doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.01.004

自反 Banach 空间中右 Bregman 强非扩张映射的强收敛定理

万丙晟[1]，黄建华[2]
(1. 福建教育学院，福州 350025；2. 福州大学数学与计算机科学学院，福州 350116)

摘 要：本文在实自反的 Banach 空间中针对有限族右 Bregman 强非扩张映射公共不动点构造了一类新型的 Mann-Halpern 型迭代算法，在适当条件下证明了该算法产生的序列的强收敛性. 更进一步地，本文将此方法应用到求解极大单调算子的零点问题上.

关键词：自反的 Banach 空间；Mann-Halpern 型迭代算法；右 Bregman 强非扩张映射
中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)01-0018-07

Strong convergence theorem for right Bregman strongly nonexpensive mappings in reflexive Banach spaces

WAN Bing-Sheng[1]，*HUANG Jian-Hua*[2]
(1. Fujian Institutue of Education, Fuzhou 350025, China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou 350116, China)

Abstract: In this paper, we introduce Mann-Halpern algorithm for finding a common fixed point problem of finite family of right Bregman strongly nonexpansive mappings in reflexive mappings in reflexive real Banach spaces. Moreover, we prove a strong convergence theorem under suitable control conditions. Finally, the application to a common zero of a finite family of maximal monote mappings is given by the result.

Keywords: Reflexive real Banach spaces; Mann-Halpern algorithm; Right Bregman strongly nonexpansive mappings
(2010 MSC 41A65, 90C48, 47H04)

1 引 言

非扩张算子的不动点理论在非线性分析领域中具有广泛的应用. 比如求解极大单调算子的零元、凸可行问题、变分不等式问题和均衡问题等. 然而，Hilbert 空间中的非扩张映射在 Banach 空间中却不一定是非扩张的. 比如，极大单调算子 $A:H\to 2^H$ 的预解算子 $R_A:=(I+A)^{-1}$ 在一般的 Banach 空间中未必是非扩张的. 解决该问题有一些方法，其中之一是用 Bregman 距离函数来代替范数、Bregman 非扩张映射来代替非扩张映射、Bregman 投影来代替距离投影.

1967 年，Bregman[1] 在 Banach 空间中引入 Bregman 距离函数，进而讨论 Bregman 非扩张映射不动点及其相关的问题. 2010 年，Reich 和 Sabach[2] 利用 Bregman 投影方法研究了有限族左 Bregman 强非扩张映射的公共不动点问题，获得了强收敛定理，并且将所得到的结果应用到凸可行

收稿日期：2017-10-16
基金项目：福建省中青年教师教育科研项目基金(JA15610)
作者简介：万丙晟(1984－)，男，编辑，江西九江人，主要从事非线性分析的研究. Email: bingshengwan@163.com

问题与均衡问题上. 2012 年，Marin-Marquez 等[3]讨论了右 Bregman 稳定非扩张映射及其相关性质，并证明了右 Bregman 强非扩张映射的不动点集是闭的，利用 Picard 迭代算法获得了弱收敛定理.

众所周知，左 Bregman 强非扩张映射的不动点集是闭凸集，但是右 Bregman 强非扩张映射的不动点集是闭的但未必是凸的. 因此，在研究右 Bregman 强非扩张映射时将带来许多困难. 例如 Bregman 投影方法对右 Bregman 算子就不再适用. 正是基于这样的情形，本研究构造了一种新型的 Mann-Halpern 型迭代算法，并在合适的条件下证明算法的强收敛性. 该结果在研究对象上是对文献[2]的拓展，在算法上改进了文献[3]中算法的弱收敛性，更进一步地，将此方法应用到求解极大单调算子的零点问题上.

2　预备知识

设 R 为实数集，E 为实自反的 Banach 空间，E^* 为其对偶空间，E 的范数记为 $\|.\|$，E 与 E^* 的配对记为 $\langle .,. \rangle$，$f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是真值函数，f 的 Fenchel 共轭函数 $f^*:E^*\to(-\infty,+\infty]$ 定义为

$$f^*(x^*)=\sup\{\langle x^*,x\rangle-f(x):x\in E\}(x^*\in E^*)\tag{1}$$

记 f 的有效域为 $domf=\{x\in E,f(x)<\infty\}$，$f$ 的有效域的内部为 $\mathrm{int}(domf)$. 对任意的 $x\in \mathrm{int}(domf)$ 与 $h\in E$，f 在方向 h 的右导数定义如下：

$$f^{\circ}(x,h):=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}.$$

如果对任意的 $h\in E$，式(1)极限存在，则称 f 在 x 上是 Gateaue 可微的. 此时 $f^{\circ}(x,h)$ 与 f 在 x 的梯度值 $\nabla f(x)$ 是相同的. 如果式(1)极限关于 h 在单位球面上是一致存在的，则称 f 在 x 上是 Frechet 可微的. 如果式(1)极限关于 $x\in C$ 与 $\|h\|=1$ 一致存在，称 f 在 E 的子集 C 上是一致 Frechet 可微的.

