doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2018.03.007

全空间上具有临界指数的 Kirchhoff 类方程两个正解的存在性

丁　凌，汪继秀，张丹丹
(湖北文理学院数学与计算机科学学院，襄阳 441053)

摘　要：本文在参数的不同范围及给定假设下利用 Ekeland 变分原理、山路引理、集中紧性原理和一些分析技巧得到了全空间上具有临界指数的非线性项和非齐次扰动项的 Kirchhoff 类方程两个正解的存在性.

关键词：Kirchhoff 类方程；临界指数；Ekeland 变分原理；山路引理；集中紧性原理.
中图分类号：O176.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)03-0457-05

Existence of two positive solutions for Kirchhoff-type equations with critical exponents in whole space

DING Ling, *WANG Ji-Xiu*, *ZHANG Dan-Dan*
(School of Mathematics and Computer Science, Hubei University of Arts and Science, Xiangyang 441053, China)

Abstract: Under the suitable ranges of parameters and given assumptions and by using Ekeland variations principle, Mountain Pass Lemma, concentration compactness lemma and some analysis techniques, Kirchhoff-type equations with critical exponents and nonhomogeneous perturbation nonlinearities in $\mathbf{R}^3$ are studied. Existence results of two positive solutions are obtained.

Keywords: Kirchhoff-type equations; Critical exponents; Ekeland variations principle; Mountain Pass Lemma; Concentration compactness lemma
(2010 MSC 35J20, 35B38, 35B33)

本文考虑 R^3 上临界的 Kirchhoff 类方程

$$-\left(a+b\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2\right)\Delta u = |u|^4 u+\mu h(x), x\in\mathbf{R}^3, u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3) \tag{1}$$

其中 $a\geqslant 0, b>0, \mu\geqslant 0, h$ 满足如下条件：

(H) $h\in L^{6/5}(\mathbf{R}^3)\backslash\{0\}$是非负的.

在关于临界指数的方程的研究中，最早的是关于临界指数的椭圆方程

$$-\Delta u=|u|^{2^*-2}u,\ x\in\mathbf{R}^N, u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^N) \tag{2}$$

的研究，其中 $N\geqslant 3, 2^*=\dfrac{2N}{N-2}$. 由文献[1,2]知，对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $y\in\mathbf{R}^N$，

$$u_{\varepsilon,y}:=\frac{[N(N-2)]^{\frac{N-2}{4}}\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2+|x-y|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \tag{3}$$

是方程式(2)所有正解. 用 S 表示最优常数，即 $S=\inf\limits_{u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^N)\backslash\{0\}}\dfrac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}$，并令 $u_{\varepsilon,y}$满足

$$\|u_{\varepsilon,y}\|^2=|u_{\varepsilon,y}|_{2^*}^{2^*}=S^{\frac{N}{2}} \tag{4}$$

在本文中，受文献[3,4]的启发，我们研究具有临界指数的 Kirchhoff 方程. 不同于文献[4]中的次临界及有界情形，本文所研究的方程是无界临界的，缺乏紧性. 另外，不同于文献[5]用不动点得

收稿日期：2017-10-09
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11501186)
作者简介：丁凌(1975－)，女，湖北襄阳人，教授，主要从事非线性泛函分析的研究. E-mail: 591517149@qq.com

到正解的存在性,本文用 Ekeland 变分原理和山路引理得到方程两个正解的存在性. 值得指出的是,如果 $a=1, b=0, \mu=0$, 方程式(1) 就是方程式(2) 在 $\mathbf{R}^3$ 上的特例.

为寻求方程式(1) 的正解,我们在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 上定义对应的能量泛函

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{6}\|u\|^6-\frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^3}(u^+)^6\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x,$$

其中 $u^+=\max\{0,u\}$. 显然, I 是 C^1 的,且对任意的 $u,v\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 有

$$\langle I'(u),v\rangle=(a+b\|u\|^4)\int_{\mathbf{R}^3}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}^3}(u^+)^5v\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)v\mathrm{d}x+o(1).$$

方程(1)的非负解与泛函的临界点一一对应. 本文用 $C_i(i=1,2,\ldots)$表示不同正常数.

