doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2018.03.003

广义 Taft Hopf 代数的伴随表示

唐　帅
(泰州学院数理学院，泰州 225300)

摘　要：广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}$ 在伴随作用下为 $H_{n,d}$-模. 本文给出了该模的所有不可分解子模及其以不可分解子模为直和项的直和分解，并利用 $H_{n,d}$ 的伴随作用给出了 $H_{n,d}$ 的 Killing 型矩阵以及 Killing 根.

关键词：广义 Taft Hopf 代数；伴随表示；Killing 根
中图分类号：O153.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2018)03-0435-05

Adjoint representations of generalized Taft Hopf algebras

TANG Shuai
(Department of Mathematical Science, Taizhou College, Taizhou 225300, China)

Abstract: The generalized Taft Hopf algebra $H_{n,d}$ is an $H_{n,d}$-module under the adjoint actions. In this paper all submodules of such a module are presented, and a decomposition of such a module into indecomposable direct summands is given. Also, the adjoint actions of $H_{n,d}$ on itself are used to present the Killing matrix and the Killing radical of $H_{n,d}$.

Keywords: Generalized Taft Hopf algebra; Adjoint representation; Killing radical
(2010　MSC　15A04)

1　引　言

一般地，Hopf 代数的伴随表示与正则表示是两种完全不同的表示. 即使在半单条件下，这两种表示仍存在很大的差异. 比如，对交换半单 Hopf 代数而言，在同构意义下其伴随表示的单子模只有一个平凡表示，而正则表示的单子模的个数却等于 Hopf 代数的维数(特征为 0 的代数闭域情形). 在文献[1,2]中，作者在有限维 Hopf 代数上引入 Killing 型的定义，讨论了 Killing 型的一些性质，得到了有限维半单 Hopf 代数的 Killing 型根的刻划，并考虑了 Hopf 代数的伴随表示与 Killing 型非退化性质之间的关系：Hopf 代数的 Killing 型是非退化的当且仅当其伴随表示是半单的. 由此可知，只有在 Hopf 代数的 Killing 型非退化的条件下，Hopf 代数的正则表示的单模与伴随表示的单模之间才能一一对应.

我们知道，任意有限维 Hopf 代数，其正则表示总可以表示为不可分解子模的直和. 对于伴随表示而言，也有类似的子模直和分解. 本文针对具体的一类 Hopf 代数——广义 Taft Hopf 代数，研究了这类 Hopf 代数的伴随表示，给出了这类 Hopf 代数在伴随作用下的子模直和分解，同时利用伴随表示的结果给出了广义 Taft Hopf 代数的 Killing 型矩阵及其 Killing 根的具体描述. 结果表明广义 Taft Hopf 代数的 Killing 根包含(但不等于)Jacobson 根.

文中的基域 k 为特征 0 的代数闭域，有关 Hopf 代数的基本知识可参阅文献[3～5]，代数以及 Hopf 代数的表示理论可参阅文献[4～7]，这里

收稿日期：2017-10-28
基金项目：国家自然科学基金(11471282)；江苏省自然科学基金(BK20170589)
作者简介：唐帅(1973－)，男，江苏泰州人，副教授，主要研究方向为代数学. E-mail：tangshuaixs@163.com

不再赘言.

2　预备知识

设 H 是域 k 上有限维 Hopf 代数，H 上的余乘、余单位以及对极分别记为 Δ,ε 与 S. 对于 H 中任意元素 a，我们记 $\Delta(a)=\sum a_1\otimes a_2\in H\otimes H$. H 的伴随作用定义为

$$ad_a: H\to H, b\to\sum a_1 bS(a_2), \forall a,b\in H.$$

在此作用下，H 本身成为 H 上的表示. 该表示称为 H 的伴随表示. 类似于李理论，我们定义 Hopf 代数 H 的 Killing 型为

$$(a,b)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_a\circ\mathrm{ad}_b), \forall a,b\in H.$$

显然，该 Killing 型为 H 上的结合、对称双线性型. 令

$$H^\perp=\{a\in H\mid (a,h)=0, \forall h\in H\},$$

则 $H^\perp$ 称为该 Killing 型的根，简称为 H 的 Killing 根. 如果 $H^\perp=0$，该 Killing 型称为非退化的.