Bauschke、Borwein 和 Combettes[4]给出了 Legendre 函数 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 的定义，即 f 是 Legendre 函数当且仅当它满足下列条件：

(1) $\mathrm{int}(domf)\neq\varnothing$，$f$ 在 $\mathrm{int}(domf)$ 上是 Gateaue 可微的，且 $dom\nabla f=\mathrm{int}(domf)$；

(2) $\mathrm{int}(domf^*)\neq\varnothing$，$f^*$ 在 $\mathrm{int}(domf^*)$ 上是 Gateaue 可微的，且 $dom\nabla f^*=\mathrm{int}(domf^*)$；

(3) 如果 E 为实自反的 Banach 空间，f 是 Legendre 函数，则下列结论成立[5]：

1) f 是 Legendre 函数，当且仅当 f^* 是 Legendre 函数，

2) $(\partial f)^{-1}=\partial f^*$，

3) $\nabla f=(\nabla f^*)^{-1}$，$ran\nabla f=dom\nabla f^*=\mathrm{int}(dom\nabla f^*)$，$ran\nabla f^*=dom\nabla f=\mathrm{int}(dom\nabla f)$，其中 $ranf$ 表示 f 的值域，

4) f 和 f^* 分别在它们的有效域内部是严格凸的.

定义 2.1[6]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gateaux 可微的凸函数，二元函数 $D_f:domf\times\mathrm{int}(domf)\to(0,+\infty]$ 定义为：

$$D_f(y,x)=f(y)-f(x)-\langle\nabla f(x),y-x\rangle,$$

则称 D_f 为 Bregman 距离函数. 值得注意的是 Bregman 距离并不是真正实际意义上的距离，显然 $D_f(x,x)=0$，但是当 $D_f(x,y)=0$ 时，$x=y$ 不一定成立.

一般地，D_f 也不满足对称性质和三角不等式. 从 Bregman 距离的定义中容易得到如下基本性质：

(1)（两点等式）对任意的 $x,y\in\mathrm{int}(domf)$，有

$$D_f(x,y)+D_f(y,x)=\langle\nabla f(x)-\nabla f(y),x-y\rangle;$$

(2)（三点等式）对任意的 $x\in domf$ 与 $y,z\in\mathrm{int}(domf)$ 有

$$D_f(x,y)+D_f(y,z)-D_f(x,z)=\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),x-y\rangle;$$

3)（四点等式）对任意的 $y,\omega\in domf$ 与 $x,z\in\mathrm{int}(domf)$ 有

$$D_f(y,x)-D_f(y,z)-D_f(\omega,x)+D_f(\omega,z)=\langle\nabla f(z)-\nabla f(x),y-\omega\rangle.$$

定义 2.2[1]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gateaux 可微的凸函数，C 为 $domf$ 中的非空闭凸子集，$x\in\mathrm{int}domf$，若存在向量 $proj_C^f\in C$ 满足

$$D_f(proj_C^f(x),x)=\inf\{D_f(y,x):y\in C\},$$

则称 $proj_C^f\in C$ 为 x 在 C 上的 Bregman 投影. 从文献[1]可知，当 C 为非空闭凸集时，$proj_C^f(x)$是存在的且是唯一的.

定义 2.3[7]　设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gateaux 可微的凸函数. 称 f 是

(1)在 $x \in \mathrm{int}(dom f)$ 全局凸的,若它在 x 的总体凸性模是正的,其中 f 在 x 的总体凸性模 v_f: $\mathrm{int}(dom f)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 定义为

$$v_f(x,t):=\inf\{D_f(y,x):y\in dom f,\ \|y-x\|=t\},\forall t>0;$$

(2)全局凸的,若对任意的 $x \in \mathrm{int}(dom f)$, f 在 x 处是总体凸的;

(3)在有界集上全局凸的,若对 E 的任何非空有界子集 B 和 $t>0$, $v_f(B,t)$ 均为正数,其中

$$v_f(B,t):=\inf\{v_f(x,t):x\in B\cap dom f\}$$

为 f 在集合 B 上的全局凸性模.

定义 2.4[8,9] 设 C 是 E 的非空闭凸子集, T: $C\to C$. 若 C 包含一序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 p,且使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$,则称 p 为 T 的渐近不动点. T 的渐近不动点构成的集合记为 $\hat{F}(T)$. 若 C 包含一序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 p 且使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=0$,则称 p 为 T 的强渐近不动点. T 的强渐近不动点构成的集合记为 $\tilde{F}(T)$. 设 $F(T)$ 为 T 的不动点集,即 $F(T)=\{x\in C\,|\,Tx=x\}$. 对任意的算子 $T:C\to C$ 都有 $F(T)\subset\tilde{F}(T)\subset\hat{F}(T)$.

