doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.03.004

一类非线性二阶三点边值问题正解的全局结构

魏丽萍
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文考虑二阶常微分方程三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+h(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0,\ u(1)=\lambda u(\eta), \end{cases}$$

其中 $\eta\in[0,1)$，参数 $\lambda\in[0,1)$，函数 $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ 满足 $f(s)>0, s>0, h\in C([0,1],[0,\infty))$ 在 $[0,1]$ 的任意子区间内不恒为零. 在满足条件 $f_0=0, f_\infty=\infty$ 时，本文讨论了该边值问题解所构成的连通分支随着参数 λ 在 $[0,1]$ 内的变化而变化的情形，建立了正解的全局结构. 主要结果的证明基于锥上的不动点指数定理以及解集连通性质.

关键词：多点边值问题；连通分支；正解；锥
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)03-0440-05

Global structure of positive solutions for a class of nonlinear second-order three-point boundary value problems

WEI Li-Ping
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the second-order three-point boundary value problem

$$\begin{cases} u''(t)+h(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u'(0)=0, u(1)=\lambda u(\eta), \end{cases}$$

where $\eta\in[0,1), \lambda\in[0,1)$ is a parameter, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$ satisfies $f(s)>0$ for $s>0$, and $h\in C([0,1],[0,\infty))$ is not identically zero on any subinterval of $[0,1]$. We give information on the problem as to what happens to the norms of positive solutions as λ varies in $[0,1]$ under the conditions of $f_0=0$, $f_\infty=\infty$. The proof of the main results is based upon the fixed point index theory on cone and connectivity properties of the solution set.

Keywords: Multi-point boundary value problems; Continuum; Positive solutions; Cone
(2010 MSC 34B18)

1　引　言

近年来，关于常微分方程二阶两点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+\mu g(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u(0)=0,\ u(1)=0 \end{cases}$$

(μ 是一个参数)解集的全局结构已被许多学者研究过[1-3]. 而三点边值问题自 1999 年 Ma[4] 率先研究

$$\begin{cases} u''(t)+\mu g(t)f(u)=0, t\in(0,1), \\ u(0)=0, u(1)=\alpha u(\eta) \end{cases}$$

收稿日期：2017-10-10
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：魏丽萍(1995－)，女，甘肃兰州人，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：18693273767@163.com

并给出研究这类问题的关键条件 $0 < \alpha\eta < 1$，进而得到了正解的存在性结果之后，才引起了众多学者的关注[5-14].

微分方程三点边值问题是指常微分方程的定解条件不仅依赖于解在区间端点的取值，而且依赖于解在区间内部一点的取值. 它起源于各种不同的应用数学和物理领域，这方面的实例包括横截面相同而密度分段不同的支索的振动及弹性稳定性理论中的许多问题.

Webb 在文献[5]中考虑了三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + g(t)f(u) = 0, t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\eta \in (0,1)$，$\alpha \in [0,1)$. 作者首先将问题(1)转化为等价的 Hammerstein 积分方程

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)g(s)f(u(s))\mathrm{d}s := Tu(t), u \in [0,1],$$

然后运用不动点指数理论，在假设条件

(A1) $g \in L^1(0,1)$ 满足 $g \geqslant 0$ a. e. 于 $[0,1]$；

(A2) $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$；

(A3) $\alpha > 0, \eta \in [0,1)$，满足 $0 < \alpha < 1$

成立时，通过寻找 T 的不动点得到了如下定理：

定理 A　设 $\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s > 0$. 当 $0 < \alpha < 1$ 时，如果

(h1) $0 \leqslant f_0 < \infty$ 且 $M < f_\infty \leqslant \infty$；

(h2) $0 \leqslant f_\infty < \infty$ 且 $M < f_0 \leqslant \infty$

中有一个成立，则边值问题至少有一个解，其中

$$f_0 = \lim_{s\to 0}\frac{f(s)}{s}, f_\infty = \lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s}.$$

当 $\alpha = 0$ 时，问题(1)退化为 Robin 型两点边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + g(t)f(u) = 0, t \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases}$$

此时定理 A 的结论仍然成立. 但是，定理 A 并没有说明随着参数 α 在 $[0,1]$ 内的变化，解的范数会产生怎样的改变. 本文尝试为三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + h(t)f(u) = 0, t \in (0,1), \\ u'(0) = 0, u(1) = \lambda u(\eta) \end{cases} \tag{2}$$

建立正解的全局结构，其中参数 $\lambda \in [0,1)$.