根据经典的李理论，有限维李代数上的 Killing 型是非退化的当且仅当该李代数是半单的. 这一结论对于 Hopf 代数上的 Killing 型而言不再成立. 一般地，Hopf 代数 H 的 Jacobson 根仅仅包含在 Killing 根中（参见文献[1]命题 2.3），因此 $H^\perp=0$ 时 H 为半单 Hopf 代数. 但是反之不对，事实上 H 为交换 Hopf 代数时，其 Killing 根为 $\mathrm{Ker}\varepsilon$（参见文献[1]命题 3.1).

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 Hopf 代数 H 的一组基，(i,j)-元为(x_i,x_j)的矩阵称为 H 的 Killing 型矩阵，记为 K. 显然 Killing 型矩阵 K 为对称矩阵. 注意到 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\in H^\perp$ 当且仅当 n 维列向量$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$ 为齐次线性方程组 $Kx=0$ 的解. 由此可知，$H^\perp=0$ 当且仅当 K 为可逆矩阵. 有关 Hopf 代数 Killing 根的相关结果参见文献[1,2,8].

广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}$ 是 Radford 引入的一类非交换、非余交换 Hopf 代数[9]. 当 $d=n$ 时，广义 Taft Hopf 代数即为 Taft Hopf 代数[10]. $H_{n,d}$ 作为代数是由 g 与 h 生成的并且满足关系式 $g^n=1, h^d=0, hg=qgh$，其中 $d\mid n$，q 为 d 次本原单位根. $H_{n,d}$ 作为 Hopf 代数，余乘法 Δ，余单位 ε 和对极 S 分别定义为：

$$\Delta(g)=g\otimes g, \varepsilon(g)=1, S(g)=g^{-1},$$
$$\Delta(h)=1\otimes h+h\otimes g, \varepsilon(h)=0,$$
$$S(h)=-q^{-1}g^{n-1}h.$$

注意到$\{g^ih^j\mid 0\leqslant i\leqslant n-1, 0\leqslant j\leqslant d-1\}$构成 $H_{n,d}$ 的一组基，因此 $\dim_k H_{n,d}=nd$. 当 $d=n=2$ 时，$H_{2,2}$ 就是 4 维 Sweedler Hopf 代数.

关于广义 Taft Hopf 代数上的不可分解模的研究最早可以追溯到 1993 年 Cibils 在文献[11]中所做的工作. 这里我们借助于文献[12,13]简要回顾一下 $H_{n,d}$ 上的所有有限维不可分解模.

记 $M(l,i)$ 为$\{v_0,v_1,\cdots,v_{l-1}\}$生成的 l 维向量空间，该向量空间为 $H_{n,d}$-模，模结构定义为

$$g.v_j=\omega^i q^{-j}v_j,$$

其中 $0\leqslant j\leqslant l-1$，单位根 ω 满足 $\omega^{\frac{n}{d}}=q$，

$$h.v_j=\begin{cases}v_{j+1}, & 0\leqslant j\leqslant l-2;\\ 0, & j=l-1.\end{cases}$$

根据文献[12]，集合$\{M(l,i)\mid 1\leqslant l\leqslant d, 0\leqslant i\leqslant n-1\}$构成同构意义下所有有限维不可分解 $H_{n,d}$-模. 进一步，$M(l,i)$ 为投射模当且仅当 $l=d$. 特别地，正则表示 $H_{n,d}$ 可以分解为不可分解模的直和：$H_{n,d}\cong\bigoplus_{i=0}^{n-1}M(d,i)$.

3　伴随表示

众所周知，$H_{n,d}$ 在伴随作用下可以分解为一些不可分解模的直和. 下面我们将研究 $H_{n,d}$ 的伴随表示，在伴随作用下给出 $H_{n,d}$ 的所有不可分解子模，并将 $H_{n,d}$ 表示为这些不可分解子模的直和.

