doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.03.006

非线性二阶周期边值问题正解的全局结构

叶芙梅
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文获得了二阶周期边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-k^2u+\lambda a(t)f(u)=0, t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi),\ u'(0)=u'(2\pi) \end{cases}$$

正解的全局结构，其中 $k>0$ 为常数，λ 是正参数，$a\in C([0,2\pi],[0,\infty))$ 且在 $[0,2\pi]$ 的任何子区间内 $a(t)\neq 0$，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. 主要结果的证明基于 Rabinowitz 全局分歧理论和逼近方法.

关键词：周期边值问题；正解全局结构；多解性；分歧理论
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)03-0452-05

Global structure of positive solutions for a nonlinear second-order periodic boundary value problem

YE Fu-Mei
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the global structure of positive solutions for second-order periodic boundary value problem

$$\begin{cases} u''(t)-k^2u+\lambda a(t)f(u)=0, t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi), \end{cases}$$

where $k>0$ is a constant, λ is positive parameter, $a\in C([0,2\pi],[0,\infty))$ and $a(t)\not\equiv 0$ on any subinterval of $[0,2\pi]$, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. The proof of the main results is based on Rabinowitz global bifurcation theorems and approximation approach.

Keywords: Periodic boundary value problem; Global structure of positive solution; Multiplicity; Bifurcation theory
(2010 MSC 35J20, 35B38, 35B33)

1　引　言

对于二阶常微分方程周期边值问题，已有许多学者运用上下解方法、锥不动点定理和临界点理论等工具进行过研究[1-10]. 特别地，2008 年 Greaf[8] 等运用了锥拉伸与压缩不动点定理在 $f_0=f_\infty=\infty$ 的情形下获得了周期边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-\rho^2u+\lambda g(t)f(u)=0, t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases}$$

在 λ 的某个区间上的正解和多正解的存在性结果，其中 $\rho>0$ 为常数，λ 是正参数，$g\in C([0,2\pi],[0,\infty))$ 且 $\int_0^{2\pi}g(t)\mathrm{d}t>0$，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 且 $f(s)>0, s>0$. 由于所用工具的局限，Greaf 等

收稿日期：2017-10-08
基金项目：国家自然科学基金(11671322)；国家自然科学基金天元基金(11626061)
作者简介：叶芙梅(1994－)，女，甘肃兰州人，硕士，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：18368916729@163.com

虽然获得了解的存在性结果，但却没有得到关于解集全局结构的任何信息.

2005 年，Ma 和 Thompson[9] 运用分歧理论，在 $f_0=\infty, f_\infty=0$ 的情形下，获得了非线性二阶微分方程

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u)=0, t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$$

正解解集的全局结构，其中 $a(t)>0$. 该文通过构造相应的辅助算子，使得辅助算子可以使用 Rabinowitz 分歧定理. 当 $f_0=\infty$，即 f 在原点处不满足渐进线性增长条件时，对这类问题正解的全局结构的研究是很少的. 此时，非线性问题不能直接转化为 Rabinowitz 全局分歧定理中所要求的算子形式，直接用 Rabinowitz 全局分歧定理来讨论非线性问题的全局结构已不可能. 基于此，本文允许在原点处非线性项 f 满足次线性增长条件，并通过连通分支取极限的思想结合分歧理论获得了二阶周期边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-k^2u+\lambda a(t)f(u)=0, \\ \quad t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

正解的全局结构. 因此本文改进和推广了文献[8, 9]中的结果.

本文总假定：

(H1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 且 $f(0)=0$, $f(s)>0, s>0$；

(H2) $a\in C([0,2\pi],[0,\infty))$ 是 2π 周期函数且存在 $t_0\in[0,2\pi]$ 使得 $a(t_0)>0$；

(H3) $f_0=\infty$，其中 $f_0=\lim\limits_{s\to 0^+}\dfrac{f(s)}{s}$.

本文主要结果如下：

定理 1.1　假设(H1)～(H3)成立并记 $f_\infty=\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(s)}{s}$.

(i) 如果 $f_\infty=0$，则存在问题(1)解的一条连通分支 C_+，使得 $(0,0)\in C_+$，且 $\mathrm{Proj}_{\mathbf{R}}C_+=(0,\infty)$.

