2019 年 1 月　　四川大学学报(自然科学版)　　Jan. 2019
第 56 卷　第 1 期　　Journal of Sichuan University (Natural Science Edition)　　Vol. 56　No. 1

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.01.007

SWR 算法在期权定价中的应用

何　光[1,2]，龙宪军[1]

(1. 重庆工商大学数学与统计学院，重庆 400067；2. 重庆工商大学长江上游经济研究中心，重庆 400067)

摘　要：本文首先借鉴 Schwarz 波形松弛算法求解热传导方程的思路分析了 SWR 算法在欧式期权定价问题中的可行性，然后将欧式看涨期权定价问题转换为一类热传导方程的初-边值问题，通过 Schwarz 迭代方法获得了相应的误差方程，进而给出了算法误差的收敛性结果及算法的流程. 数值实验表明，与经典的欧式期权定价公式相比，本算法具有更好的估计效果.

关键词：Schwarz 波形松弛算法；热传导方程；期权定价

中图分类号：O29　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)01-0025-04

Application of SWR algorithm in option pricing

HE Guang[1,2], *LONG Xian-Jun*[1]

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. Research Center for Economy of Upper Reaches of the Yangtze River, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, inspired by the idea of solving heat conduction equation by means of Schwarz waveform relaxation algorithm, we analyze the feasibility of applying SWR algotithm in European option pricing. After transforming European call option pricing into a class of initial boundary value problems for heat conduction equation, error functions are obtained with Schwarz iterative method. Then the convergence result of algorithm error and the flow diagrams of algorithm are given. It is showed by a numerical experiment that this algorithm has better estimation effect compared with the classical European option pricing formula.

Keywords: Schwarz waveform relaxation algorithm; Heat conduction equation; Option pricing

1　引　言

Schwarz 波形松弛算法(Schwarz waveform relaxation algorithm,简记为 SWR 算法)是一类处理进化问题的并行算法. 1997 年,Gander 和 Zhao[1]引入 SWR 算法,研究了并行环境中具有低速信息链的进化问题. 在计算中,该算法将空间分割为相互重叠的子域,然后在每个子域上迭代地求解具有时间依赖的方程. 因此,该方法融合了经典的 Schwarz 方法和波形松弛方法的计算思想.

在用波形松弛方法求解常微分方程时存在两类经典的收敛性结论. 其中,在无穷时间上的微分方程线性系统中,Burrage[2]、Jeltsch 和 Pohl[3]分析了在一些分割耗散假设下算法的线性收敛性. 在有限时间上的非线性系统中,Bellen 和 Zennaro[4]、BjÁrhus[5]分别讨论了在分割函数上 Lipschitz 条件成立时的超线性收敛性；Gander 和 Stuart[6]则首次将复分割算法中的重叠思想与子

收稿日期：2017-10-20
基金项目：国家自然科学基金(11471059)；重庆市科委项目(cstc2016jcyjA0564)；重庆市教委项目(KJ1500631)；重庆工商大学博士科研启动项目(2015-56-08)；重庆工商大学青年项目(1552004)；重庆工商大学科研项目(17540003)
作者简介：何光(1981-)，男，汉族，博士，副教授，主要从事金融数学及优化算法的研究，E-mail：heguang6896@163.com

区域相交的理念结合起来,得到了相交的 SWR 算法,成功应用于一维的热传导方程中.

随着 SWR 算法的提出,很多学者对其展开了深入研究. 其中,Gander 和 Halpern[7],Bennequin 等[8]先后运用该算法对线性反应扩散问题进行了分析;Gander [9]在处理具有非线性反应形式的反应扩散方程中考虑了带重叠分割的 SWR 算法;Martin[10],Bouajaji 等[11]则分别讨论了优化 SWR 算法在带黏性的浅水方程和 Maxwell 方程中的应用.

本文考虑、SWR 算法在期权定价中的应用. 尽管欧式期权定价有规范的解析表达式,然而由于模型的假设条件在实际运用中很难满足,数值方法显得更为直接和有效. 鉴于欧式期权定价公式本质上是一个热传导方程,受到 SWR 算法求解偏微分方程数值解的启发,我们提出了一种有效获得欧式期权定价的数值算法.