首先我们需要如下符号：设 m 为正整数，令

$$(m)_q=\frac{q^m-1}{q-1},$$
$$(m)!_q=(1)_q(2)_q\cdots(m)_q,$$
$$\binom{m}{i}_q=\frac{(m)!_q}{(m-i)!_q(i)!_q},$$

其中 $0\leqslant i\leqslant m$ 并规定 $\binom{m}{0}_q=1=\binom{m}{m}_q$.

引理 3.1　对于 $H_{n,d}$ 的任意基元 g^ih^j 与 g^lh^m，我们有

(i) $\Delta(g^ih^j)=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}_q g^ih^t\otimes g^{i+t}h^{j-t}$.

(ii) $ad_{g^ih^j}g^lh^m=$

$$\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}_q(-1)^{j-t}q^{t-j-\frac{(j-t)(j-t-1)}{2}-(j-t)(i+t)-m(i+j)j+t(l-i-j)}\cdot g^{l-j}h^{m+j}.$$

证明　(i). 注意到 $(1\otimes h)(h\otimes g)=q(h\otimes g)(1\otimes h)$，根据文献[4]命题 IV.2.2，我们有

$$(1\otimes h+h\otimes g)^j=\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}_q h^t\otimes g^th^{j-t}.$$

因此

$$\Delta(g^i h^j) = (g^i \otimes g^i)(1 \otimes h + h \otimes g)^j =$$

$$\sum_{t=0}^{j} \binom{j}{t}_q g^i h^t \otimes g^{i+t} h^{j-t}.$$

(ii). 注意到 $h^j g^i = q^{ij} g^i h^j$ 且 $(g^{-1}h)^j = q^{-\frac{j(j-1)}{2}} g^{-j} h^j$，由伴随作用的定义，我们有

$$ad_{g^i h^j} g^l h^m = \sum_{t=0}^{j} \binom{j}{t}_q g^i h^t g^l h^m S(g^{i+t} h^{j-t}) =$$

$$\sum_{t=0}^{j} \binom{j}{t}_q (-1)^{j-t} q^{t-j-\frac{(j-t)(j-t-1)}{2}-(j-t)(i+t)-m(i+j)j+t(l-i-j)} g^{l-j} h^{m+j}.$$

证毕.

记 L_r 为元素 g^r 在伴随作用下生成的 $H_{n,d}$ 的子模，其中 $0 \leqslant r \leqslant n-1$. 作为向量空间，

$$L_r = \begin{cases} \mathrm{span}\{g^r, g^{r-1}h, g^{r-2}h^2, \cdots, h^r\}, \\ \qquad 0 \leqslant r \leqslant d-2, \\ \mathrm{span}\{g^r, g^{r-1}h, g^{r-2}h^2, \cdots, g^{r-d+1}h^{d-1}\}, \\ \qquad d-1 \leqslant r \leqslant n-1. \end{cases}$$

因此，

$$\dim_k L_r = \begin{cases} r+1, & 0 \leqslant r \leqslant d-2, \\ d, & d-1 \leqslant r \leqslant n-1. \end{cases}$$

记 N_s 为 $g^{n-1}h^s$ 在伴随作用下生成的 $H_{n,d}$ 的子模，其中 $1 \leqslant s \leqslant d-1$. 作为向量空间，

$$N_s = \mathrm{span}\{g^{n-1}h^s, g^{n-2}h^{s+1}, \cdots, g^{n+s-d}h^{d-1}\},$$

因此 $\dim_k N_s = d-s$.

命题 3.2　对于 L_r 与 N_s，有如下结果：

(i) 当 $0 \leqslant r \leqslant d-2$ 时，$L_r \cong M(r+1,0)$ 为 $H_{n,d}$-模同构；

(ii) 当 $d-1 \leqslant r \leqslant n-1$ 时，$L_r \cong M(d,0)$ 为 $H_{n,d}$-模同构；

(iii) 当 $1 \leqslant s \leqslant d-1$ 时，$N_s \cong M(d-s, \frac{n}{d}(n-s))$ 为 $H_{n,d}$-模同构.