本文假定：

(H1) $h \in C([0,1],[0,\infty))$ 在 $[0,1]$ 的任意子区间内不恒为零；

(H2) $f \in C([0,\infty),[0,\infty))$ 满足 $f(s) > 0$，$s > 0$；

(H3) $\lambda > 0, \eta \in [0,1)$，满足 $0 < \lambda < 1$.

本文的主要结果如下：

定理 1.1　假设(H1)～(H3)成立，$f_0 = 0, f_\infty = \infty$. 则 Σ 包含一个连接 $\{0\} \times C[0,1]$ 与 $(1,0)$ 的连通分支.

若 $\lambda \neq 1$，则问题(2)等价于积分方程

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 G(\eta,s)h(s)f(u(s))\mathrm{d}s = \Phi(\lambda,u) \tag{3}$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} 1-t, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ 1-s, 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

注 1　因为 $\Phi(\lambda,u)$ 在 $\lambda = 1$ 处没有定义，指数跳跃定理不再适用于在(1,0)附近的局部分歧. 因此我们引用众所周知的 Leray-Schauder 全局延拓原理来证明我们的结果.

2　预备知识及引理

记 E 是一个 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|_\infty$，Σ 是 $\mathbf{R}\times C[0,1]$ 中集合 $\{(\lambda,u) \in [0,1)\times C[0,1] \mid u$ 是 $u = \Phi(\lambda,u)$ 的非平凡解$\}$ 的闭包. 下面的引理对主要结果的证明非常重要：

引理 2.1[11]　假设 P 是 Banach 空间 E 中的一个锥，$V \subset P$ 是 E 中的有界开集. 若算子 $F:[\mu_1,\mu_2]\times P \to P$ 是一个连续的紧映射且满足：

(i) 等式 $x = F(\lambda,x)$ 在 $[\mu_1,\mu_2]\times(P\backslash V)$ 上无解；

(ii) $\mathrm{ind}(F(\mu_1,\cdot),V,P) = m, m \neq 0$，

则集合

$$\Sigma^* := \{(\lambda,x) \in [\mu_1,\mu_2]\times P \mid x = F(\lambda,x)\}$$

包含一条连接 $\{\mu_1\}\times V$ 和 $\{\mu_2\}\times V$ 的连通分支.

在接下来的证明过程中，我们的工作空间为 Banach 空间 $C[0,1]$，其范数为 $\|\cdot\|_\infty$. 定义锥

$$K := \{x \in C[0,1] \mid x \geqslant 0, t \in [0,1]\}.$$

相应地，令

$$K_r = \{x \in K \mid \|x\|_\infty < r\}.$$

首先，我们介绍一个线性三点边值问题的极大值原理.

引理 2.2　假设 $\beta \in [0,1)$ 是一个给定的数. 令 $e \in C[0,1]$，且 $e(t) \geqslant 0, t \in [0,1]$. 若 u 是问题

$$\begin{cases} u''(t) + e(t) = 0, t \in (0,1), \\ u'(0) = 0,\ u(1) = \beta u(\eta) \end{cases}$$

的一个解,则 $u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]$. 并且若存在 $t_0\in[0,1]$ 使得 $e(t_0)>0$, 则 $u(t)>0, t\in(0,1]$.