称 $T:C\to \mathrm{int}(dom f)$ 为:

(1) 右 Bregman 拟非扩张的,若 $F(T)\neq\varnothing$,且: $D_f(Tx,p)\le D_f(x,p),\forall x\in C,p\in F(T)$;

(2) 右 Bregman 相对非扩张的,若 $F(T)\neq\varnothing$, $\hat{F}(T)=F(T)$,且: $D_f(Tx,p)\le D_f(x,p)$, $\forall x\in C,p\in F(T)$;

(3) 右 Bregman 强非扩张的,若 $\hat{F}(T)\neq\varnothing$, $\hat{F}(T)=F(T)$,且: $D_f(Tx,p)\le D_f(x,p),\forall x\in C,p\in\hat{F}(T)$,且对任意有界序列 $\{x_n\}\subset C,p\in\hat{F}(T)$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}(D_f(x_n,p)-D_f(Tx_n,p))=0$,有: $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(x_n,Tx_n)=0$;

(4) 右 Bregman 稳定非扩张的,如果 $\hat{F}(T)\neq\varnothing$, $\forall x,y\in C$ 有

$$\langle\nabla f(Tx)-\nabla f(Ty),Tx-Ty\rangle\le \langle\nabla f(Tx)-\nabla f(Ty),x-y\rangle$$

及等价地有

$$D_f(Tx,Ty)+D_f(Ty,Tx)+D_f(x,Tx)+D_f(y,Ty)\le D_f(x,Ty)+D_f(y,Tx).$$

如果 T 为右 Bregman 稳定非扩张映射,则 $\hat{F}(T)=F(T)$,因此 T 为右 Bregman 相对非扩张映射,其中 Legendre 函数 f 在 E 的有界子集上是有界的、一致 Frechet 可微的. 若 $T_i(i=1,2\ldots N)$ 均为右 Bregman 稳定非扩张映射,则 $T=T_N$, $T_{N-1,\ldots,}T_1$ 为右 Bregman 稳定非扩张映射,且 $\hat{F}(T)=F(T)=\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$,因此 T 为右 Bregman 强非扩张映射.

注 1 在上述定义中,关于结论 $F(T)\subset\tilde{F}(T)\subset\hat{F}(T)$,反之是不成立的(见文献[10]中的 Example 2.3 和文献[11]中的 Example 2.5).

定义 2.5 设函数 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 是真凸下半连续的且 Gateaux 可微的, $A:E\to 2^{E^*}$ 为极大单调算子,且 $\mathrm{int}(dom f)\cap dom(A)\neq\varnothing$,定义 A 的预解算子的共轭算子 $C\mathrm{Res}_A^f:E^*\to 2^{E^*}$ 为 $C\mathrm{Res}_A^f:(I+A\nabla f^*)^{-1}$.

注 2[12] 若 A 是单调的,且 f 在 $\mathrm{int}(dom f)$ 是严格凸的,则 $C\mathrm{Res}_A^f$ 为右 Bregman 稳定非扩张映射, $\nabla f^*(F(C\mathrm{Res}_A^f))=\mathrm{int}(dom f)\cap A^{-1}(0^*)$. 假设 Legendre 函数 f 在 E 的有界子集上是有界的、一致连续的. 则对于每一个右 Bregman 稳定非扩张算子 T 都有 $\hat{F}(T)=F(T)$. 在这些假设条件下 $C\mathrm{Res}_A^f$ 为右 Bregman 强非扩张映射.

引理 2.6[2] 如果 $x\in\mathrm{int}(dom f)$,则下列结论是等价的:

(1) 函数 f 在 x 处是全局凸的;

(2) 对任意序列 $\{y_n\}\subset dom f$, $\lim\limits_{n\to\infty}D_f(y_n,x)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-x\|=0$;

(3) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $y\in\mathrm{int}(dom f)$ 和 $D_f(y,x)\le\delta$,有 $\|x-y\|\le\varepsilon$ 成立.

引理 2.7[3] 设函数 $f:E\to\mathbf{R}$ 是真凸下半连续的,且 Gateaux 可微的, $dom f^*=E^*$, $A:E\to 2^{E^*}$ 是一个集值单调映射,则 A 是极大单调算子,当且仅当 $dom(C\mathrm{Res}_A^f)=E^*$.