证明　(i). 定义 L_r 到 $M(r+1,0)$ 的线性映射 φ 如下：

$$\varphi(g^r) = v_0, \varphi(g^{r-j}h^j) = \frac{q^{1+2+\cdots+j}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_j,$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant r$. 根据引理 3.1 (ii)，

$$\varphi(ad_g g^r) = \varphi(g^r) = v_0 = g.v_0 = g.\varphi(g^r),$$

$$\varphi(ad_g g^{r-j}h^j) = \varphi(q^{-j} g^{r-j} h^j) =$$

$$\frac{q^{1+2+\cdots+(j-1)}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_j =$$

$$g \cdot \frac{q^{1+2+\cdots+j}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_j =$$

$$g \cdot \varphi(g^{r-j}h^j),$$

而且

$$\varphi(ad_h g^r) = \varphi(q^{-1}(q^r-1)g^{r-1}h) =$$

$$v_1 = h.v_0 = h.\varphi(g^r),$$

$$\varphi(ad_h g^{r-j}h^j) =$$

$$\varphi(q^{-1-j}(q^{r-j}-1)g^{r-j-1}h^{j+1}) =$$

$$\frac{q^{1+2+\cdots+j}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_{j+1} =$$

$$h \cdot \frac{q^{1+2+\cdots+j}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_j =$$

$$h \cdot \varphi(g^{r-j}h^j).$$

综上所述，映射 φ 为 $H_{n,d}$-模同构.

(ii). 定义 L_r 到 $M(d,0)$ 的线性映射 β 如下：

$$\beta(g^r) = v_0, \beta(g^{r-j}h^j) = \frac{q^{1+2+\cdots+j}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_j,$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant d-1$. 类似于(i)的证明，映射 β 为 $H_{n,d}$-模同构.

(iii). 定义 N_s 到 $M(d-s, \frac{n}{d}(n-s))$ 的线性映射 φ 如下：

$$\varphi(g^r) = v_0, \varphi(g^{r-j}h^j) = \frac{q^{1+2+\cdots+j}}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q^{r-j+1}-1)} v_j,$$

其中 $1 \leqslant j \leqslant d-s-1$. 类似于(i)的证明，$\varphi$ 为 $H_{n,d}$-模同构. 证毕.

定理 3.3　在伴随作用下 $H_{n,d}$ 有如下不可分解模的直和分解：

(i) $H_{n,d} = (\oplus_{r=0}^{n-1} L_r) \oplus (\oplus_{s=1}^{d-1} N_s)$.

(ii) $H_{n,d} \cong$

$$\oplus_{r=1}^{d-1} \Big(M(r,0) \oplus M(r, \frac{n}{d}(n-d+r)) \Big) \oplus$$

$$\underbrace{(M(d,0) \oplus \cdots \oplus M(d,0))}_{n-d+1}.$$

证明　(i). 对于 $H_{n,d}$ 的任意基元 $g^i h^j$，若 $0 \leqslant i+j \leqslant n-1$，则 $g^i h^j \in L_{i+j}$；若 $n \leqslant i+j \leqslant n+d-2$，则 $g^i h^j \in \mathbf{N}_{i+j+1-n}$. 要证明 $H_{n,d} = (\oplus_{r=0}^{n-1} L_r) \oplus (\oplus_{s=1}^{d-1} N_s)$，我们只要证明 $(\oplus_{r=0}^{n-1} L_r) \oplus (\oplus_{s=1}^{d-1} N_s)$ 与 $H_{n,d}$ 维数相同即可. 事实上，我们有

$$\Big(\sum_{r=0}^{n-1} \dim_k L_r\Big) + \Big(\sum_{s=1}^{d-1} \dim_k N_s\Big) =$$