引理 1 假定 $\mu>0, a\geqslant 0, 0<b<S^{-3}$ 和假设(H)成立,则存在 $\rho>0$ 和 $\mu_*>0$, 使得当 $\mu\in(0,\mu_*)$ 时,对某个 $\alpha>0$ 有 $I|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$.

证明 对 $u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$, 根据 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入不等式和假设(H),当 $a\geqslant 0, 0<b<S^{-3}$ 时有

$$I(u)\geqslant\left(\frac{a}{2}\|u\|-\frac{S^{-3}-b}{6}\|u\|^5-\frac{\mu}{\sqrt{S}}|h|_{\frac{6}{5}}\right)\|u\|.$$

现考察函数 $f(t)=\frac{a}{2}t-\frac{S^{-3}-b}{6}t^5(t\geqslant 0)$. 显然,存在 $\rho,\mu_*>0$, 对任意的 $\mu\in(0,\mu_*)$, 当 $u\in\partial B_\rho$ 时有 $I(u)\geqslant\left(f(\rho)-\frac{\mu}{\sqrt{S}}|h|_{\frac{6}{5}}\right)\rho:=\alpha$. 证毕.

引理 2 假定 $\mu>0, a\geqslant 0, 0<b<S^{-3}$ 和假设(H)成立, 则对任意 $\mu\in(0,\mu_*)$ 有 $c:=\inf\limits_{u\in\overline{B_\rho}}I(u)\in(-\infty,0)$.

证明 选取 $u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$, 使得 $\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x>0$. 固定 $\mu\in(0,\mu_*)$. 对任意的 $t>0$, 可得 $I(tu)\to 0^-, t\to 0^+$. 这样,选取 $t>0$ 足够小,使得 $\|tu\|\leqslant\rho$ 且 $I(tu)<0$. 显然,当 $\|tu\|\leqslant\rho$ 时, $I(tu)>-\infty$, 引理成立.

定理 3 假定 $\mu>0, a\geqslant 0, 0<b<S^{-3}$ 和假设(H)成立,则存在 $\mu_*>0$, 使得当 $\mu\in(0,\mu_*)$ 时方程式(1)有一个负能量的正解.

证明 由引理 1,引理 2 及 Ekeland 变分原理知,存在 $u_n\in B_\rho$,使得当 $n\to\infty$ 时有 $I(u_n)\to c<0$ 且 $I'(u_n)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立. 因为 $u_n\in B_\rho$, 所以存在 $u_0\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 使得在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中不 $u_n\xrightarrow{w}u_0$, 在 $L^p_{loc}(\mathbf{R}^3)(1\leqslant p<6)$中 $u_n\to u_0$, 且对 $x\in\mathbf{R}^3$ 有 $u_n(x)\to u_0(x)$几乎处处成立. 从而$\overline{B_\rho}$是一个闭凸集. 因此 $u_0\in\overline{B_\rho}$ 且 $I(u_0)\geqslant c$. 令 $d=\|u_n\|+o(1)$. 由 $I'(u_n)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立可得

$$0=\langle I'(u_n),u_0\rangle+o(1)=(a+bd^4)\|u_0\|^2-\int_{\mathbf{R}^3}(u_n^+)^5u_0\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_0\mathrm{d}x \tag{5}$$

由范数的弱下半连续性,

$$\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_0\mathrm{d}x+o(1)$$

及(5)式可得

$$c\leqslant I(u_0)\leqslant\frac{a}{3}\|u_n\|^2-\frac{5\mu}{6}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\mathrm{d}x+o(1)=I(u_n)-\frac{1}{6}\langle I'(u_n),u_n\rangle+o(1)=c.$$

从而 $I(u_0)=c$. 再由(5)式可得

$$c=I(u_0)-\frac{1}{6}\left[(a+bd^4)\|u_0\|^2-\int_{\mathbf{R}^3}(u_0^+)^6\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_0\mathrm{d}x\right]=\frac{a}{3}\|u_0\|^2-\frac{5\mu}{6}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_0\mathrm{d}x \tag{6}$$

$$c=I(u_n)-\frac{1}{6}\langle I'(u_n),u_n\rangle+o(1)=\frac{a}{3}d^2-\frac{5\mu}{6}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_0\mathrm{d}x \tag{7}$$

由(6)和(7)式得 $\|u_0\|=d$, 即在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中 $u_n\to u_0$. 故 u_0 是方程的解. 定义 $u^-=\max\{0,-u\}$. 由$\langle I'(u_0),u_0^-\rangle=0$ 可得 $u_0^-=0$. 故 $u_0=u_0^+\geqslant 0$. 再根据强最大值原理可得 $u_0>0$. 故 u_0 是方程的正解且 $I(u_0)<0$. 证毕.

