2018 年 5 月　　四川大学学报(自然科学版)　　May 2018
第 55 卷 第 3 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 55 No. 3

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.03.001

基于 P 序的参数集优化问题解的稳定性

刘培丽，陈纯荣
(重庆大学数学与统计学院，重庆 401331)

摘　要：Possible less 序关系(P 序)是一种相对较新的集序关系，在计算机编译器、区间运算以及鲁棒优化等方面均有应用. 本文在 P 序下讨论了参数集优化问题解映射的稳定性. 本文给出了 P 序关系下严格拟凸以及水平集映射的定义，得到了参数集优化问题解映射上下半连续性的充分条件，并给出了例子加以验证.

关键词：集优化；集序关系；上下半连续性；闭性
中图分类号：O221.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)03-0425-04

Stability of solutions to parametric set optimization with possible less order relation

LIU Pei-Li, *CHEN Chun-Rong*
(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Possible less order relation is a new set order relation introduced by Chiriaev in interval arithmetic and it is implemented in Fortran compiler and robust optimization. In this paper, the stability of the solution mapping to parametric set optimization with possible less order relation is studied. Some sufficient conditions for the upper semi-continuity and lower semi-continuity of the solution mapping are given.

Keywords: Set optimization; Set order relation; Lower and upper semi-continuity; Closedness
(2010 MSC 49K40, 90C31, 90C29)

1　引　言

集值优化主要分为两类:向量序集值优化和集序集值优化. Kuroiwa 等人在文献[1]提出了集序集值优化问题,并在文献[1, 2]中定义了几种集序关系. 此后,集值优化问题得到了多方面研究,如最优性条件[3],解映射的连续性[4-6],向量变分不等式与向量均衡问题[7]等. 此外,稳定性在集优化理论以及实际应用(如金融数学,经济数学以及交通网络)中也有非常重要的地位[8,9].

集序关系是集值优化研究过程中一个不可或缺的组成部分,Possible less 集序(P 序)即是集序关系中的一种. Xu 和 Zhang 在文献[6]研究了在 P 序关系下参数集优化问题解映射的稳定性问题,这里的 P 序最早由 Chiriaev 在区间运算中提出并加以应用,此后又在 Sun Microsystems 的 Fortran 编译器 f95 以及鲁棒优化中得到实施[10].

本文主要讨论在 P 序下参数集优化问题稳定性的充分条件. 运用与文献[6]不同的假设条件,本文首先介绍了 P 序意义下严格拟凸的定义,进而得到参数集优化问题解映射上下半连续性的充分条件,并给出例子加以验证.

收稿日期：2017-08-31
基金项目：国家自然科学基金(11301567)
作者简介：刘培丽(1991－)，女，硕士，主要从事向量优化方面的研究. E-mail：lplperry@163.com
通讯作者：陈纯荣. E-mail：chencr1981@163.com

2 预备知识

如无特别说明,本文中 X,Y,Z 为赋范线性空间,Λ 为 Z 的非空子集,$\Omega(Y)$为 Y 中所有非空子集的集合,$K\subseteq Y$ 是闭凸点锥. 设 $A,B\in\Omega(Y)$,定义 $\Omega(Y)$上序关系(P 序)$\leqslant_p$[11]:

$$A\leqslant_p B\Leftrightarrow A\cap(B-K)\neq\varnothing\Leftrightarrow (A+K)\cap B\neq\varnothing.$$

显然,$\leqslant_p$ 具有自反性,但值得注意的是,其不具有传递性和反对称性.

定义 2.1 设 $A,B\in\Omega(Y)$,$\mathrm{int}K\neq\varnothing$. 定义 $\Omega(Y)$上序关系$\ll_p$:

$$A\ll_p B\Leftrightarrow A\cap(B-\mathrm{int}K)\neq\varnothing\Leftrightarrow (A+\mathrm{int}K)\cap B\neq\varnothing.$$

定义 2.2[2] 设 $S\subseteq\Omega(Y)$. 称 $A\in S$ 为 S 的极小解当且仅当对于任意 $A\in S$ 满足 $B\prec_p A$ 都有 $A\prec_p B$. 所有极小解的集合记为 p-Min$S$.

M 是 X 中的一个非空集合,$F:M\to Y$ 为集值映射. P 序下的集优化问题定义如下:

(SOP) $p-\mathrm{Min}F(x)$ s. t. $x\in M$.