$$\Big(\sum_{r=0}^{d-2} (r+1)\Big) + d(n-d+1) +$$

$$\Big(\sum_{s=1}^{d-1} (d-s)\Big) = nd = \dim_k H_{n,d}.$$

(ii). 根据命题 3.2，我们有

$$H_{n,d} = (\oplus_{r=0}^{n-1} L_r) \oplus (\oplus_{s=1}^{d-1} N_s) \cong$$

$$(\oplus_{r=0}^{d-2}M(r+1,0))\oplus$$
$$\underbrace{(M(d,0)\oplus\cdots\oplus M(d,0))}_{n-d+1}\oplus$$
$$\left(\oplus_{s=1}^{d-1}M(d-s,\frac{n}{d}(n-s))\right)\cong$$
$$\oplus_{r=1}^{d-1}\left(M(r,0)\oplus M(r,\frac{n}{d}(n-d+r))\right)\oplus$$
$$\underbrace{(M(d,0)\oplus\cdots\oplus M(d,0))}_{n-d+1}.$$

证毕.

注 1 当 $d=n$ 时，定理 3.3 给出了 Taft Hopf 代数在伴随作用下的不可分解子模的直和分解：

$$H_{n,n}\cong\oplus_{r=1}^{n-1}(M(r,0)\oplus M(r,r))\oplus M(n,0).$$

而 Taft Hopf 代数的正则表示的不可分解子模的直和分解为 $H_{n,n}\cong\oplus_{i=0}^{n-1}M(n,i)$ (参见文献[14]).

4 Killing 型矩阵与 Killing 根

本节利用广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}$ 的伴随作用来计算 $H_{n,d}$ 的 Killing 型矩阵，并通过该矩阵给出 $H_{n,d}$ 的 Killing 根的描述. 需要说明的是，在文献[8]中作者描述了一类 Hopf 代数的 Killing 根，这一类 Hopf 代数包含广义 Taft Hopf 代数为特例. 本文主要借助 Killing 型矩阵这一工具来描述 $H_{n,d}$ 的 Killing 根，这种求 Killing 根的方法与文献[8]稍有不同.

引理 4.1 对于 $H_{n,d}$ 的任意基元 g^ih^j 与 g^lh^m，有

(i) $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{g^ih^j})=\begin{cases}nd, & j=0,d\mid i,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

(ii) $(g^ih^j,g^lh^m)=\begin{cases}nd, & j=m=0,d\mid i+l,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

证明 (i). 由引理 3.1 (ii) 知

$$\mathrm{ad}_{g^ih^j}g^lh^m=$$
$$\sum_{t=0}^{j}\binom{j}{t}_q(-1)^{j-t}q^{t-j-\frac{(j-t)(j-t-1)}{2}-(j-t)(i+t)-m(i+j)j+t(l-i-j)}\cdot$$
$$g^{l-j}h^{m+j}.$$

由此可知，若 $j\neq0$，则 $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{g^ih^j})=0$；若 $j=0$，则

$$\mathrm{tr}(ad_{g^ih^j})=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{d-1}q^{-ml}=n(1+q^{-i}+q^{-2i}+\cdots$$
$$+q^{-(d-1)i})=\begin{cases}nd, & j=0,d\mid i,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(ii). 因为 $(g^ih^j,g^lh^m)=(g^ih^jg^lh^m,1)=(q^{jl}g^{i+l}h^{j+m},1)=q^{jl}tr(ad_{g^{i+l}h^{j+m}})$，结合(i)可得结果.

定理 4.2 广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}$ 的 Killing 型矩阵为如下对角分块矩阵

$$K=\begin{pmatrix}A_{n\times n} & & & \\ & 0_{n\times n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{n\times n}\end{pmatrix},$$

其中

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}B & B & \cdots & B\\ B & B & \cdots & B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B & B & \cdots & B\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}nd & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & nd\\ 0 & 0 & \cdots & nd & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & nd & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}_{d\times d},$$

这里 $0_{n\times n}$ 为零矩阵.

证明 由引理 4.1 (ii)立得.

定理 4.3 广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}$ 的 Killing 根 $H_{n,d}^{\perp}$ 为 g^d-1 与 h 生成的理想.