引理 4 假定 $\mu>0, a\geqslant 0, 0<b<S^{-3}$ 和假设(H)成立,则存在 $e\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 使得当 $\|e\|>\rho$ 时有 $I(e)<0$.

证明 由(4)式,取 $N=3$. 因为 $\mu>0, a\geqslant 0, 0<b<S^{-3}$, 则对任意 $t>0$ 有

$$I(tu_{\varepsilon,0})\leqslant\frac{at^2}{2}\|u_{\varepsilon,0}\|^2+\frac{bt^6}{6}\|u_{\varepsilon,0}\|^6=\frac{at^2}{2}S^{\frac{3}{2}}-\frac{t^6(S^{-3}-b)}{6}S^{\frac{9}{2}}.$$

于是，选择 $t_0>0$ 充分大，使得 $\|t_0u_{\varepsilon,0}\|>\rho$ 且 $I(t_0u_{\varepsilon,0})<0$. 取 $e=t_0u_{\varepsilon,0}$. 由引理 1，引理 4，$I(0)=0$ 及山路引理知，对任意的 $\mu\in(0,\mu_*)$，存在 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得当 $n\to\infty$ 时有 $I(u_n)\to m>0$ 成立且 $I'(u_n)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立. 由 Hölder 不等式及 Sobolev 嵌入不等式得

$$m+1\geqslant I(u_n)-\frac{1}{6}\langle I'(u_n),u_n\rangle\geqslant \frac{a}{3}\|u_n\|^2-\frac{5\mu}{6\sqrt{S}}|h|_{\frac{6}{5}}\|u_n\|.$$

从而 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中有界. 另一方面，易证 $\|u_n^-\|=0$. 因此 $I(u_n^+)\to m>0$ 成立且 $I'(u_n^+)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立. 证毕.

引理 5　假定 $\mu>0$，$a\geqslant 0$，$0<b<S^{-3}$ 和假设(H)成立，则存在非负有界的 PS 序列 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得当 $n\to\infty$ 时有 $I(u_n)\to m<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}$ 且 $I'(u_n)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立. 进而存在 $\mu_{**}>0$，$\forall\ \mu\in(0,\mu_{**})$ 且存在 Λ 使得 $m\leqslant\sup\limits_{t>0}I(tu_{1,0})<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}$，这里的 I 满足局部的 PS 条件.

证明　由引理 1，引理 4，$I(0)=0$ 及山路引理知，对任意的 $\mu\in(0,\mu_*)$，存在 PS 序列 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得当 $n\to\infty$ 时有 $I(u_n)\to m>0$ 成立且 $I'(u_n)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立. 易证 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中有界且 $\|u_n^-\|=0$. 于是 PS 序列 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中是有界非负的.

由(3)和(4)式，我们考查函数

$$f(t)=I(tu_{1,0}).$$

令

$$\tilde{f}(t)=\frac{at^2}{2}S^{\frac{3}{2}}-\frac{t^6(S^{-3}-b)}{6}S^{\frac{9}{2}}.$$

经计算可知，存在 $t_1=\left(\frac{a}{S^3(S^{-3}-b)}\right)^{\frac{1}{4}}$，使得 $\tilde{f}'(t_1)=0$ 且

$$\max_{t\geqslant 0}\tilde{f}(t)=\tilde{f}(t_1)=\frac{a^{\frac{3}{2}}S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{1-bS^3}}:=\Lambda.$$

选取适当的 $\mu_1\in(0,\mu_*)$，使得对任意的 $\mu\in(0,\mu_1)$，存在 $t_2\in(0,t_1)$ 使得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_2}f(t)\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant t_2}\tilde{f}(t)\leqslant \Lambda-\frac{25\mu_1^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}.$$