记 $R:=\{F(x):x\in M\}$.

定义 2.3[2] 设 $\bar{x}\in M$,称 $\bar{x}$ 为(SOP)的极小解当且仅当 $F(\bar{x})\in p-\mathrm{Min}R$.

令 $\Lambda\subseteq Z,\lambda\in\Lambda$. 若集合 M 和映射 F 受到参数λ 的扰动影响,那么 P 序下参数集优化问题(P-SOP)定义如下:

(P-SOP) $p-\mathrm{Min}\ F(x,\lambda)$ s. t. $x\in M(\lambda)$,

其中 $M:\Lambda\to X,F:B\times\Lambda\subseteq X\times Z\to Y$ 为集值映射,$M(\Lambda):=\cup_{\lambda\in\Lambda}M(\lambda)\subseteq B$. 记 $S:\Lambda\to X$ 为(P-SOP)的解映射. 本文主要讨论 $S(\cdot)$ 的上下半连续性及闭性,文中如无特别说明,$\forall\lambda\in\Lambda$ 假设 $S(\lambda)\neq\varnothing$. 下面介绍集值映射上下半连续性的定义与性质.

定义 2.4[9] 设 $Q:\Lambda\to X$,给定 $\bar{\lambda}\in\Lambda$.

(i) 若对于任意开集 $V\subseteq X$ 满足 $V\cap Q(\bar{\lambda})\neq\varnothing$,都存在 $\bar{\lambda}$ 的邻域 $N(\bar{\lambda})$ 使得对于任意的 $\lambda\in N(\bar{\lambda})$ 都有 $V\cap Q(\lambda)\neq\varnothing$,则称 Q 在$\bar{\lambda}$ 处下半连续(l. s. c).

(ii) 若对于任意开集 $V\subseteq X$ 满足 $Q(\bar{\lambda})\subseteq V$,都存在$\bar{\lambda}$ 的邻域 $N(\bar{\lambda})$ 使得对于任意的 $\lambda\in N(\bar{\lambda})$ 都有 $Q(\lambda)\subseteq V$,则称 Q 在$\bar{\lambda}$ 处上半连续(u. s. c).

(iii) 若对于任意序列$(\lambda_n,x_n)\in\mathrm{graph}Q:=\{(\lambda,x):x\in Q(\lambda)\}$,且满足$(\lambda_n,x_n)\to(\bar{\lambda},\bar{x})$都有$(\bar{\lambda},\bar{x})\in\mathrm{graph}Q$,则称 Q 在$\bar{\lambda}$ 处是闭的.

性质 2.5[9] (i) Q 在$\bar{\lambda}$ 处下半连续当且仅当对于任意序列$\{\lambda_n\}\subseteq\Lambda$ 满足 $\lambda_n\to\bar{\lambda}$ 及任意 $\bar{x}\in Q(\bar{\lambda})$,都存在 $x_n\in Q(\lambda_n)$使得 $x_n\to\bar{x}$.

(ii) 若 Q 是紧值的,则 Q 在$\bar{\lambda}$ 处上半连续当且仅当对于任意序列$\{\lambda_n\}\subseteq\Lambda$ 满足 $\lambda_n\to\bar{\lambda}$ 及任意 $x_n\in Q(\lambda_n)$,都存在 $\bar{x}\in Q(\bar{\lambda})$ 以及$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$,使得 $x_{n_k}\to\bar{x}$.

定义 2.6 设 X_0 为 X 的凸子集,称集值映射$F:X_0\to Y$ 在X_0 上 P 严格 K 拟凸当且仅当对于任意的 $x_0\in X_0$ 以及 $x_1,x_2\in X_0$ 满足 $x_1\neq x_2,t\in(0,1)$,若 $F(x_1)\leqslant_p F(x_0)$ 且 $F(x_2)\leqslant_p F(x_0)$ 都有 $F(tx_1+(1-t)x_2)\ll_p F(x_0)$.

注 1 若 F 是向量值映射,则 F 的 P 严格 K 拟凸性就等同于向量值函数的严格拟凸性.

