,1)$.

Keywords: Sturm-Liouville boundary value problem; p-Laplacian operator; Positive solutions; Monotone iterative
(2010 MSC 34B18)

1　引　言

含 p-Laplacian 算子的方程常出现在物理模型[1-3]、燃烧理论[4]、生物学[5]和哈密顿系统中[6]. 在过去几十年里，大量的文章研究了含有 p-Laplacian 算子的二阶 Sturm-Liouville 边值问题正解的存在性[7-11]，但很少有作者研究带 p-Laplacian 算子的四阶 Sturm-Liouville 边值问题正解的存在性.

最近，文献[12]考虑了带 p-Laplacian 算子的三阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$(\varphi_p(u''(t)))'+q(t)f(t,u(t),u''(t))=0,t\in(0,1) \tag{1}$$

$$\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\gamma u(1)+\delta u'(1)=0,u''(0)=0 \tag{2}$$

收稿日期：2017-05-22
基金项目：国家自然科学基金(11561063)
作者简介：赵如慧(1992－)，女，甘肃兰州人，硕士研究生，主要研究常微分边值问题. E-mail：1720907089@qq.com
通讯作者：韩晓玲. E-mail：hanxiaoling9@163.com

正解的存在性，其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s, p>1$. 受以上结果的启发，本文主要研究带 p-Laplacian 算子的四阶 Sturm-Liouville 边值问题

$$(\varphi_p(u''(t)))''+q(t)f(t,u(t),u''(t))=0, t\in(0,1) \tag{3}$$

$$\alpha u(0)-\beta u'(0)=0,\quad \gamma u(1)+\delta u'(1)=0, u''(0)=0, u'''(0)=0 \tag{4}$$

正迭代解的存在性，其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s, p>1$, $\varphi_p^{-1}=\varphi_q, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, \alpha,\beta,\gamma,\delta\geqslant 0$ 且满足

(H1) $\rho=\gamma\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta>0$;

(H2) $q(t)$ 是定义在 $(0,1)$ 上的非负连续函数，并且在 $(0,1)$ 任何子区间上不恒为零，且 $\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t<+\infty$;

(H3) $f: [0,1]\times[0,+\infty)\times\mathbf{R}\to[0,+\infty)$ 连续，并且存在常数 $\mu_1,\mu_2>0$，使得对于任意的 $t\in[0,1], u\in[0,+\infty), v\in\mathbf{R}$ 都有

$$f(t,\lambda u,v)\geqslant\lambda^{\mu_1}f(t,u,v), 0\leqslant\lambda\leqslant 1 \tag{5}$$

$$f(t,u,\lambda v)\geqslant\lambda^{\mu_2}f(t,u,v), 0\leqslant\lambda\leqslant 1 \tag{6}$$

(H4) $f(t,0,0)\neq 0$ 并且 $f(t,1,1)\neq 0$.

令

$$\sigma=\max_{t\in[0,1]}f(t,1,1) \tag{7}$$

注 1　不等式(5)，(6)与下列不等式等价：

$$f(t,\lambda u,v)\leqslant\lambda^{\mu_1}f(t,u,v), \lambda\geqslant 1 \tag{8}$$

$$f(t,u,\lambda v)\leqslant\lambda^{\mu_2}f(t,u,v), \lambda\geqslant 1 \tag{9}$$

2　预备知识

记空间 $E=C^2[0,1]$，规定其范数为

$$\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty,\|u''\|_\infty\},$$

这里

$$\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|,$$

$$C^{2+}[0,1]=\{u\in C^2[0,1]: u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\}.$$

定义 2.1　设 E 是 Banach 空间，P 是 E 上的非空凸闭集. 称 P 是一个锥，如果

(i) $\lambda u\in P$，对任意 $u\in P, \lambda\geqslant 0$;

(ii) $u, -u\in P$，则 $u=\theta$.

定义锥 $P=\{u\in C^{2+}[0,1]: u(t)$ 在 $[0,1]$ 上是凹函数$\}$. 令 $G(t,s)$ 是方程 $u''(t)=0, t\in[0,1]$ 满足边界条件(4)式的 Green 函数. 则

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(\beta+\alpha t)(\gamma+\delta-\gamma s)}{\rho}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ \dfrac{(\beta+\alpha s)(\gamma+\delta-\gamma t)}{\rho}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

显然

$$0\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s), 0\leqslant t,s\leqslant 1 \tag{10}$$

对于任意 $u(t)\in C^{2+}[0,1]$，定义算子 T

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)\varphi_q\left(\int_0^s(s-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s, t\in[0,1] \tag{11}$$

则算子 T 的不动点是问题(3)，(4)式的解.