(ii) 如果 $f_\infty=\infty$，则存在问题(1)解的一条连通分支 C_+，使得 $(0,0)\in C_+$，且 $\mathrm{Proj}_{\mathbf{R}}C_+$ 是一个有界闭集. 更进一步，当 $\|u\|\to\infty$ 时，C_+ 趋于 $(0,\infty)$.

定理 1.2　假设(H1)～(H3)成立并记 $f_\infty=\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{f(s)}{s}$.

(i) 如果 $f_\infty=0$，则当 $\lambda\in(0,\infty)$ 时，问题(1)至少有一个正解.

(ii) 如果 $f_\infty=\infty$，则存在 $\lambda_r>0$ 使得当 $\lambda\in(0,\lambda_r)$ 时，问题(1)至少有两个正解.

2　预备知识

我们知道，当(H2)成立时，线性特征值问题

$$\begin{cases} -u''(t)+k^2u=\lambda a(t)u, t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases}$$

有一个主特征值 λ_0. 记 φ_0 是相应于 λ_0 的正的特征函数.

定义 2.1[10]　设 X 为 Banach 空间，$\{C_n \mid n=1,2,3,\cdots\}$ 是 X 中的一族子集，则 C_n 的上限集 D 定义为

$D:=\limsup\limits_{n\to\infty}C_n=\{x\in X \mid \exists n_i\in\mathbf{N}$ 及 $x_{n_i}\in C_{n_i}$，使得 $x_{n_i}\to x\}$.

定义 2.2[10]　集合 M 中的连通分支是指 M 中的最大连通子集.

引理 2.3[12]　距离空间 X 中的每一个连通子集都包含在 X 的某个连通分支中，X 中每一个连通分支都是 X 中的闭集.

引理 2.4[11]　设 X 是一个紧的距离空间，A 和 B 是 X 的不相交的闭子集，并且不存在 X 的连通分支同时与 A 和 B 相交. 则必存在 X 的不相交的紧子集 X_A 和 X_B，使得 $X=X_A\cup X_B, A\subset X_A, B\subset X_B$.

引理 2.5[10]　设 X 为 Banach 空间，C_n 是 X 中的一族连通分支，设

(i) 存在 $z_n\in C_n (n=1,2,\cdots)$ 和 $z^*\in X$，使得 $z_n\to z^*$；

(ii) $r_n=\infty$，其中 $r_n=\sup\|x\|: x\in C_n$；

(iii) 对任意的 $R>0$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n\cap B_R$ 是 X 中的相对紧集，其中 $B_R=\{x\in X: \|x\|\leqslant R\}$，

则 $D:=\limsup\limits_{n\to\infty}C_n$ 中存在一条无界连通分支 C_+，使得 $z^*\in C_+$.

引理 2.6[8]　设 $k>0$，齐次边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)+k^2u=0, t\in[0,2\pi], \\ u(0)=u(2\pi), u'(0)=u'(2\pi) \end{cases}$$

的 Green 函数为

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{e^{k(t-s)}+e^{k(2\pi-t+s)}}{2k(e^{2k\pi}-1)}, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi, \\ \dfrac{e^{k(s-t)}+e^{k(2\pi-s+t)}}{2k(e^{2k\pi}-1)}, 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

$G(t,s)$ 满足以下性质：

(i) $G(t,s)>0,\forall(t,s)\in(0,2\pi)$;

(ii) $m\leqslant G(t,s)\leqslant M$,其中 $\forall t,s\in[0,2\pi]$, $m=\min G(t,s)=\dfrac{e^{k\pi}}{k(e^{2k\pi}-1)}$, $M=\max G(t,s)=\dfrac{e^{2k\pi}+1}{2k(e^{2k\pi}-1)}$.