定义 2.7 设 $F:X\times\Lambda\to Y$,由

$$L_p(y,\lambda):=\{x\in M(\lambda):F(x,\lambda)\prec_p F(y,\lambda)\}=\{x\in M(\lambda):F(x,\lambda)\cap[F(y,\lambda)-K]\neq\varnothing\}$$

定义的映射 $L_p:X\times\Lambda\to Y$ 称为 P 序的水平集映射.

注 2 若 P 序退化至一般向量序关系并且 F 退化至向量值映射,那么集值映射 L_p 也就是向量意义下的水平集映射.

3 解映射的连续性

本节主要讨论参数集优化问题(P-SOP)解的上下半连续性. 首先介绍一个引理.

引理 3.1 设 $F:X\times\Lambda\to Y$,给定 $\lambda_0\in\Lambda$. 若下列条件均满足:

(i) M 在λ_0 处下半连续且 $M(\lambda_0)$是凸集;

(ii) F 在$M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$是下半连续的;

(iii) $F(\cdot,\lambda_0)$在 $M(\lambda_0)$上 P 严格 K 拟凸,

那么 L_p 在$M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$上是下半连续的.

证明 假设 L_p 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$处不是下半连续,那么存在 $x_0\in M(\lambda_0)$使得 L_p 在(x_0,λ_0)不是下半连续的. 因此不妨设 $x_1\in L_p(x_0,\lambda_0)$及 0_X 的邻域 W_0,存在$\{(x_n,\lambda_n)\}\subseteq\mathrm{Dom}L_p$ 满足$(x_n,\lambda_n)\to(x_0,\lambda_0)$使得

$$(x_1+W_0)\cap L_p(x_n,\lambda_n)=\varnothing \tag{1}$$

若 $L_p(x_0,\lambda_0)$是单点集,已知 $x_0\in L_p(x_0,\lambda_0)$,因此 $x_0=x_1$ 则显然$(x_1+W_0)\cap L_p(x_n,\lambda_n)\neq\varnothing$. 事实上,已知 $x_n\in L_p(x_n,\lambda_n)$且 $\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$ 有 $x_n\in x_1+W_0$. 因此与式(1)矛盾. 因此 L_p 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$上是下半连续的.

若 $L_p(x_0,\lambda_0)$不是单点集,不妨假设 $x_1,x_2\in$

$L_p(x_0,\lambda_0)$，即 $F(x_1,\lambda_0)\ll_p F(x_0,\lambda_0)$，$F(x_2,\lambda_0)\ll_p F(x_0,\lambda_0)$. 由 $F(\cdot,\lambda_0)$ 在 $M(\lambda_0)$ 上 P 严格 K 拟凸，因此 $\forall t\in(0,1)$，

$$F(tx_1+(1-t)x_2,\lambda_0)\ll_p F(x_0,\lambda_0) \tag{2}$$

令 $x_t=tx_1+(1-t)x_2$，则有 $x_t\in L_p(x_0,\lambda_0)$. 对于上述 W_0. 存在 0_X 的另一个邻域 W_1 使得 $W_1+W_1\subseteq W_0$，显然存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $x_{t_0}\in x_1+W_1$，即

$$x_{t_0}+W_1\subseteq x_1+W_1+W_1\subseteq x_1+W_0 \tag{3}$$

由 $M(\lambda_0)$ 是凸集，$x_{t_0}\in M(\lambda_0)$. M 在 λ_0 是下半连续的，因此存在 $y_n\in M(\lambda_n)$ 使得 $y_n\to x_{t_0}$. 则 $\exists N_1\in\mathbf{N}$，使得 $\forall n>N_1$ 有 $y_n\in x_{t_0}+W_1$.

下面我们证明 $y_n\in L_p(x_n,\lambda_n)$. 事实上，由式(2)知，$F(x_{t_0},\lambda_0)\cap[F(x_0,\lambda_0)-\mathrm{int}K]\neq\varnothing$，即存在 $\beta_0\in F(x_{t_0},\lambda_0)$ 和 $\gamma_0\in F(x_0,\lambda_0)$ 使得 $\beta_0\in\{\gamma_0\}-\mathrm{int}K$，由 F 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$ 下半连续，则存在 $\beta_n\in F(y_n,\lambda_n)$ 及 $\gamma_n\in F(x_n,\lambda_n)$ 使得 $\beta_n\to\beta_0$，$\gamma_n\to\gamma_0$. 由极限保号定理知，存在 $N_2\in\mathbf{N}$ 使得 $\forall n>N_2$ 有 $\beta_n\in\{\gamma_n\}-\mathrm{int}K$. 因此

$$F(y_n,\lambda_n)\ll_p F(x_n,\lambda_n)\Rightarrow$$
$$F(y_n,\lambda_n)\leqslant_p F(x_n,\lambda_n),$$

即 $y_n\in L_p(x_n,\lambda_n)$. 因此，$\forall n>\max\{N_1,N_2\}$，$y_n\in(x_1+W_0)\cap L_p(x_n,\lambda_n)$. 这与式(1)矛盾. 因此 L_p 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$ 是下半连续的. 证毕.

