doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.06.002

Rosenau-KdV-RLW 方程的三层线性化差分格式

李佳佳，张　虹，王　希，胡劲松
(西华大学理学院，成都 610039)

摘　要：本文对带有齐次边界条件的 Rosenau-KdV-RLW 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个具有二阶理论精度的三层线性化差分格式，证明了差分解的存在唯一性. 尽管无法得到差分解的最大模估计，本文仍然综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法证明了该格式的收敛性和稳定性. 数值实验表明该方法是可靠的.

关键词：Rosenau-KdV-RLW 方程；线性化差分格式；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)06-1137-04

A three-level linearized difference scheme for Rosenau-KdV-RLW equation

LI Jia-Jia, *ZHANG Hong*, *WANG Xi*, *HU Jin-Song*
(School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, numerical solution of the initial-boundary value problem for the Rosenau-KdV-RLW equation under homogeneous boundary is considered. A three-level linear difference scheme with second order accuracy is proposed and the existence and uniqueness of the difference solution are proved. Despite the absence of the maximum mold estimation of the difference solutions, we still prove that the difference scheme is convergent and stable by using the methods of mathematical induction and discrete function analysis. The analytical results are demonstrated by the numerical examples.

Keywords: Rosenau-KdV-RLW equation; Linearized difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

本文考虑如下 Rosenau-KdV-RLW 方程[1-4]的初边值问题：

$$u_t-u_{xxt}+u_{xxxxt}+u_x+u_{xxx}+uu_x=0,\quad x\in(x_L,x_R),t\in(0,T] \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in[x_L,x_R] \tag{2}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,\quad u_{xx}(x_L,t)=u_{xx}(x_R,t)=0,t\in[0,T], \tag{3}$$

其中 $u_0(x)$ 是一个已知的光滑函数. 方程(1)是 Rosenau-KdV 方程[5]和 Rosenau-RLW 方程[6,7]的推广. 因其能够描述大量物理现象，该方程在许多工程物理领域(如流体力学、等离子物理学等)有广泛应用[5-11]. 而且，由于这些方程都少有解析解，所以研究其数值解就很有理论价值和应用价值.

由于非线性差分格式在计算过程中不可避免地需要迭代，需要耗费大量的计算时间，所以构造线性化的差分格式是数值研究领域中的一件有意义的工作. 文献[8,9]对方程(1)时进行了数值研究，分别提出了拟紧致线性格式和加权线性格式. 文献[10,11]又进一步对方程(1)的广义形式进行了数值研究. 本文对问题(1)～(3)提出一个新的具

收稿日期：2017-10-25
基金项目：四川省教育厅重点科研基金(16ZA0167)；西华大学重点科研基金(Z1513324)；西华大学研究生创新基金(ycjj2018048)
作者简介：李佳佳(1992－)，女，山西广灵人，主要研究方向为微分方程数值解.
通讯作者：胡劲松. E-mail：hjs888hjs@163.com

有二阶理论精度的三层线性化差分格式. 在不能得到其差分解的最大模估计的情况下,我们综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法直接证明了该格式的收敛性和稳定性,并给出了数值算例.

2 差分格式及其可解性

对区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$作网格剖分:取空间步长 $h=\dfrac{x_L-x_R}{J}$,时间步长为 τ,$x_j=x_L+jh$ $(0\leqslant j\leqslant J)$,$t_n=n\tau(n=0,1,2,\cdots,N,N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$,$U_j^n\approx u(x_j,t_n)$和 $Z_h^0=\{U=(U_j)\,|\,U_{-1}=U_0=U_J=U_{J+1}=0,j=-1,0,\cdots,J,J+1\}$. 用$C$表示与$\tau$和$h$无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值),并定义如下记号:

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},(U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$

$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},(U_j^n)_t=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau},$$

$$U_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},\langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,$$

$$\|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,\ \|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|.$$

于是可对问题(1)~(3)考虑如下有限差分格式:

$$(U_j^n)_t-(U_j^n)_{x\bar{x}t}+(U_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}}+\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=0 \tag{4}$$

$$U_j^0=u_0(x_j),j=1,2,\cdots,J \tag{5}$$

$$U^n\in Z_h^0,(U_0^n)_{x\bar{x}}=(U_J^n)_{x\bar{x}}=0,\quad n=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

定理 2.1 若时间步长 τ 充分小,则差分格式(4)~(6)是唯一可解的.