设 $Y=C[0,2\pi]$, 其按范数 $\|u\|_0=\max\limits_{t\in[0,2\pi]}|u(t)|$ 构成 Banach 空间. 令 $H=\{u\in C^1[0,2\pi]:u(0)=u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\}$, $E=\{u\in C^2[0,2\pi]:u(0)=u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi)\}$, 其上范数分别为

$$\|u\|=\max_{t\in[0,2\pi]}\{\|u\|_0,\|u'\|_0\},$$

$$\|u\|_E=\max_{t\in[0,2\pi]}\{\|u\|_0,\|u'\|_0,\|u''\|_0\}.$$

定义线性算子 $L:E\to Y$ 为

$$Lu:=-u''+k^2u,u\in E.$$

则 $L^{-1}:Y\to H$ 紧.

记 K 是 Y 中的锥, $K=\{u\in Y|u(t)\geqslant 0,t\in[0,2\pi],\min\limits_{t\in[0,2\pi]}u(t)\geqslant\dfrac{m}{M}\|u\|_0\}$. 对 $r>0$, 设 $\Omega_r=\{u\in K\mid\|u\|_0<r\}$. 定义算子 $T_\lambda:K\to Y$,

$$T_\lambda u(t)=\lambda\int_0^{2\pi}G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s,t\in[0,2\pi].$$

引理 2.7 设(H1),(H2)成立,则 $T_\lambda(K)\subset K$ 且 $T_\lambda:K\to K$ 全连续.

证明 若 $u\in K$, 则

$$\min_{t\in[0,2\pi]}T_\lambda u(t)=\lambda\min_{t\in[0,2\pi]}\int_0^{2\pi}G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\frac{m}{M}\int_0^{2\pi}G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s=\frac{m}{M}\|T_\lambda u\|.$$

所以 $T_\lambda(K)\subset K$. 显然 $T_\lambda:K\to K$ 是全连续算子.

引理 2.8 设(H1),(H2)成立. 如果 $u\in\partial\Omega_r$, $r>0$,则

$$\|T_\lambda u\|_0\leqslant\lambda\hat{M}_rM\int_0^{2\pi}a(s)\mathrm{d}s,t\in[0,2\pi],$$

其中 $\hat{M}_r=1+\max\limits_{\frac{m}{M}r\leqslant t\leqslant r}\{f(t)\}$.

证明 因为对 $t\in[0,2\pi]$有 $f(u(t))\leqslant\hat{M}_r$,所以

$$\|T_\lambda u\|_0\leqslant\lambda M\int_0^{2\pi}a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\hat{M}_rM\int_0^{2\pi}a(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.9 设(H1),(H2)成立,$\{(\mu_l,y_l)\}\subset(0,\infty)\times K$ 是问题(1)的一列正解. 如果对于某个常数 $C_0>0$, $|\mu_l|\leqslant C_0$ 且 $\lim\limits_{l\to\infty}\|y_l\|=\infty$, 则 $\lim\limits_{l\to\infty}\|y_l\|_0=\infty$.

证明 由关系式

$$y_l(t)=\mu_l\int_0^{2\pi}G(t,s)a(s)f(y_l(s))\mathrm{d}s$$

和(1)式可知

$$y_l'(t)=\int_\eta^t y_l''(s)\mathrm{d}s=\int_\eta^t k^2y_l(s)\mathrm{d}s-\int_\eta^t\mu_la(s)f(y_l(s))\mathrm{d}s\leqslant k^2\|y\|(t-\eta)+C_0\int_\eta^t a(s)f(y_l(s))\mathrm{d}s,$$

其中 $\eta\in[0,2\pi]$且 $y_l'(\eta)=0$. 由范数的定义可知结论成立且若 $\|y_l\|_0$ 有界则 $\|y_l'\|_0$, $\|y_l''\|_0$ 有界.

3 主要结论的证明

我们将构造一列函数$\{f^{[n]}\}$,其在 $s=0$ 处渐进线性增长且满足

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[0,\infty)}|f^{[n]}(s)-f(s)|=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(f^{[n]})_0:=\lim_{n\to\infty}(\lim_{s\to0^+}\frac{f^{[n]}(s)}{s})=\infty,$$