定理 3.2　设 $F:X\times\Lambda\to Y$. 给定 $\lambda_0\in\Lambda$. 若下列条件均成立：

(i) M 在 λ_0 处连续紧值且 $M(\lambda_0)$ 是凸集；

(ii) F 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$ 是下半连续的；

(iii) $F(\cdot,\lambda_0)$ 在 $M(\lambda_0)$ 上 P 严格 K 拟凸，

则 $S(\cdot)$ 在 λ_0 处是上半连续且闭的.

证明　假设 $S(\cdot)$ 在 λ_0 处不是上半连续的，那么根据上半连续的定义，存在一个 $S(\lambda_0)$ 的邻域 V 使得对于 λ_0 的任意邻域 $U(\lambda_0)$，存在 $\lambda'\in U(\lambda_0)$ 使得 $S(\lambda')\not\subseteq V$，即存在一个序列 $\{\lambda_n\}$ 满足 $\lambda_n\to\lambda_0$ 使得 $S(\lambda_n)\not\subseteq V$. 因此存在 $x_n\in S(\lambda_n)$ 使得

$$x_n\notin V,\ \forall n \tag{4}$$

由 $x_n\in S(\lambda_n)$ 知 $x_n\in M(\lambda_n)$. M 在 λ_0 处上半连续且为紧值，那么存在 $x_0\in M(\lambda_0)$ 和 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k}\to x_0$. 我们不妨假设 $x_n\to x_0$. 现在证明 $x_0\in S(\lambda_0)$. 反证法. 假设 $x_0\notin S(\lambda_0)$，则存在 $y_0\in M(\lambda_0)$ 使得

$$F(y_0,\lambda_0)\prec_p F(x_0,\lambda_0),$$
$$F(x_0,\lambda_0)\not\prec_p F(y_0,\lambda_0) \tag{5}$$

由式(5)，$y_0\in L_p(x_0,\lambda_0)$. 由引理 3.1 知，$L_p$ 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$ 上是下半连续的. 则存在 $y_n\in L_p(x_n,\lambda_n)$ 使得 $y_n\to y_0$，显然 $y_n\in M(\lambda_n)$ 并且 $F(y_n,\lambda_n)\ll_p F(x_n,\lambda_n)$. 又由 $x_n\in S(\lambda_n)$，则

$$F(x_n,\lambda_n)\leqslant_p F(y_n,\lambda_n) \tag{6}$$

另一方面，由式(5)中 $F(x_0,\lambda_0)\not\leqslant_p F(y_0,\lambda_0)$ 知对于任意的 $\gamma_0\in F(x_0,\lambda_0)$ 和 $\beta_0\in F(y_0,\lambda_0)$，都有 $\gamma_0\notin\{\beta_0\}-K$. 由于 F 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$ 下半连续，存在 $\beta_n\in F(y_n,\lambda_n)$，$\gamma_n\in F(x_n,\lambda_n)$ 使得 $\beta_n\to\beta_0$，$\gamma_n\to\gamma_0$. 由极限保号定理，对于任意的 $\beta_n\to\beta_0$，$\gamma_n\to\gamma_0$ 有 $\gamma_n\notin\{\beta_n\}-K$，即 $F(x_n,\lambda_n)\not\leqslant_p F(y_n,\lambda_n)$. 与式(6)矛盾. 故 $x_0\in S(\lambda_0)\subseteq V$. 从而当 n 充分大时 $x_n\in V$，与式(4)矛盾.

对于封闭性，取 $x_n\in S(\lambda_n)$ 满足 $x_n\to x_0$，同上可得 $x_0\in S(\lambda_0)$. 证毕.