证明 数学归纳法. 显然,U^0 是由初值条件(5)式唯一确定的. 用两层差分格式[11]可计算出U^1(即U^0 和U^1 是被唯一确定的).

假设$U^n(n\leqslant N-1)$是唯一可解的. 则

$$\|U^{n-1}\|_\infty\leqslant C,\ \|U^n\|_\infty\leqslant C \tag{7}$$

考虑方程(4)式中的U^{n+1},有

$$\frac{1}{\tau}U_j^{n+1}-\frac{1}{\tau}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}}+\frac{1}{\tau}(U_j^{n+1})_{xx\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}\hat{x}}+\left(\frac{3}{4}U_j^n-\frac{1}{4}U_j^{n-1}\right)(U_j^{n+1})_{\hat{x}}=0 \tag{8}$$

将(8)式与U^{n+1}作内积,由(6)、(7)式和分部求和公式[12]有

$$\frac{1}{\tau}\|U^{n+1}\|^2+\frac{1}{\tau}\|U_x^{n+1}\|^2+\frac{1}{\tau}\|U_{xx}^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle+\frac{1}{2}\langle U_{x\bar{x}\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=-h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{4}U_j^n-\frac{1}{4}U_j^{n-1}\right)(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}\leqslant C(\|U_x^{n+1}\|^2+\|U^{n+1}\|^2) \tag{9}$$

又

$$\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0,\langle U_{x\bar{x}\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0 \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式,整理有

$$(1-C\tau)\|U^{n+1}\|^2+(1-C\tau)\|U_x^{n+1}\|^2+\|U_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant 0.$$

于是,只要取τ足够小,使得当$1-C\tau>0$时方程组(8)仅有零解,从而差分格式(4)~(6)中的U_j^{n+1}是唯一可解的.

3 差分格式收敛性和稳定性

差分格式(4)~(6)的截断误差定义如下:

$$r_j^n=(u_j^n)_t-(u_j^n)_{x\bar{x}t}+(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}}+\left(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} \tag{11}$$

由 Taylor 展开可知,当 $h,\tau\to 0$ 时,

$$|r_j^n|=O(\tau^2+h^2) \tag{12}$$

引理 3.1[11] 设 $u_0\in H^2$. 则初边值问题(1)~(3)的解满足

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\ \|u_{xx}\|_{L_2}\leqslant C,$$
$$\|u\|_{L_\infty}\leqslant C,\ \|u_x\|_{L_\infty}\leqslant C.$$

定理 3.2 设 $u_0\in H^2$. 若时间步长 τ 和空间步长h充分小. 则差分格式(4)~(6)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$收敛到初边值问题(1)~(3)的解,且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

证明 数学归纳法. 记 $e_j^n=u_j^n-U_j^n$. (11)式减去(4)式有

$$r_j^n=(e_j^n)_t-(e_j^n)_{x\bar{x}t}+(e_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}t}+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\hat{x}}+\left(\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} \tag{13}$$

由引理 3.1 以及(12)式知,存在与τ和h无关的常数C_u和C_r,使得

$$\|u^n\|_\infty\leqslant C_u,$$
$$\|r^n\|_\infty\leqslant C_r(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N \tag{14}$$

由初始条件(5)可得到以下估计式:

$$\|e^0\|=0,\|U^0\|_\infty\leqslant C_u \tag{15}$$

再用具有二阶精度的两层差分格式[11]先计算 U^1

即可得到以下估计式:

$$\|e^1\|+\|e_x^1\|+\|e_{xx}^1\|\leqslant C_1(\tau^2+h^2) \quad (16)$$

这里 C_1 为与 τ 和 h 无关的常数. 现在假设

$$\|e^l\|+\|e_x^l\|+\|e_{xx}^l\|\leqslant C_l(\tau^2+h^2),\quad l=2,3,\cdots,n(n\leqslant N-1) \quad (17)$$