2 问题阐述

1973 年,Black 和 Scholes 建立了欧式看涨期权的定价公式,从而将所有投资者带入一个以无风险利率为回报率的风险中性的世界. 用来描述期权价格变化的偏微分方程为:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{1}$$

其中 V 为期权价格,S 为股票价格,r 和 σ 分别表示无风险利率和波动率.

为确定在有效期$[0,T]$内的期权价值,需考虑区域 $\Omega=[0,\infty)\times[0,T]$上的偏微分方程定解问题. 这里主要研究看涨期权价格,于是在方程(1)中加上终值条件:

$$V(S,T)=(S-K)^+,$$

其中 K 为敲定价格. 然后,通过代换:$x=\ln S$,$\tau=T-t$ 可将以上定解问题化为常系数抛物型方程的初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \tau}-\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-(r-\dfrac{\sigma^2}{2})\dfrac{\partial V}{\partial x}+rV=0\\ V|_{\tau=0}=(e^x-K)^+\end{cases} \tag{2}$$

对(2)式作函数转换可得

$$V=u\mathrm{e}^{\alpha\tau+\beta x} \tag{3}$$

其中

$$\alpha=-r-\frac{1}{2\sigma^2}(r-\frac{\sigma^2}{2})^2,\beta=\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}.$$

于是(2)式可转为以下热传导方程的初值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,u|_{\tau=0}=\mathrm{e}^{-\beta x}(e^x-K)^+ \tag{I}$$

进一步地,可将(I)化为以下初-边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\sigma^2}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},0\le x<\infty,0\le t\le T,\\ u(0,t)=u^*(0,t),0\le t\le T,\\ u(\infty,t)=u^*(\infty,t),0\le t\le T,\\ u(x,0)=\mathrm{e}^{-\beta x}(\mathrm{e}^x-K)^+,0\le x<\infty\end{cases} \tag{II}$$

其中 u^* 为(I)的解析解. 然后,通过半离散情况下的 SWR 算法可以寻找(II)的数值结果,进而可得到欧式看涨期权的估计值.

3 算 法

在区域 $\Omega=[0,L]\times[0,\infty)$上考虑问题(II)的一般性结构:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=h^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},0\le x\le L,t>0,\\ u(0,t)=g_1(t),t>0,\\ u(L,t)=g_2(t),t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),0\le x\le L\end{cases} \tag{III}$$

运用二阶中心差分形式,在$[0,L]$中插入 n 个等分点,其中步长 $\Delta x=\dfrac{L}{n+1}$,问题(III)可化为线性微分方程系统

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}=\boldsymbol{A}_{(n)}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{U}(0)=\boldsymbol{U}_0 \tag{IV}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{(n)}$ 表示 $n\times n$ 的矩阵,$\boldsymbol{F}(t)$表示向量值函数,$\boldsymbol{U}_0$ 表示向量.

现将区域 Ω 划分为两个相交的子区域 $\Omega_1=[0,\beta L]\times[0,\infty)$和 $\Omega_2=[\alpha L,L]\times[0,\infty)$. 假定 αL 和 βL 分别落点在分割点 $i=a$ 和 $i=b$ 上,即 $a\Delta x=\alpha L$,$b\Delta x=\beta L$. 问题(IV)的解可通过 Ω_1 和 Ω_2 上的解 $V_1(t)$和 $V_2(t)$获得. 应用 Schwarz 迭代可得到 $V_1(t)$和 $V_2(t)$的迭代解 $V_1^k(t)$和 $V_2^k(t)$.