并通过构造相应的辅助问题,运用 Rabinowitz 全局分歧定理获得一列正解无界连通分支$\{C_+^{[n]}\}$. 基于这个序列,我们可以找到一个无界连通分支 C_+ 满足

$$(0,0)\in C_+\subset\limsup_{n\to\infty}C_+^{[n]}.$$

$\forall n\in\mathbf{N}^*$, 定义函数列 $f^{[n]}(s):[0,\infty)\to[0,\infty)$,

$$f^{[n]}(s)=\begin{cases}f(s),s\in(\dfrac{1}{n},\infty),\\ nf(\dfrac{1}{n})s,s\in[0,\dfrac{1}{n}].\end{cases}$$

则 $f^{[n]}\in C([0,\infty)\to[0,\infty))$且

$$f^{[n]}(s)>0,\forall s\in(0,\infty),(f^{[n]})_0=nf(\frac{1}{n}).$$

由(H3)知$\lim\limits_{n\to\infty}(f^{[n]})_0=\infty$. 为运用 Rabinowitz 全局分歧定理,我们延拓 f 成为一个奇函数 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$g(s)=\begin{cases}f(s),s\geqslant 0,\\ -f(-s),s<0.\end{cases}$$

类似地,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,我们可延拓 $f^{[n]}$成为一个奇函数 $g^{[n]}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 下面考虑辅助问题族

$$\begin{cases}u''(t)-k^2u+\lambda a(t)g^{[n]}(u)=0,t\in[0,2\pi],\\ u(0)=u(2\pi),u'(0)=u'(2\pi).\end{cases}$$

设 $\xi \in C(\mathbf{R})$ 使得

$$g^{[n]}(u)=(g^{[n]})_0 u+\xi(u)=nf(\frac{1}{n})u+\xi(u).$$

则 $\lim\limits_{|u|\to 0}\dfrac{\xi(u)}{u}=0$. 考虑问题

$$Lu-\lambda a(t)(g^{[n]})_0 u=\lambda a(t)\xi(u) \tag{2}$$

从平凡解 $u\equiv 0$ 产生的分歧. 问题(2)等价于

$$\begin{aligned}u(t) &= \\ &\int_0^{2\pi} G(t,s)[\lambda a(s)(g^{[n]})_0 u(s)+ \\ &\lambda a(s)\xi(u(s))]\mathrm{d}s := \\ &(\lambda L^{-1}[a(\cdot)(g^{[n]})_0 u(\cdot)]+ \\ &\lambda L^{-1}[a(\cdot)\xi(u(\cdot))])(t).\end{aligned}$$

注意到 $\|L^{-1}[a(\cdot)\xi(u(\cdot))]\|=o(\|u\|), u\to 0$. 对应于式(2), Rabinowitz 全局分歧定理可以描述如下:对每一个整数 $n\geqslant 1$, 存在从 $(\frac{\lambda_0}{(g^{[n]})_0},0)$ 分歧出的问题(2)的正解的无界连通分支 $C_+^{[n]}$. 进一步, $C_+^{[n]}\backslash(\frac{\lambda_0}{(g^{[n]})_0},0)\subset(0,\infty)\times H$.

定理 1.1 的证明　我们将证明满足引理 2.5 的所有条件. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_0}{(g^{[n]})_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_0}{nf(\frac{1}{n})}=0,$$

所以引理 2.5 条件(i)被满足且 $z^*=(0,0)$. 显然 $r_n=\{|\lambda|+\|u\|_0:(\lambda,u)\in C_+^{[n]}\}=\infty$. 于是引理 2.5 条件(ii)也成立. 最后由 Arzela-Ascoli 定理和 $g^{[n]}$ 的定义易证引理 2.5 条件(iii)也成立. 因此 $D:=\limsup\limits_{n\to\infty} C_+^{[n]}$ 包含一个无界连通分支 C_+ 且 $(0,0)\in C_+$.