注 2　通过算子的定义，容易得出

$$(Tu)'(t)=\frac{\gamma}{\rho}\int_0^t(\beta+\alpha s)\varphi_q\left(\int_0^s(s-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)\varphi_q\left(\int_0^s(s-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \tag{12}$$

$$(Tu)''(t)=-\varphi_q\left(\int_0^t(t-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\right) \tag{13}$$

引理 2.2　若(H1)～(H3)成立，则算子 $T:P\to P$ 全连续.

证明　根据(H1)～(H3)和算子 T 的定义，我们可以推出，对任意 $u\in P, t\in(0,1)$ 都有 $(Tu)(t)\geqslant 0$. 通过(13)式得到

$$(Tu)''(t)=-\varphi_q\left(\int_0^t(t-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\leqslant 0,$$

即 $(Tu)(t)$ 在则 $[0,1]$ 上是凹的. 故 $T(P)\subset P$.

下证算子 $T:P\to P$ 是全连续的. 算子 T 显然连续. 我们只需证明 T 是紧的. 设有界集 $\Omega_0\subset P$，则存在一个 R 使得 $\Omega_0\subset\{u\in P:\|u\|\leqslant R\}$. 易证 $T(\Omega_0)$是有界且等度连续的. 由 Ascoli-Arzela 定理知 $T(\Omega_0)$是紧集. 因此，$T:P\to P$ 是全连续的.

记

$$B=\max\left\{\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s=\frac{\beta\delta+\frac{1}{2}\beta\gamma+\frac{1}{2}\alpha\delta+\frac{1}{6}\alpha\gamma}{\rho}, \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{1}{2}\gamma+\delta\right), \frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right), 1\right\},$$

$$C=B\varphi_q\left(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau\right).$$

3　主要结果及证明

定理 3.1　设(H1)～(H4)成立. 如果存在一个常数 $a>1$，使得

(H5) $f(t,u,v_1)\leqslant f(t,u,v_2), 0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant u_1\leqslant u_2\leqslant a, 0\leqslant|v_1|\leqslant|v_2|\leqslant a$;

(H6) $\varphi_p(c)\leqslant\dfrac{\varphi_p(a)}{\sigma a^{\mu_1+\mu_2}}$,

其中 μ_1,μ_2,σ 的定义见(5)~(7)式,则问题(3),(4)式有两个正的凹解 $u*,\omega*$ 使得

$$0\leqslant\|u*\|\leqslant a,$$
$$0\leqslant\|\omega*\|\leqslant a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}T^nu_0=u^*,$$
$$\lim_{n\to\infty}(u_n)''=\lim_{n\to\infty}(T^nu_0)''=(u^*)'',$$
$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=\lim_{n\to\infty}T^n\omega_0=\omega^*,$$
$$\lim_{n\to\infty}(\omega_n)''=\lim_{n\to\infty}(T^n\omega_0)''=(\omega^*)'',$$

其中

$$n_0(t)=\frac{a}{B}\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s,0\leqslant t\leqslant1,$$
$$\omega_0(t)=0,0\leqslant t\leqslant1,$$

迭代方法为

$$u_{n+1}=Tu_n=T^nu_0,$$
$$\omega_{n+1}=T\omega_n=T^n\omega_0.$$

证明 令

$$\overline{P_a}=\{u\in P:0\leqslant\|u\|\leqslant a\}.$$

我们首先证明 $T\overline{P_a}\subset\overline{P_a}$. 对任意 $u\in\overline{P_a}$,有

$$0\leqslant u(t)\leqslant\max_{t\in[0,1]}|u(t)|\leqslant\|u\|\leqslant a,$$
$$|u''(t)|\leqslant\max_{t\in[0,1]}|u''(t)|\leqslant\|u\|\leqslant a.$$

根据(8),(9)式及(H3)得到

$$0\leqslant f(t,u(t),u''(t))\leqslant f(t,a,a)\leqslant a^{\mu_1+\mu_2}f(t,1,1)\leqslant\sigma a^{\mu_1+\mu_2},0<t<1 \tag{14}$$

通过范数的定义

$$\|Tu\|=\max\{\|Tu\|_\infty,\|(Tu)'\|_\infty,\|(Tu)''\|_\infty\}=\max\{\max_{t\in[0,1]}|(Tu)(t)|,(Tu)'(0),-(Tu)'(1),-(Tu)''(1)\},$$