选取 $\mu_{**}\in(0,\mu_1]$，使得对任意 $\mu\in(0,\mu_{**})$ 有 $\mu t_2\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_{1,0}\mathrm{d}x>\frac{25\mu^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}$. 则对任意 $\mu\in(0,\mu_{**})$ 有

$$\sup_{t\geqslant t_2}f(t)\leqslant\sup_{t\geqslant t_2}\tilde{f}(t)-\mu t_2\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_{1,0}\mathrm{d}x< \Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}.$$

从而对任意的 $\mu\in(0,\mu_{**})$ 可得

$$m\leqslant\sup_{t>0}I(tu_{1,0})=\sup_{t>0}f(t)<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|^2_{\frac{6}{5}}.$$

因为 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 是非负有界的，所以存在非负函数 $u\in D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$，使得在 $D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 中有 $u_n\xrightarrow{w}u$，在 $L^p_{loc}(\mathbf{R}^3)(1\leqslant p<6)$ 中有 $u_n\to u$，且对于 $x\in\mathbf{R}^3$ 有 $u_n(x)\to u(x)$ 几乎处处成立. 根据文献[6,7]的集中紧性原理，存在一个子列(仍然记为 $\{u_n\}$)最大可数集 Γ，点集 $\{a_k\}_{k\in\Gamma}\subset\mathbf{R}^3$ 及数集 $\{\eta_k\}_{k\in\Gamma}$，$\{\nu_k\}_{k\in\Gamma}\subset\mathbf{R}^+$，使得依测度收敛有

$$|\nabla u_n|^2\xrightarrow{w}\mathrm{d}\eta\geqslant|\nabla u|^2+\sum_{k\in\Gamma}\eta_k\delta_{a_k}\tag{8}$$

成立，其中 δ_{a_k} 是集中在 a_k 的 Dirac 测度，满足

$$S\nu_k^{1/3}\leqslant\eta_k\tag{9}$$

我们断言 $\Gamma=\varnothing$. 否则，反设 $\Gamma\neq\varnothing$. 固定 $k\in\Gamma$. 对任意的 $\varepsilon>0$，假定 $\varphi_\varepsilon^k\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ 满足 $\varphi_\varepsilon^k\in[0,1]$. 当 $|x-a_k|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 时 $\varphi_\varepsilon^k(x)=1$. 当 $|x-a_k|\geqslant\varepsilon$ 时 $\varphi_\varepsilon^k(x)=0$ 且 $|\nabla\varphi_\varepsilon^k|\leqslant\frac{3}{\varepsilon}$. 由 $\langle I'(u_n),\varphi_\varepsilon^ku_n\rangle\to 0$ 得

$$(a+b\|u_n\|^4)\left(\int_{\mathbf{R}^3}u_n\nabla u_n\cdot\nabla\varphi_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_\varepsilon^k|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)=\int_{\mathbf{R}^3}u_n^6\tilde{\omega}_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\tilde{\omega}_\varepsilon^k\mathrm{d}x+o(1)\tag{10}$$

根据 Hölder 不等式和 φ_ε^k 的选取，并记

$$B_\varepsilon(a_k):=\{x\in\mathbf{R}^3:|x-a_k|<\varepsilon\}$$

有

$$\begin{aligned}A:&=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\left\{(a+b\|u_n\|^4)\left|\int_{\mathbf{R}^3}u_n\nabla u_n\cdot\nabla\varphi_\varepsilon^k\mathrm{d}x\right|\right\}\leqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}C_1\left(\int_{B_\varepsilon(a_k)}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{B_\varepsilon(a_k)}|u_n|^2|\nabla\varphi_\varepsilon^k|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\\&\lim_{\varepsilon\to0}C_2\left(\int_{B_\varepsilon(a_k)}|u|^6\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{6}}=0\end{aligned}\tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}(a+b\|u_n\|^4)\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_\varepsilon^k|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\Big[a\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_\varepsilon^k\,|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x+ b\Big(\int_{\mathbf{R}^3}\varphi_\varepsilon^k\,|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\Big)^3\Big]\geqslant a\eta_k+b\eta_k^3 \quad (12)$$