(i) $f_\infty=0$. 我们只需证明 $\mathrm{Proj}_{\mathbf{R}} C_+=[0,\infty)$. 反设 $\sup\{\eta|(\eta,y)\in C_+\}<\infty$. 则存在一列 $\{(\mu_l, y_l)\}\subset C_+$ 使得

$$\lim_{l\to\infty}\|y_l\|=\infty, |\mu_l|\leqslant C_0,$$

其中 C_0 是不依赖于 l 的正常数. 运用引理 2.9 有

$$\lim_{l\to\infty}\|y_l\|_0=\infty.$$

再结合 $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} y_l(t)\geqslant\frac{m}{M}\|y_l\|_0$ 有 $\lim\limits_{l\to\infty} y_l(t)=\infty$ 对 $t\in[0,2\pi]$ 一致成立. 因为 $\{(\mu_l,y_l)\}\subset C_+$, 所以

$$\begin{cases}-y_l''(t)+k^2 y_l(t)-\mu_l a(t)f(y_l(t))=0, \\ \quad t\in[0,2\pi], \\ y_l(0)=y_l(2\pi), y_l'(0)=y_l'(2\pi).\end{cases}$$

设 $v_l(t)=\dfrac{y_l(t)}{\|y_l\|_0}$, 则 $\|v_l\|_0=1$. 于是存在 $(\mu_*, v_*)\in[0,C_0]\times Y$ 且 $\|v_*\|_0=1$, 使得在 $\mathbf{R}\times Y$ 中存在 $\{(\mu_n,v_n)\}$ 的收敛子列(不妨仍记为 $\{(\mu_n, v_n)\}$)有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n,v_n)=(\mu_*,v_*)$. 结合 $f_\infty=0$ 有

$$\begin{cases}-v_*''(t)+k^2 v_*(t)-\mu_* a(t)\cdot 0=0, \\ \quad t\in[0,2\pi], \\ v_*(0)=v_*(2\pi), v_*'(0)=v_*'(2\pi).\end{cases}$$

于是 $\|v_*\|_0=0$. 这与 $\|v_*\|_0=1$ 矛盾. 因此 $\sup\{\eta|(\eta,y)\in C_+\}=\infty$. 注意到对 $\lambda=0$, 问题(1)仅有零解 $u\equiv 0$, 因此 $\mathrm{Proj}_{\mathbf{R}} C_+=[0,\infty)$.

(ii) $f_\infty=\infty$. 我们将证明 C_+ 连接 $(0,0)$ 和 $(0,\infty)$. 设 $\{(\mu_l,y_l)\}\subset C_+$, 使得

$$|\mu_l|+\|y_l\|\to\infty, l\to\infty.$$

则

$$\begin{cases}-y_l''(t)+k^2 y_l(t)-\mu_l a(t)f(y_l(t))=0, \\ \quad t\in[0,2\pi], \\ y_l(0)=y_l(2\pi), y_l'(0)=y_l'(2\pi).\end{cases}$$

如果 $\{\|y_l\|\}$ 是有界的, 即存在不依赖 l 的常数 M_1 使得 $\|y_l\|\leqslant M_1$, 我们可以假设 $\lim\limits_{l\to\infty}\mu_l=\infty$, 再结合

$$\frac{f(y_l(t))}{y_l(t)}\geqslant\inf\left\{\frac{f(s)}{s}\,|\,0\leqslant s\leqslant M_1\right\}>0$$

有 $\lim\limits_{l\to\infty}\mu_l\dfrac{f(y_l(t))}{y_l(t)}=\infty, \forall t\in[0,2\pi]$. 再由

$$-y_l''(t)+k^2 y_l(t)-\mu_l a(t)\frac{f(y_l(t))}{y_l(t)}y_l(t)=0, \quad t\in[0,2\pi] \tag{3}$$

对充分大的 l, y_l 在 $[0,2\pi]$ 上必定要改变符号. 这与 y_l 在 $[0,2\pi]$ 上是正的矛盾. 因此 $\{\|y_l\|\}$ 是无界的. 所以

$$\|y_l\|\to\infty, l\to\infty \tag{4}$$

以下证明 $\lim\limits_{l\to\infty}\mu_l=0$. 我们首先证明 μ_l 是有界的, 即存在常数 $M_2>0$, 使得 $\mu_l\leqslant M_2, \forall l\in\mathbf{N}^*$. 事实上, 由 $\{(\mu_l,y_l)\}\subset C_+$ 有 $Ly_l=\mu_l a(t)f(y_l)$. 上式乘以 φ_0 再从 0 到 2π 积分有

$$\lambda_0\int_0^{2\pi} y_l(t)a(t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t= \mu_l\int_0^{2\pi} a(t)f(y_l(t))\varphi_0(t)\mathrm{d}t.$$