式(10),(14)及(H6)得

$$\max_{t\in[0,1]}|(Tu)(t)|=\max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^1G(t,s)\varphi_q(\int_0^s(s-\tau)q(\tau)\cdot f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\max_{t\in[0,1]}\int_0^1G(s,s)\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\int_0^1G(s,s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)\int_0^1G(s,s)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$C\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\leqslant a,$$

$$(Tu)'(0)=\frac{\alpha}{\rho}\int_0^1(\gamma+\delta-\gamma s)\varphi_q(\int_0^s(s-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\alpha}{\rho}\int_0^1(\gamma+\delta-\gamma s)\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\alpha}{\rho}\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)\int_0^1(\gamma+\delta-\gamma s)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{\alpha}{\rho}\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)(\frac{1}{2}\gamma+\delta)\leqslant C\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\leqslant a,$$

$$-(Tu)'(1)=\frac{\gamma}{\rho}\int_0^1(\beta+\alpha s)\varphi_q(\int_0^s(s-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\gamma}{\rho}\int_0^1(\beta+\alpha s)\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\gamma}{\rho}\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)\int_0^1(\beta+\alpha s)\mathrm{d}s=$$
$$\frac{\gamma}{\rho}\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)(\frac{1}{2}\alpha+\beta)\leqslant C\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\leqslant a,$$

$$-(Tu)''(1)=\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\leqslant$$
$$\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)\leqslant C\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\leqslant a.$$

因此可以得到 $\|Tu\|\leqslant a$. 故 $T\overline{P_a}\subset\overline{P_a}$.

一方面,令

$$u_0(t)=\frac{a}{B}\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s\leqslant a.$$

则

$$u_0'(t)=\frac{a}{B}[-\frac{\gamma}{\rho}\int_0^t(\beta+\alpha s)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{\rho}\int_t^1(\gamma+\delta-\gamma s)\mathrm{d}s]u_0''(t)=-\frac{a}{B}.$$

故

$$u_0(t)\leqslant\frac{a}{\int_0^1G(s,s)\mathrm{d}s}\int_0^1G(t,s)\mathrm{d}s\leqslant a,$$

$$u_0'(0)=\frac{a}{B}\frac{\alpha}{\rho}(\frac{1}{2}\gamma+\delta)\leqslant a,$$

$$-u_0'(1) = \frac{a}{B}\frac{\gamma}{\rho}(\frac{1}{2}\alpha + \beta) \leqslant a,$$

$$\max_{t\in[0,1]}|u''(t)| = \frac{a}{B} \leqslant a.$$

从而 $u_0 \in \overline{P_a}$. 令 $u_1 = Tu_0$，同理可证 $u_1 \in \overline{P_a}$. 定义

$$u_{n+1} = Tu_n = T^{n+1}u_0, n=0,1,2\cdots.$$

由于 T 是全连续的，故$\{u_n\}$是紧集. 因为

$$u_1(t) = (Tu_0)(t) = \int_0^1 G(t,s)\varphi_q(\int_0^s (s-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 G(t,s)\varphi_q(\int_0^1 (1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u''(\tau))\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s \leqslant \varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau) = \frac{c}{B}\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2})\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{a}{B}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s = u_0(t),$$

且

$$|u_1''(t)| = |(Tu_0)''(t)| = \varphi_q(\int_0^t (t-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u_0''(\tau))\mathrm{d}\tau) \leqslant \varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)f(\tau,u(\tau),u_0''(\tau))\mathrm{d}\tau) = \frac{c}{B}\varphi_q(\sigma a^{\mu_1+\mu_2}) \leqslant \frac{a}{B} = |u_0''(t)|,$$

所以有 $u_1(t)\leqslant u_0(t), |u_1''(t)|\leqslant|u_0''(t)|, 0<t<1$. 根据(11)式及(H5)，有

$$u_2(t) = Tu_1(t)\leqslant Tu_0(t) = u_1(t), 0<t<1,$$
$$|u_2''(t)| = |(Tu_1)''(t)|\leqslant|(Tu_0)''(t)| = |u_1''(t)|, 0<t<1.$$

通过归纳得

$$u_{n+1}(t)\leqslant u_n(t), |u_{n+1}''(t)|\leqslant|u_n''(t)|, 0<t<1, n=1,2\cdots.$$

因此存在 $u^* \in \overline{P_a}$，使得 $u_n \to u^*$. 根据 T 的连续性和 $u_{n+1}(t) = Tu_n(t)$，可以得到 $Tu^*(t) = u^*(t)$. 则 $u*$ 是问题(3)，(4)式的非负凹解.