其中 C_l 为与 τ 和 h 无关的常数. 则由离散 Sobolev 不等式[12]和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\|e^l\|_\infty\leqslant C_0\sqrt{\|e^l\|}\sqrt{\|e_x^l\|+\|e^l\|}\leqslant \frac{1}{2}C_0(2\|e^l\|+\|e_x^l\|)\leqslant \frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^2),l=1,2,\cdots,n \quad (18)$$

$$\|U^l\|_\infty\leqslant\|u^l\|_\infty+\|e^l\|_\infty\leqslant C_u+\frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^2),l=1,2,\cdots,n \quad (19)$$

将(13)式两端与 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积,由分部积分和公式[12]并注意到

$$\langle e_x^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,\langle e_{xxx}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0,$$

整理得

$$\frac{1}{2}\|e^n\|_t^2+\frac{1}{2}\|e_x^n\|_t^2+\frac{1}{2}\|e_{xx}^n\|_t^2=\langle r^n,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle -h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{2}e_j^n-\frac{1}{2}e_j^{n-1}\right)(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}} -h\sum_{j=1}^{J-1}\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (20)$$

由引理 3.1 以及微分中值定理有

$$(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=\frac{u(x_{j+1},\frac{t_n+t_{n+1}}{2})-u(x_{j-1},\frac{t_n+t_{n+1}}{2})}{2h}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_{\xi_j}\frac{t_n+t_{n+1}}{2}),x_{j-1}\leqslant\xi_j\leqslant x_{j+1},$$

即

$$\|u_x^{n+\frac{1}{2}}\|_\infty\leqslant C_u \quad (21)$$

再取 τ 和 h 充分小,使

$$\frac{3}{2}C_0(\max_{0\leqslant l\leqslant n}C_l)(\tau^2+h^2)\leqslant 1 \quad (22)$$

于是由(19)、(21)式和(22)式及 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}e_j^n-\frac{1}{2}e_j^{n-1}](u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}\leqslant \frac{1}{2}C_uh\sum_{j=1}^{J-1}[3|e_j^n|+|e_j^{n-1}|]|e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant \frac{1}{4}C_u[\|e^{n+1}\|^2+4\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2] \quad (23)$$

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}](e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}\leqslant \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[3|U_j^n|+|U_j^{n-1}|]\cdot|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant 2\left[C_u+\frac{3}{2}C_0\max(C_{n-1},C_n)(\tau^2+h^2)\right]\cdot h\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant \frac{1}{2}(C_u+1)[\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2] \quad (24)$$

$$\langle r^n,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle\leqslant\frac{1}{2}\|r^n\|^2+\frac{1}{4}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2) \quad (25)$$

将(23)~(25)式代入(20)式,整理得

$$(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)+(\|e_{xx}^{n+1}\|^2-\|e_{xx}^n\|^2)\leqslant\tau\|r^n\|^2+3\tau\left(C_u+\frac{1}{2}\right)(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2) \quad (26)$$

将(26)式从 1 到 n 递推求和,并整理有

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant \|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2+\|e_{xx}^1\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2+\tau\sum_{k=0}^{n+1}9\left(C_u+\frac{1}{2}\right)(\|e^k\|^2+\|e_x^k\|^2+\|e_{xx}^k\|^2) \quad (27)$$

又

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|r^k\|^2\leqslant T(C_r)^2(\tau^2+h^2)^2 \quad (28)$$

将(16)、(28)式代入(27)式,利用离散 Gronwall 不等式[12],取时间步长 τ 充分小以满足

$$\tau<\frac{1}{18\left(C_u+\frac{1}{2}\right)},$$

则有

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant (T(C_r)^2+C_1^2)(\tau^2+h^2)^2e^{2T\left[9\left(C_u+\frac{1}{2}\right)\right]}\leqslant (C_{n+1})^2(\tau^2+h^2)^2,n=1,2,\cdots,N-1,$$

其中

$$C_{n+1}=(\sqrt{T}C_r+C_1)e^{9T\left(C_u+\frac{1}{2}\right)}.$$

显然 C_{n+1} 为与 n 无关的常数. 从而由归纳假设有

$$\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),\ \|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),\ \|e_{xx}^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N.$$

再由离散 Sobolev 不等式[12]有

$$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N.$$

最后,由(19)式知 $\|U^n\|_\infty\leqslant\widetilde{C}_0(n=1,2,\cdots,N)$,其

中 $\widetilde{C}_0$ 是与 τ 和 h 无关的常数. 从而表明差分格式(4)～(6)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 关于初值无条件稳定.