以及

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}u_n^6\tilde{\omega}_\varepsilon^k\mathrm{d}x= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^3}u^6\tilde{\omega}_\varepsilon^k\mathrm{d}x+\nu_k=\nu_k \quad (13)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\varphi_\varepsilon^k\mathrm{d}x= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\varphi_\varepsilon^k\mathrm{d}x=0 \quad (14)$$

由(10)～(14) 式得 $\nu_k\geqslant a\eta_k+b\eta_k^3$. 又由(10)式得

$$\nu_k\geqslant\Big(\frac{aS}{1-bS^3}\Big)^{\frac{3}{2}} \quad (15)$$

对 $R>0$, 假定 $\psi_R\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$满足 $\psi_R\in[0,1]$. 当 $|x|<R$ 时 $\psi_R(x)=1$, 当$|x|>2R$ 时 $\psi_R(x)=0$ 且$|\nabla\psi_R|<\frac{2}{R}$. 根据(8)式、Hölder 不等式及 Young 不等式及(9)和(15)式,我们有

$$m=\lim_{n\to\infty}\Big(I(u_n)-\frac{1}{6}\langle I'(u_n),u_n\rangle\Big)\geqslant \frac{aS}{3}|u|_6^2+\frac{a}{3}\eta_k-\frac{aS}{3}|u|_6^2-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2\geqslant \Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2.$$

这与条件 $m<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2$ 矛盾,故 $\Gamma=\varnothing$.

对于 $R>0$, 定义

$$\eta_\infty=\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x,\quad \nu_\infty=\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|>R}|u_n|^6\mathrm{d}x \quad (16)$$

则有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x= \int_{\mathbf{R}^3}\mathrm{d}\eta+\eta_\infty,\ \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x= \int_{\mathbf{R}^3}\mathrm{d}\nu+\nu_\infty,\ S\nu_\infty^{\frac{1}{3}}\leqslant\eta_\infty \quad (17)$$

假定 $\chi_R\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$满足 $\chi_R\in[0,1]$, 当 $|x|<\frac{R}{2}$ 时;$\chi_R(x)=0$ 当 $|x|>R$ 时, $\chi_R(x)=1$ 且$|\nabla\chi_R|<\frac{3}{R}$. 由$\langle I'(u_n),\chi_R u_n\rangle\to 0$ 得

$$(a+b\|u_n\|^4)\Big(\int_{\mathbf{R}^3}u_n\nabla u_n\cdot\nabla\chi_R\mathrm{d}x+ \int_{\mathbf{R}^3}\chi_R|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\Big)= \int_{\mathbf{R}^3}u_n^6\chi_R\mathrm{d}x+\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\chi_R\mathrm{d}x+o(1) \quad (18)$$

根据 Hölder 不等式和$\nabla\chi_R$ 的选取得

$$B:=\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}(a+ b\|u_n\|^4)\Big|\int_{\mathbf{R}^3}u_n\nabla u_n\cdot\nabla\chi_R\mathrm{d}x\Big|\leqslant \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}C_1\Big(\int_{\frac{R}{2}\leqslant|x|\leqslant R}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot \Big(\int_{\frac{R}{2}\leqslant|x|\leqslant R}|u_n|^2|\nabla\chi_R|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant \lim_{R\to\infty}C_3\Big(\int_{\frac{R}{2}\leqslant|x|\leqslant R}|u|^6\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{6}}=0 \quad (19)$$

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}(a+ b\|u_n\|^4)\int_{\mathbf{R}^3}\chi_R|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant a\eta_\infty+b\eta_\infty^3 \quad (20)$$

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}u_n^6\chi_R\mathrm{d}x\leqslant \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{|x|\geqslant\frac{R}{2}}u_n^6\mathrm{d}x=\nu_\infty \quad (21)$$

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u_n\chi_R\mathrm{d}x= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\chi_R\mathrm{d}x=0 \quad (22)$$

于是由(18)～(22) 式得到 $\nu_\infty\geqslant a\eta_\infty+b\eta_\infty^3$. 又根据(16),(17)式得 $\nu_\infty=0$ 或者 $\nu_\infty\geqslant\Big(\frac{aS}{1-bS^3}\Big)^{\frac{3}{2}}$.