引理 2.8[3] 设 $f:E\to\mathbf{R}$ 是 Frechet 可微函数, C 是 $\mathrm{int}(dom f)$ 的非空闭凸子集, $T:C\to\mathrm{int}(dom f)$ 是右拟 Bregman 非扩张映射,则 $F(T)$ 是闭的.

引理 2.9[5] 设 $f:E\to(-\infty,+\infty]$ 为 Gateaux 可微的凸函数,且在 $\mathrm{int}(dom f)$ 上是全局凸的 $x\in\mathrm{int}(dom f)$, C 是 $\mathrm{int}(dom f)$ 的非空闭凸子集,如果 $z\in C$,则下列结论等价:

(1) $z = proj_C^f(x)$；

(2) z 是如下变分不等式的解

$\langle \nabla f(x) - \nabla f(z), z - y \rangle \geq 0, \forall y \in C$ 即 $\langle \nabla f(x) - \nabla f(proj_C^f(x)), proj_C^f(x) - y \rangle \geq 0, \forall y \in C$；

(3) z 是如下变分不等式的解

$D_f(y,z) - D_f(z,x) \leq D_f(y,x), \forall y \in C$，即 $D_f(y, proj_C^f(x)) - D_f(proj_C^f(x), x) \leq D_f(y,x), \forall y \in C$.

引理 2.10[6]　设 $f:E \to \mathbf{R}$ 是 Gateaux 可微函数. 函数 $V_f: E \times E^* \to [0, +\infty)$ 定义如下：

$$V_f(x,x^*) = f(x) - \langle x, x^* \rangle + f^*(x^*), (x \in E, x^* \in E^*) \quad (2)$$

则 $V_f \geq 0$，且 $V_f(x,x^*) = D(x, \nabla f^*(x^*)), \forall x \in E, x^* \in E^*$，且由次微分不等式得：

$$V_f(x,x^*) + \langle y^*, \nabla f^*(x^*) - x \rangle \leq V_f(x, x^* + y^*), \forall x \in E, x^* \in E^*, y^* \in E^*.$$

引理 2.11[7]　称 $f:E \to (-\infty, +\infty]$ 是序列一致的，如果对 E 中任意两个序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{int}(domf)$ 和 $\{y_n\} \subset \mathrm{int}(domf)$，当 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} D_f(y_n - x_n) = 0$ 时，有：$\lim\limits_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = 0$ 成立. 则 f 在有界集上是全局凸的，当且仅当 f 是序列一致的.

引理 2.12[12]　设函数 $f:E \to (-\infty, +\infty]$ 是真凸下半连续的，则 $f^*: E^* \to (-\infty, +\infty]$ 是真凸弱 * 下半连续，因此 $\forall z \in E$，有

$$D_f(z, \nabla f^*(\sum_{i=1}^N t_i \nabla f(x_i)) \leq \sum_{i=1}^N t_i D_f(z, x_i),$$

其中 $t_i \subset (0,1), \sum_{i=1}^N t_i = 1$.

引理 2.13[13]　设 $f:E \to \mathbf{R}$ 在 E 的有界子集上是有界的、一致 Frechet 可微的和全局凸的，$C \subset E$，$T_i: C \to C$ 是右 Bregman 强非扩张映射且 $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$，其中 $i = 1,2,\ldots,N$. 如果 $A := \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$ 非空，则 T 是右 Bregman 强非扩张映射，且 $F(T) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.

引理 2.14[13]　设函数 $f:E \to (-\infty, +\infty]$ 在点 $x \in \mathrm{int}(domf)$ 是真凸下半连续的、Gateaux 可微的、全局凸的. 令 $x_n \subset domf$，如果序列 $D_f(x_n, x)$ 有界，则序列 $\{x_n\}$ 有界.

引理 2.15[14]　设 $\{b_n\}$ 是正实数序列，且满足如下条件：

$$b_{n+1} \leq (1-\alpha_n) b_n + \alpha_n \delta_n,$$

其中 $a \subset (0,1), \{\delta_n\} \subset R, \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^\infty \alpha_n = \infty$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \delta_n \leq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

引理 2.16[15]　设 $\{a_n\}$ 为实数列，$\{n_i\} \subset \{n\}$ 且 $a_{n_i} \leq a_{n_{i+1}}, i \in N$，则存在一个递增序列 $\{m_k\} \subset \mathbf{N}$，使得当 k 足够大时有 $m_k \to \infty, a_{m_k} \leq a_{m_{k+1}}, a_k \leq a_{m_{k+1}}$ 成立. 事实上 $m_k = \max\{j \leq k : a_j \leq a_{j+1}\}$.