另一方面，令

$$\omega_{n+1} = T\omega_n = T^{n+1}\omega_0, n=0,1,2\cdots.$$

由于 $T\overline{P_a}\subset\overline{P_a}$，则 $\omega_n \in \overline{P_a}$. 因为 T 是全连续的，故$\{\omega_n\}$是紧集. 因为

$$\omega_1 = T\omega_0 = T(0) \in \overline{P_a},$$

则有

$$\omega_1(t) = T\omega_0(t) = T(0)(t) \geqslant 0, 0<t<1,$$
$$|\omega_1''(t)| = |(T\omega_0)''(t)| = |T''(0)(t)| \geqslant 0, 0<t<1.$$

故

$$\omega_2(t) = (T\omega_1)(t) \geqslant T(0)(t) = \omega_1, 0<t<1,$$
$$|\omega_2''(t)| = |(T\omega_1)''(t)| \geqslant |T''(0)(t)| = |\omega_1''(t)|, 0<t<1.$$

通过归纳得

$$\omega_{n+1}(t)\geqslant\omega_n(t), |\omega_{n+1}''(t)|\geqslant|\omega_n''(t)|, 0<t<1, n=0,1,\cdots.$$

因此存在 $\omega^* \in \overline{P_a}$，使得 $\omega_n \to \omega^*$. 根据 T 的连续性和 $\omega_{n+1}(t) = T\omega_n(t)$，可以得到 $T\omega^*(t) = \omega^*(t)$. 则 $\omega*$ 是问题(3)，(4)式的非负凹解. 由(H4)知零不是方程的解，因此 $\max_{t\in[0,1]}|\omega^*(t)| > 0$. 根据 $\omega^*(t)$ 的凹性得

$$\omega^*(t) \geqslant \min\{t, 1-t\}\max_{t\in[0,1]}\omega^*(t) > 0, t \in (0,1).$$

因为 $u_0(t) \geqslant \omega_0(t)$，$|u_0''(t)| \geqslant |\omega_0''(t)|$，$t \in [0,1]$，根据(H5)及式(11)有 $Tu_0 \geqslant T\omega_0$，$u^* \geqslant \omega^*$. 故

$$u^*(t) \geqslant \omega^*(t) \geqslant \min\{t, 1-t\}\max_{t\in[0,1]}\omega^*(t) > 0.$$

从而方程(3)，(4)式有两个正凹解 u^*, ω^* 且 $0 \leqslant \|u^*\| \leqslant a$，$0 \leqslant \|\omega^*\| \leqslant a$. 证毕.

推论 3.2　假设(H1)～(H4)成立，若以下条件成立：

(H7) $f(t,u_1,v_1) \leqslant f(t,u_1,v_2)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$，$0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$，$0 \leqslant |v_1| \leqslant |v_2|$；

(H8) $\mu_1 + \mu_2 + 1 < p$，

则存在常数 a 使得方程(3)，(4)式有两个满足定理 3.1 的正凹解.

证明　因为 $\mu_1 + \mu_2 + 1 < p$，则有

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{\mu_1+\mu_2+1}}{u^p} = 0.$$

故存在 $a > 1$，使得

$$\frac{a^{\mu_1+\mu_2}}{\varphi_p(a)} = \frac{a^{\mu_1+\mu_2+1}}{a^p} < \frac{1}{\varphi_p(c)\sigma},$$

$$\varphi_p(c) \leqslant \frac{\varphi_p(a)}{\sigma a^{\mu_1+\mu_2}}.$$

由定理 3.1 知推论 3.2 成立.

4　应　用

考虑边值问题

$$(\varphi_3(u''(t)))'' + \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}[\mathrm{e}^t(u^{\frac{3}{5}}(t) + (u'')^{\frac{1}{3}}(t)) + 1] = 0, t\in(0,1),$$

$$u(0)-u'(0)=0, u(1)=0, u''(0)=0,$$
$$u'''(0)=0,$$

其中 $p=3, \alpha=1, \beta=1, \gamma=1, \delta=0$. 令

$$f(t,u,v)=\mathrm{e}^t(u^{\frac{3}{5}}(t)+(u'')^{\frac{1}{3}}(t))+1,$$
$$q(t)=\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}, \mu_1=1, \mu_2=\frac{1}{3}.$$

对任意 $0\leqslant\lambda\leqslant 1, u\in[0,+\infty), v\in\mathbf{R}, t\in[0,1]$,有

$$f(t,\lambda u,v)=\mathrm{e}^t[(\lambda u)^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{1}{3}}]+1\geqslant$$
$$\lambda^{\frac{3}{5}}[\mathrm{e}^t(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{1}{3}})+1]\geqslant\lambda f(t,u,v),$$
$$f(t,u,\lambda v)=\mathrm{e}^t[u^{\frac{3}{5}}+(\lambda v)^{\frac{1}{3}}]+1\geqslant$$
$$\lambda^{\frac{1}{3}}[\mathrm{e}^t(u^{\frac{3}{5}}+v^{\frac{1}{3}})+1]=\lambda^{\frac{1}{3}}f(t,u,v).$$