假定 $\nu_\infty\geqslant\Big(\frac{aS}{1-bS^3}\Big)^{\frac{3}{2}}$ 成立. 则

$$m=\lim_{n\to\infty}\Big(I(u_n)-\frac{1}{6}\langle I'(u_n),u_n\rangle\Big)\geqslant \frac{a}{3}\int_{\mathbf{R}^3}\mathrm{d}\eta+\frac{a}{3}\eta_\infty-\frac{5\mu}{6}\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x\geqslant \frac{a}{3}S\nu_\infty^{\frac{1}{3}}-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2\geqslant\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2.$$

这与条件 $m<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2$ 矛盾. 故 $\nu_\infty=0$. 再根据(9)、(18) 式和 $\Gamma=\varnothing$得

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^3}\mathrm{d}\nu+\nu_\infty= \int_{\mathbf{R}^3}\mathrm{d}\nu=\int_{\mathbf{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x.$$

由 Fatou 引理得

$$\int_{\mathbf{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}^3}|u_n|^6\mathrm{d}x\leqslant \int_{\mathbf{R}^3}|u|^6\mathrm{d}x.$$

当 $n\to\infty$ 时,有 $\|u_n\|\to d$. 则

$$0=\langle I'(u_n),u_n\rangle+o(1)=$$
$$(a+bd^4)d^2-\int_{\mathbf{R}^3}u^6\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x,$$
$$0=\langle I'(u_n),u\rangle+o(1)=$$
$$(a+bd^4)\|u\|^2-\int_{\mathbf{R}^3}u^6\mathrm{d}x-$$
$$\mu\int_{\mathbf{R}^3}h(x)u\mathrm{d}x.$$

从而有 $d=\|u\|$，即 $\|u_n\|\to\|u\|$. 从而 $n\to\infty$ 时有 $I(u_n)\to m<\Lambda-\frac{25\mu^2}{48aS}|h|_{\frac{6}{5}}^2$ 成立且 $I'(u_n)\to 0$ 在 $(D^{1,2}(\mathbf{R}^3))^*$ 成立的 PS 序列 $\{u_n\}\subset D^{1,2}(\mathbf{R}^3)$ 有收敛子列，这里的 I 满足局部 PS 条件.

定理 6　假定 $\mu>0$，$a\geqslant 0$，$0<b<S^{-3}$ 和假设(H)成立，则存在 $\mu_*>0$，使得当 $\mu\in(0,\mu_*)$ 时方程(1)有一个正解. 特别地，存在一个 $\mu_{**}\in(0,\mu_*]$，使得当 $\mu\in(0,\mu_{**})$ 时方程(1)存在另一个正解，即方程(1)至少有两个不同的正解.

证明　由定理 3、引理 5 及最大值原理知方程有两个正解 u 和 u_0. 因为 $I(u_0)<0$，$I(u)>0$，则方程式(1)至少有两个不同的正解.

注　文献[3]只对具有非局部项 $b\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u$ 的方程进行了研究，本文则把文献[3]中的定理 1.3 的部分结果推广到了具有非局部项 $b\left(\int_{\mathbf{R}^3}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^2\Delta u$ 的方程的情形.

参考文献：

[1]　Benci V, Cerami G. Existence of positive solutions of equation $-\Delta u+a(x)u=|u|^{2^*-2}u$ in $\mathbf{R}^N$[J]. J Funct Anal, 1990, 88: 90.

[2]　Willem M. Minimax theorems [M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

[3]　Liu J, Liao J F, Tang C L. Positive solutions of Kirchhoff-type equations with critical exponent in $\mathbf{R}^N$[J]. J Math Anal Appl, 2015, 429: 1153.

[4]　蓝永艺. 一类 Kirchhoff 型方程正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版, 2015, 52: 1208.

[5]　叶芙梅. 一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版, 2017, 54: 463.

[6]　Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limit case, Part Ⅰ[J]. Ann Inst H poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 109.

[7]　Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limit case, Part Ⅱ[J]. Ann Inst H poincaré Anal Non Linéaire, 1984, 1: 223.