注 3　与文献[6]的定理 3.6 相比，我们没有用 F 有逆 p-性质的假设条件.

下面我们举例说明定理 3.2 的适用性.

例 3.3　令 $X=Z=\mathbf{R}$，$Y=\mathbf{R}^2$，$\Lambda=[0,1]$，$M(\lambda)=[0,1]$，$K=\mathbf{R}^2_+$. 令 $\lambda_0=0$ 且

$$F(x,\lambda)=\begin{cases}[0,1]\times[1,2+x] & \text{if}\quad \lambda=0,x\in[0,\frac{1}{2}]\\[0,1]\times[\frac{5}{2},3+x] & \text{if}\quad \lambda=0,x\in[\frac{1}{2},1]\\[0,1-\lambda]\times[1,2+x] & \text{if}\quad \lambda\neq0,x\in[0,\frac{1}{2}]\\[\lambda,1]\times[\frac{5}{2},3+x] & \text{if}\quad \lambda\neq0,x\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

显然，$F(x,\lambda)$ 满足定理 3.2 中所有的假设条件. 计算得 $S(\lambda)=\{0,\frac{1}{2}\}$，$\lambda\in[0,1]$. 显然 S 在 λ_0 处上半连续. 然而 F 在 $(0,0)$ 处相对于 $y_0=1$ 不具有文献[6]中的逆 p-性质. 实际上，$F(0,0)\prec_p F(1,0)$，但对于任意的序列 $\{x_n\}\subseteq(0,\frac{1}{2}]$ 满足 $x_n\to x_0$，$\{y_n\}\subseteq[\frac{1}{2},1)$ 满足 $y_n\to y_0$，$\{\lambda_n\}\subseteq(0,1]$ 满足 $\lambda_n\to\lambda_0$. 当 $n\to\infty$ 时，有 $F(y_n,\lambda_n)\not\leqslant_p F(x_n,\lambda_n)$.

定理 3.4　设 $F:X\times\Lambda\to Y$ 和 $\lambda_0\in\Lambda$. 假设下列条件均满足：

(i) M 在 λ_0 处连续紧值且 $M(\lambda_0)$ 是凸集；

(ii) F 在 $M(\lambda_0)\times\{\lambda_0\}$ 是上半连续且紧值的；

(iii) 对于任意的 $x_0,y_0\in B$，$\{x_n\}\subseteq B$ 满足 $x_n\to x_0$，$\{y_n\}\subseteq B$ 满足 $y_n\to y_0$，$\lambda_n\to\lambda_0$，若 $F(x_0,\lambda_0)\leqslant_p F(y_0,\lambda_0)$ 都有 $F(x_n,\lambda_n)\leqslant_p F(y_n,\lambda_n)$，

则 $S(\cdot)$ 在 λ_0 处下半连续.

证明　假设 $S(\cdot)$ 在 λ_0 处不是下半连续，那么

存在 $x_0 \in S(\lambda_0)$ 及 x_0 的邻域 W_0，对于 λ_0 的任意邻域 U，存在 $\lambda \in U$ 使得 $W_0 \cap S(\lambda) = \varnothing$. 因此存在序列 $\{\lambda_n\}$ 满足 $\lambda_n \to \lambda_0$ 使得

$$W_0 \cap S(\lambda_n) = \varnothing \tag{7}$$

由于 $x_0 \in S(\lambda_0)$，则 $x_0 \in M(\lambda_0)$. M 在 λ_0 处下半连续，则存在 $x_n \in M(\lambda_n)$ 使得 $x_n \to x_0$，且存在 $N \in \mathbf{N}$, $\forall n > N$, $x_n \in W_0$.

下面证明 $x_n \in S(\lambda_n)$. 假设 $x_n \notin S(\lambda_n)$，则存在 $y_n \in M(\lambda_n)$，使得

$$F(y_n,\lambda_n) \prec_p F(x_n,\lambda_n),$$
$$F(x_n,\lambda_n) \not\prec_p F(y_n,\lambda_n) \tag{8}$$

显然 $x_n \neq y_n$. 由 M 在 λ_0 处上半连续且紧值，故存在 $y_0 \in M(\lambda_0)$ 及 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_k}\}$ 满足 $y_{n_k} \to y_0$. 不妨假设 $y_n \to y_0$. 因 F 在 $M(\lambda_0) \times \{\lambda_0\}$ 上半连续且紧值，由极限保号定理，同定理 3.2 可得 $F(y_0,\lambda_0) \preccurlyeq_p F(x_0,\lambda_0)$. 由 $x_0 \in S(\lambda_0)$, $F(x_0,\lambda_0) \preccurlyeq_p F(y_0,\lambda_0)$. 由(iii)知 $F(x_n,\lambda_n) \preccurlyeq_p F(y_n,\lambda_n)$ 这与式(8)矛盾. 因此 $x_n \in S(\lambda_n)$，即 $W_0 \cap S(\lambda_n) \neq \varnothing$. 这与式(7)矛盾. 证毕.