3　主要结果

定理 3.1　设 E 是实自反的 Banach 空间，f 在 E 的有界子集上是有界的、一致 Frechet 可微的和全局凸的，$domf^* = E^*$，C 是 $\mathrm{int}(domf)$ 的非空闭凸子集，$T_i: C \to C$ 是右 Bregman 强非扩张映射且 $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$，其中 $i = 1,2,\ldots,N$. 假设 $A := \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$ 非空，令 $u, x_1 \in C$，$\{x_n\}$ 由下列算法产生：

$$x_{n+1} = a_n u + (1-a_n)(\beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n),$$

其中 $T = T_N, T_{N-1}, \ldots, T_1, \{a_n\} \subset (0,1), \{\beta_n\} \subset (0,1), \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^\infty \alpha_n = \infty, 0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$. 则 $\{x_n\}$ 强收敛于点 $p \in A$.

证明　由引理 2.13 可知，$A = F(T) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$，$T$ 是右强 Bregman 非扩张映射. 令 $p \in A$，根据

$$\begin{aligned} D_f(x_{n+1}, p) = {} & D_f(\alpha_n u + (1-\alpha_n)(\beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n), p) \leqslant \\ & \alpha_n D_f(u,p) + (1-\alpha_n) D_f(\beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, p) \leqslant \alpha_n D_f(u,p) + \\ & (1-\alpha_n)\beta_n D_f(x_n,p) + (1-\alpha_n)(1-\beta_n) D_f(T x_n, p) \leqslant \\ & \alpha_n D_f(u,p) + (1-\alpha_n)\beta_n D_f(x_n,p) + (1-\alpha_n)(1-\beta_n) D_f(x_n,p) \leqslant \\ & \alpha_n D_f(u,p) + (1-\alpha_n) D_f(x_n,p), \end{aligned}$$

f 是凸函数及映射 T 为右强 Bregman 非扩张映射的定义，由归纳法可得

$$D_f(x_{n+1}, p) \leq \max\{D_f(u,p), D_f(x_1,p)\}, \forall n \geq 1.$$

所以序列 $\{D_f(x_n,p)\}$ 有界. 根据 T 为右强 Bregman 非扩张映射的定义可知，序列 $\{D_f(Tx_n,p)\}$

是有界的. 由引理 2.14 可知序列 $\{x_n\}$ 和序列 $\{Tx_n\}$ 有界. 令 $y_n=\nabla f(x_n)$. 则

$$y_{n+1}=\nabla f(\alpha_n\nabla f^*(\nabla f(u))+(1-\alpha_n)(\beta_n\nabla f^*(y_n)+(1-\beta_n)\nabla f^*T^*(y_n)) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}D_{f^*}(q,y_{n+1})=&\\ &D_{f^*}(q,\nabla f(\alpha_n\nabla f^*(\nabla f(u))+(1-\alpha_n)(\beta_n\nabla f^*(y_n)+(1-\beta_n)\nabla f^*T^*(y_n)))=\\ &V_{f^*}(q,\alpha_n\nabla f^*(\nabla f(u))+(1-\alpha_n)(\beta_n\nabla f^*(y_n)+(1-\beta_n)\nabla f^*T^*(y_n))\leqslant\\ &V_{f^*}(q,\alpha_n\nabla f^*(\nabla f(u))+(1-\alpha_n)(\beta_n\nabla f^*(y_n)+(1-\beta_n)\nabla f^*T^*(y_n))-\\ &\alpha_n(\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q))+\alpha_n[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q]=\\ &V_{f^*}(q,\alpha_n\nabla f^*(q))+(1-\alpha_n)\beta_n\nabla f^*(y_n)+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\nabla f^*T^*(y_n)+\\ &\alpha_n[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q]\leqslant\\ &\alpha_nV_{f^*}(q,\alpha_n\nabla f^*(q))+(1-\alpha_n)\beta_nV_{f^*}(q,\alpha_n\nabla f^*(y_n))+\\ &(1-\alpha_n)(1-\beta_n)V_{f^*}(q,\nabla f^*T^*(y_n))+\alpha_n[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q]=\\ &\alpha_nD_{f^*}(q,q)+(1-\alpha_n)\beta_nD_{f^*}(q,y_n)+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)D_{f^*}(q,T^*(y_n))+\\ &\alpha_n[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q]\leqslant\\ &(1-\alpha_n)D_{f^*}(q,y_n)+\alpha_n[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q],\end{aligned}$$

其中 T^* 为 T 的共轭算子,且 $T^*:=\nabla fT\nabla f^*$. 由于 ∇f 在 $\mathrm{int}(dom f)$ 的有界子集上是一致连续的, ∇f^* 在 $\mathrm{int}(dom f^*)$ 的有界子集上是一致连续的,所以序列 $\{y_n\}$ 和序列 $\{Ty_n\}$ 都是有界的. 由文献[13]可知, T^* 是左 Bregman 强非扩张映射. 根据文献[13]中的引理 3.3 可知, $A':\nabla f(F(T))=F(T^*)=\hat{F}(T^*)$ 是闭凸的. 令 $q=P_A^{f^*}(\nabla f(u))$. 由引理 2.9、引理 2.10 及 T^* 是左 Bregman 强非扩张映射可得

$$D_{f^*}(q,y_{n+1})\leq(1-\alpha_n)D_{f^*}(q,y_n)+\alpha_n\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q\rangle \tag{4}$$

下面分两种情况讨论.