证明 由 $u''(t)=-e(t)\leqslant 0$ 可知:$u(t)$ 的曲线在 $(0,1)$ 上向上凸. 而 $u'(t)=u'(0)-\int_0^t e(s)\mathrm{d}s$, 结合边界条件 $u'(0)=0$ 得 $u'(t)\leqslant 0$, 因此 $u(t)$ 的曲线在 $(0,1)$ 上单调递减. 只要 $u(1)\geqslant 0$, 对任意的 $t\in[0,1]$, 就有 $u\geqslant 0$. 若 $u(1)<0$, 则有 $u(\eta)<0$ 及 $u(1)=\beta u(\eta)>u(\eta)$, 与 u 的上凸性相矛盾.

然后,我们证明在 $[0,1]$ 上的上凸函数的两个非常重要的性质.

引理 2.3 设 $0<\lambda<1$. 若 $u\in C([0,1],[0,\infty))$ 在 $[0,1]$ 上是上凸的,则

$$\min_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\frac{\lambda(1-\eta)}{1-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

证明 由引理 2.2 可知 $u(1)<u(\eta)$, $\|u\|_\infty=u(0)$ 且 $\min_{t\in[\eta,1]}u(t)=u(1)$. 则有

$$u(0)\leqslant u(1)+\frac{u(1)-u(\eta)}{1-\eta}(0-1)=$$

$$u(1)(1-\frac{1-\frac{1}{\lambda}}{1-\eta}).$$

从而推得 $\min_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\frac{\lambda(1-\lambda)}{1-\lambda\eta}\|u\|_\infty$.

引理 2.4 假设 $\alpha\in[0,1)$ 是一个常数, $y\in C^2([0,1],[0,\infty))$ 是一个连续函数且满足

$$\begin{cases}y''(t)\leqslant 0, t\in(0,1),\\ y'(0)=0, y(1)=\alpha y(\eta)\end{cases}$$

和 $\|y\|_\infty=1$. 则存在 $\tau\in(0,1]$, 使得

$$\frac{\alpha-1}{1-\eta}\leqslant y'(\tau)\leqslant 0.$$

证明 由 $y(t)$ 的曲线在 $(0,1)$ 上上凸, $y'(t)\leqslant 0$ 以及边界条件 $y'(0)=0$ 知,存在 $\tau\in(0,1]$ 使得

$$0\geqslant y'(\tau)\geqslant y'(\eta)\geqslant\frac{y(1)-y(\eta)}{1-\eta}.$$

由于 $\|y\|_\infty=1$, 因此 $\frac{y(1)-y(\eta)}{1-\eta}\geqslant\frac{\alpha-1}{1-\eta}$, 即 $\frac{\alpha-1}{1-\eta}\leqslant y'(\tau)\leqslant 0$.

最后,我们说明一类线性二阶方程的解所满足的变号性.

引理 2.5[11] 假设 $\hbar\in C(I,[0,\infty)), t\in I\subset[0,1]$ 在 I 的任意子区间上不恒为零, $\{p_n\}\subset C(I,[0,\infty))$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}p_n(t)=\infty, t\in I.$$

若 $\{u_n\}$ 是 $u_n''(t)+\hbar(t)p_n(t)u_n(t)=0, t\in I$ 的一个解序列,则当 n 充分大时, u_n 在 I 上变号.

为方便起见,对于给定的 $r\in[0,1)$. 记 $\Delta_r=\{(r,u)\mid u\in C[0,1]$ 是问题(2)的一个非平凡解$\}$. 由条件(H1)、(H2)及引理 2.2 有 $\Delta_r=\{(r,u)\mid u\in C[0,1]$ 是问题(2)的一个正解$\}$. 若 $a\in[0,1)$, 记 $\Gamma_a=\{(\lambda,u)\in[0,a]\times C[0,1]\mid u$ 是问题(2)的一个非平凡解$\}$.