4 数值算例

方程(1)的单个孤波解[1]为

$$u(x,t)=\frac{35(313-13\sqrt{457})}{12(13\sqrt{457}-241)}\times \operatorname{sech}^4\left[\frac{\sqrt{2\sqrt{457}-26}}{24}\times\left(x-\frac{72}{13\sqrt{457}-241}t\right)\right].$$

在计算中取初值函数 $u_0(x)=u(x,0)$,固定 $x_L=-30$,$x_R=120$,$T=40$. τ 和 h 的不同取值对数值解和孤波解在几个不同时刻的误差见表1.

从数值算例可以看出,本文对初边值问题(1)～(3)提出的差分格式(4)～(6)是有效的. 由于该差分格式是线性的,数值求解时不需要迭代,所以计算时间相对节约.

表1 数值解和孤波解在不同时刻的误差

Tab. 1 The error comparison between the numerical solution and the solitary wave solution at various time

	$\|e\|_\infty$			$\|e\|$		
t	$\tau=h=0.1$	τ=h=0.05	$\tau=h=0.025$	τ=h=0.1	$\tau=h=0.05$	τ=h=0.025
10	1.1813393e-2	2.7807028e-3	6.6973757e-4	2.9627607e-2	7.1101729e-3	1.7338253e-3
20	2.5006657e-2	5.6596413e-3	1.3293708e-3	6.4007765e-2	1.4737157e-2	3.5017749e-3
30	4.0071144e-2	8.7745623e-3	2.0148386e-3	1.0331631e-1	2.2969381e-2	5.3315803e-3
40	5.7019852e-2	1.2129119e-2	2.7270356e-3	1.4769714e-1	3.1845310e-2	7.2329010e-3

参考文献:

[1] Razborova P, Ahmed B, Biswas A. Solitons, shock waves and conservation laws of Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity [J]. Appl Math Comput, 2014, 8: 485.

[2] Razborova P, Kara A H, Biswas A. Additional conservation laws for Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity by lie symmetry [J]. Nonlinear Dynam, 2015, 79: 743.

[3] Sanchez P, Ebadi G., Mojaver A, *et al*. Solitons and other solutions to perturbed Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity [J]. Acta Phys Pol A, 2015, 127: 1577.

[4] Razborova P, Moraru L, Biswas A. Perturbation of dispersive shallow water waves with Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity [J]. Rom J Phys, 2014, 59: 658.

[5] Esfahani A. Solitary wave solutions for generalized Rosenau-KdV equation [J]. Commun Theor Phys, 2011, 55: 396.

[6] Pan X T, Zhang L M. On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation [J]. Appl Math Model, 2012, 36: 3371.

[7] 王婷婷, 卓茹, 黄妗彤, 胡劲松. 广义Rosenau-RLW方程的一个守恒差分逼近[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 268.

[8] Pan X T, Wang Y J, Zhang L M. Numerical analysis of a pseudo-compact C-N conservative scheme for the Rosenau-KdV equation coupling with the Rosenau-RLW equation [J]. Bound Value Probl, 2015: 65.

[9] Wongsaijai B, Poochinapan K. A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau-KdV equation and the Rosenau-RLW equationy[J]. Appl Math Comput, 2014, 245: 289.

[10] Ak T, Karakoc S B G, Biswas A. Numerical scheme to dispersive shallow water waves[J]. J Comput Theor Nanos, 2016, 13: 7084.

[11] 卓茹, 李佳佳, 黄妗彤, 胡劲松. 求解广义Rosenau-KdV-RLW方程的守恒差分格式[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 703.

[12] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing: International Academic publishers, 1991.

引用本文格式:

中 文: 李佳佳, 张虹, 王希, 等. Rosenau-KdV-RLW方程的三层线性化差分格式[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 1137.

英 文: Li J J, Zhang H, Wang X, *et al*. A three-level linearized difference scheme for Rosenau-KdV-RLW equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 1137.