第一种情况:假设存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 当 $n\geq n_0$ 时,序列 $\{D_{f^*}(q,y_n)\}$ 递减. 因为 $D_{f^*}(q,y_n)\geq0$,所以 $\{D_{f^*}(q,y_n)\}$ 收敛,即当 $n\to\infty$ 时,

$$D_{f^*}(q,y_n)-D_{f^*}(q,y_{n+1})\to0 \tag{5}$$

根据引理 2.12 和式(3),得

$$\begin{aligned}D_{f^*}(q,y_{n+1})=&\\ &D_{f^*}(q,\nabla f(\alpha_n\nabla f^*(\nabla f(u))+(1-\alpha_n)(\beta_n\nabla f^*(y_n)+(1-\beta_n)\nabla f^*T^*(y_n))\leqslant\\ &\alpha_nD_{f^*}(q,\nabla f(u))+(1-\alpha_n)\beta_nD_{f^*}(q,y_n)+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)D_{f^*}(q,T^*(y_n))\leqslant\\ &\alpha_nD_{f^*}(q,\nabla f(u))+(1-\alpha_n)\beta_nD_{f^*}(q,y_n)+(1-\alpha_n)(1-\beta_n)D_{f^*}(q,y_n)\leqslant\\ &\alpha_nD_{f^*}(q,\nabla f(u))+(1-\alpha_n)D_{f^*}(q,y_n),\end{aligned}$$

即

$$D_{f^*}(q,y_{n+1})\leq\alpha_nD_{f^*}(q,\nabla f(u))+(1-\alpha_n)D_{f^*}(q,y_n) \tag{6}$$

由式(4),(5)和 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 可得,当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}&D_{f^*}(q,y_n)-D_{f^*}(q,T^*y_n)=D_{f^*}(q,y_n)-D_{f^*}(q,y_{n+1})+D_{f^*}(q,y_{n+1})-\\ &D_{f^*}(q,T^*y_n)\leqslant D_{f^*}(q,y_n)-D_{f^*}(q,y_{n+1})+\alpha_n(D_{f^*}(q,\nabla f(u))-(1-\alpha_n)D_{f^*}(q,T^*y_n))\to0.\end{aligned}$$

事实上, T^* 是左 Bregman 强非扩张映射,所以

$$\lim_{n\to\infty}D_{f^*}(T^*y_n-y_n)=0.$$

于是根据引理 2.11 可得

$$\lim_{n\to\infty}\|T^*y_n-y_n\|=0 \tag{7}$$

因为 E^* 是自反的 Banach 空间序列, $\{y_{n+1}\}$ 是有界的,则存在子列 $\{y_{n_k+1}\}$ 使得

$$y_{n_k+1}\xrightarrow{\omega}y\in E^*,$$

$$\limsup_{n\to\infty}[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q]=\limsup_{n\to\infty}[\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n_k+1}-q] \tag{8}$$

由于 T^* 是左 Bregman 强非扩张映射 $F(T^*)=\hat{F}(T^*)$,根据式(7)、式(8)和引理 2.9,可得 $y\in F(T^*)=A'$ 且

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n+1}-q\rangle=\\ &\limsup_{n\to\infty}\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{n_k+1}-q\rangle=\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y-q\rangle\leq0\end{aligned} \tag{9}$$

由式(4)、式(9)和引理 2.15 可得，当 $n\to\infty$ 时，$D_{f^*}(q,y_n)\to 0$. 由引理 2.7，可得

$$y_n\to q=P_{A'}^{f^*}(\nabla f(u)).$$

所以

$$x_n=\nabla f(y_n)\to\nabla f^*(q)=p\in A,$$

即 $x_n\to p\in A$.