下面举例说明定理 3.4 中的条件(iii)是不可缺少的.

例 3.5 令 $X = Z = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$, $\Lambda = [0,1]$, $M(\lambda) = [0,1]$, $K = \mathbf{R}^2_+$. 令 $\lambda_0 = 0$ 且

$$F(x,\lambda) = \begin{cases} [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}] & \text{if} \quad \lambda = 0, x = 0,1 \\ [0,\frac{1}{2}] \times [1,1+x] & \text{if} \quad \lambda = 0, x \neq 0,1 \\ [0,\frac{1}{2}] \times \{0\} & \text{if} \quad \lambda \neq 0, x \in [0,\frac{1}{2}] \\ (\lambda[0,\frac{1}{2}]) \times [1,1+x] & \text{if} \quad \lambda \neq 0, x \in (\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

计算得 $S(\lambda) = \begin{cases} \{0,1\} & \text{if} \quad \lambda = 0 \\ [0,\frac{1}{2}] & \text{if} \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$. 显然 S 在 λ_0 处不是下半连续的.

下面说明其不满足定理 3.4 中条件(iii). 事实上，令 $y_0 = 0$, $x_0 = 1$，那么 $F(x_0,\lambda_0) \preccurlyeq_p F(y_0,\lambda_0)$. 但对于任意的序列 $\{x_n\} \subseteq (\frac{1}{2},1)$ 满足 $x_n \to x_0$, $\{y_n\} \subseteq (0,\frac{1}{2})$ 满足 $y_n \to y_0$, $\lambda_n \subseteq (0,1]$ 满足 $\lambda_n \to \lambda_0$，有 $F(x_n,\lambda_n) \not\preccurlyeq_p F(y_n,\lambda_n)$.

注 4 本文中定理 3.2 和定理 3.4 在与文献[6]定理 3.6 和定理 3.9 中完全不同的假设条件下证明了解映射的上半连续性和下半连续性，从而得出解映射的连续性的充分性条件. 特别地，文献[6]的证明主要基于 F 的(逆) p-性质，而本文主要基于 F 的 P 严格 K 拟凸性.

参考文献：

[1] Kuroiwa D, Tanaka T, Ha T X D. On cone convexity of set-valued maps [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1997, 30: 1487.

[2] Kuroiwa D. On set-valued optimization [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2001, 47: 1395.

[3] 王开荣，李健. 集值优化问题弱尖锐解的最优性条件[J]. 四川大学学报：自然科学版, 2015, 52: 223.

[4] Xu Y D, Li S J. On the solution continuity of parametric set optimization problems [J]. Math Meth Oper Res, 2016, 84: 223.

[5] Han Y, Huang N J. Well-posedness and stability of solution for set optimization problems [J]. Optimization, 2017, 66: 17.

[6] Xu Y D, Zhang P P. On the stability of the solution set mapping to parametric set optimization problems [J]. J Oper Res Soc China, 2016, 4: 255.

[7] 左欣，陈纯荣. 改进集下参数广义弱向量平衡问题解的半连续性 [J]. 四川大学学报：自然科学版, 2016, 53: 478.

[8] Khan A A, Tammer C, Zalinescu C. Set-valued optimization: an introduction with applications [M]. New York: Springer, 2015.

[9] Aubin J P, Ekeland I. Applied nonlinear analysis [M]. New York: Wiley, 1984.

[10] Köbis E. On robust optimization: a unified approach to robustness using a nonlinear scalarizing functional and relations to set optimization[D]. Halle Wittenberg: Martin Luther University, 2014.

[11] Jahn J, Ha T X D. New order relations in set optimization [J]. J Optimiz Theory App, 2011, 148: 209.