同样地,由条件(H1)、(H2)及引理 2.2 有 $\Gamma_a=\{(\lambda,u)\in[0,a]\times C[0,1]\mid u$ 是问题(2)的一个正解$\}$. 显而易见, $\Gamma_a=\bigcup_{r\in[0,a]}\Delta_r$. 则我们有如下引理:

引理 2.6[12] 假设 $f_0=0, f_\infty=\infty$, 则存在正常数 b,B 且 $b<B$, 使得 $b<\|u\|_\infty<B, \forall u\in\Delta_0$. 更进一步

$$\mathrm{ind}(\Phi(0,\cdot),K_B\backslash K_b,K)=-1,$$

其中 Φ 由(3)式定义.

引理 2.7 假设 $f_0=0, f_\infty=\infty$. b,B 是引理 2.6 中给出的常数. 则对任意的 $a\in(0,1)$, 存在一个正数 δ_a 且 $(\delta_a,\delta_a^{-1})\supset[b,B]$, 使得

$$\delta_a<\|u\|_\infty<\delta_a^{-1}, \forall(\lambda,u)\in\Gamma_a.$$

证明 首先我们证明若 $f_0=0$, 则存在一个正数 δ_1 使得 $\|u\|_\infty>\delta_1, \forall(\lambda,u)\in\Gamma_a$.

反设存在序列 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\Gamma_a$, 当 $\|u_k\|_\infty\to 0$ 时有 $\Phi(\lambda_k,u_k)=u_k$. 假设 $\lambda_k\to\bar\lambda, \bar\lambda\in[0,a]$. 由条件(H1)、(H2)及引理 2.2 可知, $u_k(t)>0, t\in(0,1]$.

令 $v_k(t)=\frac{u_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$. 则

$$\begin{cases}v_k''(t)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0, t\in(0,1),\\ v_k'(0)=0,\ v_k(1)=\lambda_k v_k(\eta)\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$g_k=\begin{cases}\frac{f(u_k(t))}{u_k(t)}, t\in(0,1],\\ 0, t=0.\end{cases}\tag{5}$$

显而易见, $g_k(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续,并且存在一个不依赖于 k 的常数 $M>0$, 使得 $\|g_k\|_\infty\leqslant M$. 结合(5)式可得

$$\|v_k''\|_\infty\leqslant M\|h\|_\infty\tag{6}$$

根据引理 2.4,存在 $\tau_k\in(0,1)$ 使得

$$\frac{\alpha-1}{1-\eta}\leqslant v_k'(\tau_k)\leqslant 0\tag{7}$$

结合(6),(7)式以及 $v_k'(t)=v_k'(\tau_k)+\int_{\tau_k}^t v_k''(s)\mathrm{d}s$ 得

$$\|v_k'\|_\infty \leqslant M_1 \tag{8}$$

其中 M_1 为不依赖于 k 的常数. 由边界条件 $v_k'(0)=0$ 有 $\|v_k\|_\infty \leqslant M_2$，$M_2$ 同样为不依赖于 k 的常数. 根据 Arzela-Ascoli 定理可知，$\{v_k\}$ 是 $C[0,1]$ 中的相对紧集，存在一个收敛子列，不妨仍记为 $\{v_k\}$，$v_k \to \bar{v}$，则在 $(0,1)$ 上 $\|\bar{v}\|_\infty = 1$，$\bar{v} \geqslant 0$.

另一方面，由 $f_0=0$ 以及 $\|u\|_\infty \to 0$，$k\to\infty$ 知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(u_k(t))}{u_k(t)}=0, t\in[0,1].$$

结合(7)式，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k\|_\infty=0$，即

$$|h(t)g_k(t)v_k(t)| \leqslant \|g_k\|_\infty \|h\|_\infty \to 0, k\to\infty.$$

代入问题(4)，有

$$\begin{cases}\bar{v}''(t)=0, t\in(0,1),\\ \bar{v}'(0)=0,\ \bar{v}(1)=\bar{\lambda}\bar{v}(\eta)\end{cases} \tag{9}$$

当 $\bar{\lambda}\in[0,a]$ 时，问题(9)只有平凡解，即 $\bar{v}(t)=0$. 这与 $\|\bar{v}\|_\infty=1$ 矛盾！