第二种情况：假设存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_i\}$，使得 $D_{f^*}(q,y_{n_i})<D_{f^*}(q,y_{n_i+1})$，$\forall i\in\mathbf{N}$ 成立. 则根据引理 2.16，存在一个递增序列 $\{m_k\}\subset\mathbf{N}$，使得 $m_k\to\infty$，且

$$D_{f^*}(q,y_{m_k})<D_{f^*}(q,y_{m_k+1}),$$

$$D_{f^*}(q,y_k)<D_{f^*}(q,y_{m_k+1}),\ \forall k\in\mathbf{N} \tag{10}$$

成立. 从而可得当 $m_k\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}&D_{f^*}(q,y_{m_k})-D_{f^*}(q,T^*y_{m_k})=\\&\quad D_{f^*}(q,y_{m_k})-D_{f^*}(q,y_{m_k+1})+\\&\quad D_{f^*}(q,y_{m_k+1})-D_{f^*}(q,T^*y_{m_k})\le\\&\quad D_{f^*}(q,y_{m_k})-D_{f^*}(q,y_{m_k+1})+\\&\quad \alpha_{m_k}(D_{f^*}(q,\nabla f(u))-\\&\quad D_{f^*}(q,T^*y_{m_k}))\to 0.\end{aligned}$$

所以当 $m_k\to\infty$ 时，

$$D_{f^*}(T^*y_{m_k},y_{m_k})\to 0.$$

于是，利用第一种情况中的讨论方法，得

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\\&\quad\nabla f^*(p'),y_{m_k+1}-p'\rangle\le 0\end{aligned} \tag{11}$$

由式(4)可得

$$\begin{aligned}&D_{f^*}(q,y_{m_k+1})\le(1-\alpha_{m_k})D_{f^*}(q,y_{m_k})+\\&\quad\alpha_{m_k}\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\\&\quad\nabla f^*(q),y_{m_k+1}-q\rangle\end{aligned} \tag{12}$$

对上式移项，并由式(10)、式(12)得

$$\begin{aligned}&\alpha_{m_k}D_{f^*}(q,y_{m_k})\le D_{f^*}(q,y_{m_k})-\\&\quad D_{f^*}(q,y_{m_k+1})+\alpha_{m_k}\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\\&\quad\nabla f^*(q),y_{m_k+1}-q\rangle\le\\&\quad\alpha_{m_k}\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\nabla f^*(q),y_{m_k+1}-q\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\alpha_{m_k}>0$. 所以

$$\begin{aligned}&D_{f^*}(q,y_{m_k})\le\langle\nabla f^*(\nabla f(u))-\\&\quad\nabla f^*(q),y_{m_k+1}-q\rangle.\end{aligned}$$

由式(11)可得 $D_{f^*}(q,y_{m_k})\to 0$. 所以由式(12)可知，当 $k\to\infty$ 时，$D_{f^*}(q,y_{m_k+1})\to 0$. 根据 $D_{f^*}(q,y_{m_k})<D_{f^*}(q,y_{m_k+1})$，$\forall k\in\mathbf{N}$ 可知当 $k\to\infty$ 时 $D_{f^*}(q,y_{m_k})\to 0$. 由引理 2.11 得 $y_k\to q$ 且 $x_k=\nabla f^*(y_k)\to p=\nabla f^*(q)\in A$. 即 $x_n\to p\in A$. 定理证毕.

假设 T 是一个右 Bregman 强非扩张映射，根据定理 3.1 可得如下推论：

推论 3.2　设 E 是实自反 Banach 空间，f 在 E 的有界子集上是有界的、一致 Frechet 可微的和全局凸的，$domf^*=E^*$，C 是 $\mathrm{int}(domf)$ 的非空闭凸子集，$T_{\mathrm{i}}:C\to C$ 是右 Bregman 强非扩张映射且 $F(T)=\hat{F}(T)\neq\varnothing$. 令 $u,x_1\in C$. $\{x_n\}$ 由下列算法产生：

$$x_{n+1}=a_nu+(1-a_n)(\beta_nx_n+(1-\beta_n)Tx_n),$$

其中 $\{a_n\}\subset(0,1)$，$\{\beta_n\}\subset(0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\le\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$，则 $\{x_n\}$ 强收敛于点 $p\in F(T)$.

假设 $T_i(i=1,2,\ldots,N)$ 均为右 Bregman 稳定非扩张映射，则 $T=T_N,T_{N-1},\ldots,T_1$ 为右 Bregman 稳定非扩张映射，且[9]

$$F(T)=\hat{F}(T)=\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i).$$

因此，T 为右 Bregman 强非扩张映射，根据定理 3.1 可得：

定理 3.3　设 E 是实自反 Banach 空间，f 在 E 的有界子集上是有界的、一致 Frechet 可微的和全局凸的，$domf^*=E^*$，C 是 $\mathrm{int}(domf)$ 的非空闭凸子集，$T_i:C\to C$ 是有限族右 Bregman 稳定非扩张映射，其中 $i=1,2,\ldots,N$. 假设 $A:\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)$ 非空，其中 $u,x_1\in C$，$\{x_n\}$ 由下列算法产生：

$$x_{n+1}=a_nu+(1-a_n)(\beta_nx_n+(1-\beta_n)Tx_n),$$

其中 $T=T_N,T_{N-1},\ldots,T_1$，$\{a_n\}\subset(0,1)$，$\{\beta_n\}\subset(0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\le\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$，则 $\{x_n\}$ 强收敛于点 $p\in A$.