由(H1), (H3)可知:存在常数 $M_3>0$, 使得 $f(y)\geqslant M_3 y$, $\forall y>0$. 于是

$$\lambda_0\int_0^{2\pi} y_l(t)a(t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t\geqslant \mu_l M_3\int_0^{2\pi} a(t)y_l(t)\varphi_0(t)\mathrm{d}t.$$

再由(H2)及 y_l,φ_0 的正性有

$$\mu_l \leqslant M_2 := \frac{\lambda_0}{M_3} \tag{5}$$

由式(4),(5)并应用引理2.9可知,$\| y_l \|_0 \to \infty$,$l \to \infty$. 现在反设存在μ_l一个子列(不妨仍记作μ_l),使得对某个常数$a_0 > 0$,有$\mu_l \geqslant a_0$. 由$f_\infty = \infty$可知

$$\lim_{l \to \infty} \mu_l \frac{f(y_l(t))}{y_l(t)} = \infty, \forall t \in [0, 2\pi].$$

因此由(3)可知:对充分大的l,y_l在$[0,2\pi]$上必定要改变符号. 这与y_l在$[0,2\pi]$上是正的矛盾. 于是$\lim_{l \to \infty} \mu_l = 0$,即$C_+$连接$(0,0)$和$(0,\infty)$.

定理1.2的证明 (i). 由定理1.1的(i)直接推得.

(ii). 重写问题(1)为

$$u = \lambda \int_0^{2\pi} G(t,s) a(s) f(u(s)) \mathrm{d}s =: T_\lambda u(t).$$

由引理2.8,对$r > 0$和$u \in \partial \Omega_r$,我们有

$$\| T_\lambda u \|_0 \leqslant \lambda \hat{M}_r M \int_0^{2\pi} a(s) \mathrm{d}s.$$

设$\lambda_r > 0$,使得

$$\lambda_r \hat{M}_r M \int_0^{2\pi} a(s) \mathrm{d}s = r.$$

则对$\lambda \in (0, \lambda_r)$和$u \in \partial \Omega_r$,$\| T_\lambda u \|_0 < \| u \|_0$. 上式表明

$$\Sigma \cap \{ (\lambda, u) \in (0,\infty) \times K \mid 0 < \lambda < \lambda_r, \\ u \in K : \| u \|_0 = r \} = \varnothing \tag{6}$$

由引理2.9和定理1.1的(ii)可知C_+是$[0,\infty) \times H$中的连接$(0,0)$和$(0,\infty)$的无界连通分支. 进一步,(6)式表明对$\lambda \in (0, \lambda_r)$,问题(1)至少有两个正解. 证毕.

参考文献:

[1] Jiang D Q, Wei J J. Monotone method for first and second-order periodic boundary value problems and periodic solutions of functional differential equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2002, 50: 885.

[2] 闫东亮, 马如云. 带导数项Neumann问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 1136.

[3] Ma R Y. Bifurcation from infinity and multiple solutions for periodic boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2000, 42: 27.

[4] Liu X L, Li W T. Existence and uniqueness of positive periodic solutions of functional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2004, 293: 28.

[5] 龙严. 非线性二阶Robin问题多正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 249.

[6] Ding W, Han M. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary value problem [J]. Appl Math Comput, 2004, 155:709.

[7] 叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程Dirichlet问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 463.

[8] Greaf J R, Kong L J, Wang H Y. Existence, multiplicity and dependence on a parameterfor a periodic boundary value problem [J]. J Differ Equations, 2008, 245: 1185.

[9] Ma R Y, Thompson B. Multiplicity results for second-order two-point boundary value problems with superlinear or sublinear nonlinearities [J]. J Math Anal Appl, 2005, 303: 726.

[10] Ma R Y, An Y L. Global structure of positive solutions for nonlocal boundary value problems involving integral conditions [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 4364.

[11] Whyburn G T. Topological analysis [M]. Princeton: Princeton University Press, 1958.

[12] 张恭庆. 拓扑学引论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1978.