接下来，我们证明若 $f_\infty=\infty$，则存在一个正数 δ_2，使得

$$\|u\|_\infty<\delta_2, \forall(\lambda,u)\in\Gamma_a.$$

反设存在序列 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\Gamma_a$，当 $\|u_k\|_\infty\to\infty$ 时，有 $\Phi(\lambda_k,u_k)=u_k$. 由条件(H1)，(H2)及引理 2.2 可知 $u_k(t)>0$，$t\in(0,1]$. 进一步，由引理 2.3 有

$$\min_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\frac{\lambda(1-\eta)}{1-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

由于 $\|u_k\|_\infty\to\infty$，则

$$\lim_{k\to\infty}g_k(t)=\infty, t\in[\eta,1].$$

令 $v_k(t)=\dfrac{u_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$. 考虑方程

$$v_k''(t)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0, t\in[0,1].$$

由引理 2.5 可知，当 k 充分大时，v_k 在 $[\eta,1]$ 上变号，与 $u_k(t)>0$，$t\in(0,1]$，矛盾！取 $\delta_a=\min\{\delta_1,\delta_2^{-1}\}$，引理得证.

3　主要结果的证明

定理 1.1 的证明　对任意给定的 $a\in(0,1)$，设 δ_a 由引理 2.7 给出. 令

$$U_a=\{u\in K|\delta_a<\|u\|_\infty<\delta_a^{-1}, \forall(\lambda,u)\in\Gamma_a\}.$$

由引理 2.6 和不动点指数定理的切除性可知

$$\operatorname{ind}(\Phi(0,\cdot),U_a,K)=\operatorname{ind}(\Phi(0,\cdot),K_B\backslash K_b,K)=-1.$$

根据引理 2.7，$u=\Phi(\lambda,u)$ 在 $[0,a]\times(K\backslash U_a)$ 上无解. 则由引理 2.1 可知存在一条连接 Δ_0 和 Δ_a 的连通分支 $\xi^a\subseteq\Gamma_a$. 令 $\Xi:=\{\xi|\xi$ 是 Σ 中的一条连通分支且 $\xi\cap\Delta_0\neq\varnothing\}$. 则 $\Xi\neq\varnothing$.

接下来我们分三步证明.

第一步，我们将证明存在 $\xi\in\Xi$，并且 ξ 满足

$$\{\lambda\mid\exists(\lambda,u)\in\xi\}=[0,1) \tag{10}$$

反设存在 $\bar{a}\in(0,1)$，使得

$$\sup_{\gamma\in\Xi}\{\sup\{\lambda\mid\exists(\lambda,u)\in\gamma\}\}=\bar{a} \tag{11}$$

成立. 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}(1-\bar{a})$. 则 $\bar{a}+\varepsilon\in(0,1)$. 设 $\delta_{\bar{a}+\varepsilon}$ 由引理 2.7 给出，令

$$U_{\bar{a}+\varepsilon}=\{u\in K|\delta_{\bar{a}+\varepsilon}<\|u\|_\infty<\delta_{\bar{a}+\varepsilon}^{-1}\}.$$

则由引理 2.6 和不动点指数定理的切除性可知

$$\operatorname{ind}(\Phi(0,\cdot),U_{\bar{a}+\varepsilon},K)=-1.$$

根据引理 2.7，$u=\Phi(\lambda,u)$ 在 $[0,\bar{a}+\varepsilon]\times(K\backslash U_{\bar{a}+\varepsilon})$ 上无解. 再次由引理 2.1 可知存在一条连接 Δ_0 和 $\Delta_{\bar{a}+\varepsilon}$ 的连通分支 $\xi^{\bar{a}+\varepsilon}\subseteq\Gamma_{\bar{a}+\varepsilon}$. 这与(11)式矛盾！