4　应　用

近年来，许多学者对极大单调算子的零点问题做了大量的研究工作[16-18]. 设 $A:E\to 2^{E^*}$ 是一个极大单调算子. 下面将利用 Mamn - Halpern 型迭代算法来求解有限族极大单调算子的零点问题.

定理 4.1　设函数 $f:E\to\mathbf{R}$ 满足 $domf^*=E^*$，f^* 在 E^* 的有界子集上是一致 Frechet 可微的、全局凸的，设 $A_i:E\to 2^{E^*}$ 为极大单调算子，且 $H:\bigcap\limits_{i=1}^{N}A_i^{-1}(0^*)\neq\varnothing$，对任意的 $u,x_1\in C$，序列 $\{x_n\}$ 由下列算法产生：

$$x_{n+1}=a_nu+(1-a_n)(\beta_nx_n+(1-\beta_n)Tx_n),$$

其中 $T=\mathrm{CRes}_{A_N}^f\cdot\mathrm{CRes}_{A_{N-1}}^f\cdots\mathrm{CRes}_{A_1}^f$，序列 $\{a_n\}$，

$\{\beta_n\}$满足下列条件：

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \{\beta_n\} \subset (0,1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty,$$

$$0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \liminf_{n\to\infty}\beta_n < 1,$$

则 $\{x_n\}$ 强收敛于点 $q \in F(T) = \bigcap_{i=1}^{N} F(CRes_{A_i}^f)$，且 $\nabla f^*(q) = p \in H$.

证明 令 $T_i = CRes_{A_i}^f$，且 $T_i : E^* \to E^*$. 由注 2 和引理 2.7 可知，T_i 是右 Bregman 强非扩张映射，且 $\bigcap_{i=1}^{N} F(CRes_{A_i}^f) = \bigcap_{i=1}^{N} \nabla f(A_i^{-1}(0^*)) = \nabla f(H) \neq \varnothing$. 由引理 2.13 可知，$T$ 为右 Bregman 强非扩张映射. 类似了定理 3.11 的证明方法，定理的结论便可得证.

参考文献：

[1] Bregman L M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming [J]. USSR Comp Math Phys+, 1967, 73: 200.

[2] Reich S, Sabach S. Two strong convergence theorems for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2010, 73: 122.

[3] Martin-Marquez V, Reich S, Sabach S. Right Bregman nonexpansive operators in Banach spaces [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2012, 75: 5448.

[4] Bauschke H H, Borwein J M, Ccmbettes P L. Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces[J]. Commun Contemp Math, 2001, 3: 615.

[5] 朱胜，黄建华，万丙晟. Bregman 弱相对非扩张映象与均衡问题的强收敛定理[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016, 53: 471..

[6] Censor Y, Lent A. An iterative row-action method for interval convex programming [J]. J Optim Theory App, 1981, 34: 321.

[7] 沈金良，朱胜，黄建华. 可数族 Bregman 全局拟渐进非扩张映射的均衡问题和强收敛定理[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017, 54: 261.

[8] Naraghirad E, Yao J C. Bregman weak relatively nonexpansive mappings in Banach spaces [J]. Fixed Point Theory A, 2013, 2013: 1.

[9] Reich S, Sabach S. Existence and approximation of fixed points of Bregman firmly nonexpansive mappings in reflexive Banach spaces[M]. New York: Springer, 2011.

[10] He Z H, Du W S, Nonlinear algorithms approach to split common solution problems[J]. Fixed Point Theory A, 2012, 2012: 130.

[11] Du W S, He Z H. Feasible iterative algorithms for split common solution problems[J]. J Nonlinear Convex A, 2015, 16: 697.

[12] Phelps R R. Convex functions, monotone operators and differentiability [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[13] Martím-Márquez V, Reich S, Sabach S. Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2013, 400: 597.

[14] Xu H K. Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings[J]. B Aust Math Soc, 2002, 65: 109.

[15] Maingé P E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization [J]. Set-Valued Var Anal 2008, 16: 899.

[16] Reich S. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 1980, 75: 287.

[17] Bauschke H H, Borwein J M, Combettes P L. Bregman monotone optimization algorithms[J]. SIAM J Control Optim, 2003, 42: 596.

[18] Shahzad N, Zegeye H, Alotaibi A. Convergence results for a common solution of a finite family of variational inequality problems for monotone mappings with Bregman distance function [J]. Fixed Point Theory A, 2013, 2013: 1.