接着考虑误差 $D_1^k(t)=V_1^k(t)-V_1(t)$和 $D_2^k(t)=V_2^k(t)-V_2(t)$的收敛性. 定义 $L^\infty:=L^\infty(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$中所有函数的范数为

$$\|f(\cdot)\|_\infty:=\sup_{t>0}|f(t)|.$$

定义 $L^\infty([a,b],L^\infty)$ 上任一函数 $g(\cdot,t)$ 的范数为

$$\|g(\cdot,\cdot)\|_{\infty,\infty}:=\sup_{a\le x\le b}\|g(x,\cdot)\|_\infty.$$

定理 3.1 在具有两个子域的半离散热传导方程中,Schwarz 迭代按如下速度线性收敛:

$$\| D_1^{2k+1}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,\infty} \leq \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^k \| D_2^0(b-a,\cdot)\|_\infty,\ \| D_2^{2k+1}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,\infty} \leq \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^k \| D_1^0(a,\cdot)\|_\infty.$$

证明　由文献[6]中推论2.6知

$$\| D_1^{k+2}(j,\cdot)\|_\infty \leq \frac{j}{b}\| D_2^{k+1}(b-a,\cdot)\|_\infty, 1\leq j\leq b,\ \| D_2^{k+1}(j,\cdot)\|_\infty \leq \frac{n+1-a-j}{n+1-a}\| D_1^k(a,\cdot)\|_\infty, 1\leq j\leq b-a \tag{4}$$

$$\| D_2^{k+2}(j,\cdot)\|_\infty \leq \frac{n+1-a-j}{n+1-a}\| D_1^{k+1}(a,\cdot)\|_\infty, 1\leq j\leq b-a,\ \| D_1^{k+1}(j,\cdot)\|_\infty \leq \frac{j}{b}\| D_2^k(b-a,\cdot)\|_\infty, 1\leq j\leq b \tag{5}$$

在式(4)的两不等式中分别取 $j=a$ 和 $j=b-a$ 有

$$\| D_1^{k+2}(a,\cdot)\|_\infty \leq \frac{a(n+1-b)}{b(n+1-a)}\| D_1^k(a,\cdot)\|_\infty \tag{6}$$

在(5)的两不等式中分别取 $j=b-a$ 和 $j=a$ 有

$$\| D_2^{k+2}(b-a,\cdot)\|_\infty \leq \frac{a(n+1-b)}{b(n+1-a)}\| D_2^k(b-a,\cdot)\|_\infty \tag{7}$$

根据 $a\Delta x=\alpha L, b\Delta x=\beta L, (n+1)\Delta x=L$，(6)和(7)两式可化为

$$\| D_1^{k+2}(a,\cdot)\|_\infty \leq \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\| D_1^k(a,\cdot)\|_\infty,\quad \| D_2^{k+2}(b-a,\cdot)\|_\infty \leq \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\| D_2^k(b-a,\cdot)\|_\infty \tag{8}$$

进而由文献[6]推论2.6可知

$$\| D_1^{2k+1}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,\infty} \leq \| D_2^{2k}(b-a,\cdot)\|_\infty,\quad \| D_2^{2k+1}(\cdot,\cdot)\|_{\infty,\infty} \leq \| D_1^{2k}(a,\cdot)\|_\infty \tag{9}$$

结合(8)和(9)可得到结论. 证毕.

相应的算法流程如下：

第一步，确定欧式期权中的相关参数，即利率、波动率、敲定价格、标的价格的范围等；

第二步，设定SWR算法中相交区域的两个参数，并运用半离散下的SWR算法求问题(II)的数值解；

第三步，将第二步求得的数值解代入到(3)式中，获得期权的估计值.

4　数值实验

参考文献[12]中的期权数据，本文将实验参数设置为：敲定价格为100美元，无风险利率为0.05，波动率为0.3665.

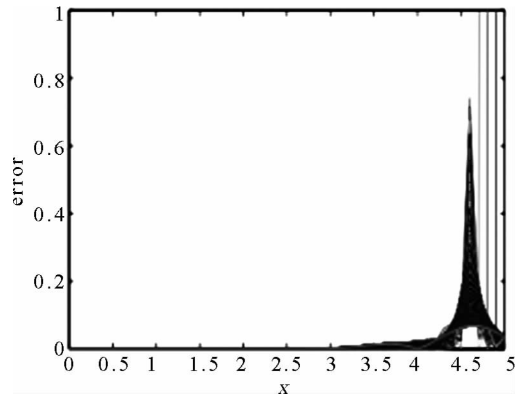

图1　不同股票价格下的误差
Fig. 1　The error of different stock prices

运用SWR算法计算问题(II)的数值解，其中 $\Delta x=0.1$，$\Delta t=0.01$，$0\leq t\leq 2$，选择股票价格范围 $1\leq S\leq 2981$，子区域相交参数 $\alpha=0.4$，$\beta=0.6$. 图1展示了不同股票价格下欧式看涨期权的估计误差情况. 在 $x<4.6$，即股票价格 $S<100$ 时，数值估计效果不错，具有较好的实用价值.