第二步，若 ξ 是满足(10)式的一条连通分支，则 ξ 与 $(1,\infty)$ 不相交. 反设存在 $\{(\lambda_k,u_k)\}\subset\xi$，使得 $\lambda_k\to1$，$\|u_k\|_\infty\to\infty$. 则由条件(H1)、(H2)以及引理 2.2，$u_k(t)>0$，$t\in(0,1]$. 再由引理 2.3，

$$\min_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\frac{\lambda(1-\eta)}{1-\lambda\eta}\|u\|_\infty.$$

结合 $\|u_k\|_\infty\to\infty$ 可知，$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(t)=\infty$，$t\in[\eta,1]$，其中 g_k 如(5)式所示. 令 $v_k(t)=\dfrac{u_k(t)}{\|u_k\|_\infty}$. 考虑方程

$$v_k''(t)+h(t)g_k(t)v_k(t)=0, t\in[0,1].$$

则由引理 2.5 可知，当 k 充分大时，$\{v_k\}$ 在 $[\eta,1]$ 上变号这与 $u_k(t)>0$，$t\in(0,1]$ 矛盾！

第三步，若 ξ 是满足(10)式的一条连通分支，则 $\xi\cap(\{1\}\times C[0,1])=\{(1,0)\}$. 反设

$$\xi\cap(\{1\}\times C[0,1])=\{(1,\bar{u})\}, \bar{u}\in C[0,1]\backslash\{0\}.$$

则存在 $\{(\lambda_n,u_n)\}\subset\xi$，使得 $\lambda_n\to1$，$u_n\to\bar{u}$，

$$\begin{cases}\bar{u}''(t)+h(t)f(\bar{u})=0, t\in(0,1),\\ \bar{u}'(0)=0,\ \bar{u}(1)=\bar{u}(\eta).\end{cases}$$

由条件(H1)，(H2)以及引理 2.2 不难看出 $\bar{u}>0$，$t\in(0,1]$，并且 $\bar{u}$ 的曲线在 $(0,1]$ 上是上凸的. 这与 $\bar{u}(1)=\bar{u}(\eta)$ 矛盾！证毕.

参考文献：

[1]　Ma R. Global behavior of the components of nodal solutions of asymptotically linear eigenvalue prob-

lems [J]. Appl Math Lett, 2008, 21: 754.

[2] Ma R. Nodal solutions for singular nonlinear eigenvalue problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 66: 1417.

[3] Ma R, Thompson B. Nodal solutions for nonlinear eigenvalue problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2004, 59: 707.

[4] Ma R. Positive solutions for a nonlinear three-point boundary-value problem[J]. Electron J Differ Eq, 1999, 1999: 216.

[5] Webb J R L. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2001, 47: 4319.

[6] Rynne B P. Global bifurcation for $2m$-th order boundary value problems and infinitely many solutions of superlinear problems[J]. J Differ Equ, 2003, 188: 461.

[7] Lan K, Webb J R L. Positive solutions of semilinear differential equations with singularities[J]. J Differ Equ, 1998, 148: 407.

[8] Ma R, Thompson B. Multiplicity results for second-order two-point boundary value problems with nonlinearities across several eigenvalues [J]. Appl Math Lett, 2005, 18: 587.

[9] Ma R, Thompson B. Multiplicity results for second-order two-point boundary value problems with superlinear or sublinear nonlinearities[J]. J Math Anal Appl, 2005, 303: 726.

[10] Wang S, Liu J. Coexistence of positive solutions of nonlinear three-point boundary value and its conjugate problem [J]. J Math Anal Appl, 2007, 330: 334.

[11] Ma R, Thompson B. Global behavior of positive solutions of nonlinear three-point boundary value problems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2005, 60: 685.

[12] Erbe L H, Wang H. On the existence of positive solutions of ordinary differential equations[J]. P Am Math Soc, 1994, 120: 743.

[13] 李涛涛. 非线性三点边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2017, 54: 683.

[14] 耿天梅, 高承华, 张飞. 带变号格林函数的三阶三点差分方程边值问题的多解性[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2017, 54: 35.