从而(H1)~(H4)成立,且

$$\rho=2, \sigma=\max_{t\in[0,1]}f(t,1,1)=2\mathrm{e}+1.$$

因为

$$q(t)=\frac{1}{(1-t)\sqrt{t}},$$

则

$$B=\max\{\int_0^1 G(s,s)\mathrm{d}s=\frac{\beta\delta+\frac{1}{2}\beta\gamma+\frac{1}{2}\alpha\delta+\frac{1}{6}\alpha\gamma}{\rho}, \frac{\alpha}{\rho}(\frac{1}{2}\gamma+\delta),$$
$$\frac{\gamma}{\rho}(\frac{1}{2}\alpha+\beta), 1\}=1,$$
$$C=B\varphi_q(\int_0^1(1-\tau)q(\tau)\mathrm{d}\tau)=\varphi_q(2).$$

从而可得 $\varphi_p(C)=2\varphi_p(1)=2$. 令 $a=[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}}$. 则有

$$\frac{\varphi_p(a)}{\sigma a^{\mu_1+\mu_2}}=\frac{([3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}})^2}{(2\mathrm{e}+1)([3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}}=$$
$$3>2=\varphi_p(C).$$

故(H6)成立. 对于给定的 a,显然(H5)也成立. 由定理3.1可知边值问题有两个正凹解 u^*, ω^*,使得

$$0<u^*<[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}},$$
$$0<|(u^*)'|<[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}},$$
$$0<|(u^*)''|<[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}},$$
$$0<\omega^*<[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}},$$
$$0<|(\omega^*)'|<[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}},$$
$$0<|(\omega^*)''|<[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}T^n u_0=u^*,$$
$$\lim_{n\to\infty}(u_n)''=\lim_{n\to\infty}(T^n u_0)''=(u^*)'',$$
$$\lim_{n\to\infty}\omega_n=\lim_{n\to\infty}T^n\omega_0=\omega^*,$$
$$\lim_{n\to\infty}(\omega_n)''=\lim_{n\to\infty}(T^n\omega_0)''=(\omega^*)''.$$

其中

$$u_0(t)=\frac{1}{4}[3(2\mathrm{e}+1)]^{\frac{3}{2}}(-2t^2+t+1),$$
$$\omega_0(t)=0, 0\leqslant t\leqslant 1.$$

参考文献:

[1] 丁凌,孟义杰,张丹丹. 一类常维的 p-Laplzce 系统的周期解[J]. 四川大学学报:自然科学版,2012,49:504.

[2] 张申贵,刘华. 带有类 p-Laplace 算子的 Kirchhoff 型方程的多重解[J]. 高校应用数学学报,2016,31:153.

[3] 达举霞,韩晓玲. 奇异四阶三点边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版,2017,54:441.

[4] Ramaswamy M, Shivaji R. Multiple positive solutions for classes of p-Laplacian equations [J]. Differ Integral Equ, 2004, 17: 1255.

[5] Oruganti S, Shi J, Shivaji R. Logistic equations with p-Laplacian and constant yield harvesting [J]. Abstr Appl Anal, 2004, 9: 723.

[6] 薛益民,苏莹. 时标上一类 p-Laplace 哈密顿系统周期解的存在性[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2016,39:522.

[7] Xin Y, Cheng Z B. Existence of homoclinic solutions to nonautonomous second-order p-Laplace system with a coercive potential [J]. Ann Appl Math, 2015, 31: 345.

[8] Kong F C, Li X, Lu S P. Homoclinic solutions for prescribed mean curvature p-Laplace equations with delays [J]. J East China Normal Univ, 2016, 4: 44.

[9] Guo J, Dai X B. Nontrivial homoclinic solutions for second-order p-Laplace differential system with impulsive effects [J]. J Donghu Univ, 2014, 31: 25.

[10] 胡卫敏,蒋达清. 二阶 p-Laplace 方程组奇异边值问题解的存在性[J]. 吉林大学学报:理学版,2012,50:835.

[11] 龙严. 非线性二阶 Robin 多正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版,2017,54:249.

[12] Feng X F, Feng H Y, Tan H X. Existence and iteration of positive solutions for fourth-order Sturm-Liouville boundary value problems with p-Laplacian [J]. Appl Math Comput, 2015, 266: 634.