证明 对于 $H_{n,d}$ 中任意元素 $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d-1}\alpha_{i,j}g^ih^j$，我们有 $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d-1}\alpha_{i,j}g^ih^j\in H_{n,d}^{\perp}$ 当且仅当 $K\alpha=0$，其中 α 是以 $\alpha_{i,j}$，$0\leqslant i\leqslant n-1$，$0\leqslant j\leqslant d-1$ 为元素组成的 nd 维列向量. 由定理 4.2 知，$K\alpha=0$ 当且仅当

$$B\begin{pmatrix}\alpha_{0,0}\\ \alpha_{1,0}\\ \vdots\\ \alpha_{d-1,0}\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}\alpha_{d,0}\\ \alpha_{d+1,0}\\ \vdots\\ \alpha_{2d-1,0}\end{pmatrix}+\cdots$$
$$+B\begin{pmatrix}\alpha_{(\frac{n}{d}-1)d,0}\\ \alpha_{(\frac{n}{d}-1)d+1,0}\\ \vdots\\ \alpha_{n-1,0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

注意到矩阵 B 是可逆矩阵，则上式与下列方程组等价：

$$\begin{cases}\alpha_{0,0}+\alpha_{d,0}+\cdots+\alpha_{(\frac{n}{d}-1)d,0}=0\\ \alpha_{1,0}+\alpha_{d+1,0}+\cdots+\alpha_{(\frac{n}{d}-1)d+1,0}=0\\ \vdots\\ \alpha_{d-1,0}+\alpha_{2d-1,0}+\cdots+\alpha_{n-1,0}=0.\end{cases}$$

而 $\alpha_{i,j}$ 为该方程组的解当且仅当 $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{d-1}\alpha_{i,j}g^ih^j$ 在 g^d-1 与 h 生成的理想中. 因此广义 Taft Hopf 代数 $H_{n,d}$ 的 Killing 根 $H_{n,d}^{\perp}$ 为 g^d-1 与 h 生成的理

想. 证毕.

注 2 一般而言，Hopf 代数的 Jacobson 根包含在 Killing 根中. 上面结果则表明这两者可以不等. 当 $n=d$ 时，上面结果表明 Taft Hopf 代数的 Killing 根即为 Jacobson 根(为 h 生成的主理想).

参考文献：

[1] Wang Z H, Chen H X, Li L B. The Killing form of a Hopf algebra and its radical [J]. Arab J Sci Eng Sect, 2008, 33: 553.

[2] 王志华，李立斌. Hopf 代数的 Killing 型[J]. 扬州大学学报：自然科学版，2006，9：9.

[3] Abe E. Hopf algebras [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[4] Kassel C. Quantum groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[5] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings [M]. Providence: AMS, 1993.

[6] 黎雷，陶军，张修明. 狄拉克符号在有限群表示论中的应用[J]. 四川大学学报：自然科学版，2010，47：1099.

[7] 杨静颖. $\widetilde{A}$ 型路代数张量积的 Coxeter 变换[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：994.

[8] 唐帅，王志华. 一类 Hopf 代数的 Killing 根[J]. 河北师范大学学报：自然科学版，2012，36：21.

[9] Radford D E. On the coradical of a finite-dimensional Hopf algebra [J]. P Am Math Soc, 1975, 53: 9.

[10] Taft E J. The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra [J]. P Natl Acad Sci, 1971, 68: 2631.

[11] Cibils C. A quiver quantum group[J]. Commun Math Phys, 1993, 157: 459.

[12] Li L B, Zhang Y H. The Green rings of the generalized Taft algebras [J]. Contemp Math, 2013, 585: 275.

[13] Wang Z H, Li L B, Zhang Y H. Green rings of pointed rank one Hopf algebras of nilpotent type [J]. Algebra Represent Th, 2014, 17: 1901.

[14] Chen H X, Oystaeyen F V, Zhang Y H. The Green rings of Taft algebras [J]. P Am Math Soc, 2014, 142: 765.