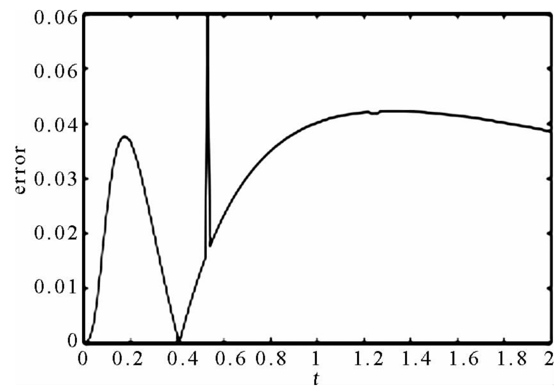

图2　固定股票价格时的误差
Fig. 2　The error of fixed stock price

为了与文献[12]中的结果对比，固定股价 $S=74.6$ 美元，时间间隔 $T-t=1.65$. 在图2中，期权价格随时间增加波动较大，随后逐渐稳定并缓慢下降，当 $t=1.65$ 时的估计效果较好. 于是选择 $t=1.65$ 的估计值与现有结果对比. 已知欧式看涨期权的真实价格为8.25美元，Black-Scholes公式计算的结果为8.37美元，相对误差为1.45%. 而

SWR算法计算的结果为8.19美元,相对误差为0.73%,估计效果明显优于欧式期权定价公式直接计算的值.

参考文献:

[1] Gander M J, Zhao H, Overlapping Schwarz waveform relaxation for parabolic problems in higher dimension [J]. Proceedings of Algorithm, 1997, 14: 42.

[2] Burrage K, Parallel and sequential methods for ordinary differential equations [M]. New York: Clarendon Press, 1995.

[3] Jeltsch R, Pohl B, Waveform relaxation with overlapping splittings [J]. SIAM J Sci Comput, 1995, 16: 40.

[4] BellenA, Zennaro B, The use of Runge-Kutta formulae in waveform relaxation methods [J]. Appl Numer Math, 1993, 11: 95.

[5] BjÁrhus M, A note on the convergence of discretized dynamic iteration [J]. BIT Numer Math, 1995, 35: 291.

[6] Gander M J, Stuart A M, Space-time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation [J]. SIAM J Sci Comput, 1998, 19: 2014.

[7] Gander M J, Halpern L, Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems [J]. SIAM J Numer Anal, 2007, 45: 666.

[8] Bennequin D, Gander M J, Halpern L, A homographic best approximation problem with application to optimized Schwarz waveform relaxation [J]. Math Comput, 2009, 78: 185.

[9] Gander M J, A waveform relaxation algorithm with overlapping splitting for reaction diffusion equations [J]. Numer Linear Algebra Appl, 1999, 6: 125.

[10] MartinV, Schwarz waveform relaxation algorithms for the linear viscous equatorial shallow water equations [J]. SIAM J Sci Comput, 2009, 31: 3595.

[11] Bouajaji M E, Dolean V, Gander M J, et al. Optimized Schwarz methods for the time-harmonic Maxwell equations with damping [J]. SIAM J Sci Comput, 2012, 34: A2048.

[12] Stampfli J, Goodman V, The mathematics of finance: modeling and hedging [M]. Providence: American Mathematical Society, 2001.

引用本文格式:

中 文:何光,龙宪军. SWR算法在期权定价中的应用[J]. 四川大学学报:自然科学版, 2019, 56: 25.

英 文:He G, Long X J. Application of SWR algorithm in option pricing [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 25.