doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.02.006

一类右半直线上独立同分布随机环境中的随机游动

任　敏
(宿州学院数学与统计学院，宿州 234000)

摘　要：本文给出在 0 点以一定概率吸收和反射的右半直线上独立同分布的随机环境中的随机游动模型，讨论了模型的常返性和极限性质，计算了模型的吸收概率.

关键词：随机环境；随机游动；常返性；吸收概率
中图分类号：O211.62　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)02-0217-05

Random walk in independent and identically distributed random environment on right half-line

REN Min
(College of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Suzhou 234000, China)

Abstract: In this paper, a random walk model that is absorbed and reflected by a certain probability at 0 in independent and identically distributed random environment on the right half-line is given. The recurrence and limit properties of the model are discussed and the absorbing probabilities are calculated.

Keywords: Random environment; Random walk; Recurrence; Absorbing probability
(2010 MSC 60J65)

1　引　言

随机环境中的随机游动(简记为 RWIRE)是随机过程的一个重要分支. 在通常的直线上的随机游动中，质点是在确定性的环境中运动的. 直线上的 RWIRE 则假定环境是随机变化的，即在 $n\in\mathbf{Z}$ 处的转移概率 $P_{n,n+1}$ 是随机变化的.

RWIRE 由 Kozlov 首先提出[1]，随后 Solomon 又研究了直线上的环境是独立同分布的 RWIRE[2]. 当前，随机环境中的随机游动理论已有丰富的结果[3-10]. 其中，毕[11]研究了在 0 点上具有反射壁的右半直线上环境是独立同分布的 RWIRE 的常返性及极限性质，任[12]研究了具有吸收壁的右半直线上依分布收敛独立随机环境中随机游动的吸收概率.

本文研究在 0 点以一定概率反射和吸收的右半直线上的 RWIRE 的常返性和极限性质，并计算其吸收概率.

2　预备知识

定义 2.1　设$\{(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),n\geq 0\}$为概率空间$(\Omega,F,P)$上的一列独立同分布的随机变量. 定义在 $\mathbf{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$上的随机游动$\{X_n,n\geq 0\}$是指：

$$P(X_0=0)=1,$$

$$P(X_{n+1}=j\mid X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i)=\begin{cases}\alpha_i, & j=i+1,i\geq 0,\\ \beta_i, & j=i-1,i>0,\\ \gamma_i, & j=i,i>0,\ \text{a.s.},\\ \beta_0+\gamma_0, & j=i=0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

收稿日期：2017-11-22
基金项目：国家自然科学基金(11371029)；安徽省高校自然科学研究项目基金(KJ2016A770)；宿州学院重点科研项目基金(2016yzd05)；宿州区域发展协同创新中心课题基金(2016szxt02)
作者简介：任敏(1982－)，女，安徽淮北人，副教授，主要研究方向为随机环境中的马氏过程. E-mail：rm0107116@163.com

其中 $i_k, i, j \in \mathbf{Z}^+$, $k=1,2,\cdots,n-1$, $0\le\beta_k,\alpha_k,\gamma_k\le 1$, $\beta_k+\alpha_k+\gamma_k=1$.

随机变量序列$\{(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),n\ge 0\}$称为随机环境. 记 $e=\{(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),n\ge 0\}$,它的每个现实称为环境.

类似文献[2]中的方法,可以证明给定环境下的 RWIRE 的存在性,其转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} \beta_0+\gamma_0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n & \gamma_n & \alpha_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

此时$\{X_n,n\ge 0\}$是 $\mathbf{Z}^+$ 上的齐次马氏链.

3 吸收概率和常返性

首先考虑下面模型的吸收概率

$$\begin{pmatrix} \beta_0+\gamma_0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} & \alpha_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

记状态空间为(V^N,G),其中 $V=\mathbf{Z}^+$,其上分布记为 P_e^v. 则 $P=\mathrm{P}\otimes P_e^v$ 为$(\Omega\times V^N,F\times G)$上的分布.

设

$$T_n=\min\{k\ge 0: X_k=n\},$$

$$Z_m=P_e^m(T_0<T_N)=P(T_0<T_N\,|\,X_0=m,e),$$

$$Z'_m=P^m(T_0<T_N)=P(T_0<T_N\,|\,X_0=m),$$

$$\sigma_j=\frac{\beta_j}{\alpha_j},\ \rho_j=\sigma_1\cdots\sigma_j.$$

引理 3.1 设$\{X_n,n\ge 0\}$是 $\mathbf{Z}^+$ 上的马氏链,转移矩阵如式(1),其中 $0\le\beta_j,\alpha_j,\gamma_j\le 1$,则

$$Z_m=\frac{\sum_{k=m}^{N-1}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{N-1}\rho_k},\ 1\le m\le N-1.$$

证明 由马氏性可知,

$$Z_m=\alpha_m Z_{m+1}+\beta_m Z_{m-1}+\gamma_m Z_m,\ 1\le m\le N-1,$$

$$Z_0=1, Z_N=0.$$

由此得

$$Z_{m+1}-Z_m=\sigma_m(Z_m-Z_{m-1}),\ 1\le m\le N-1.$$

递推得

$$Z_{m+1}-Z_0=\Big(\sum_{k=1}^{m}\rho_k+1\Big)(Z_1-Z_0).$$

由 $Z_N=0$ 解得

$$Z_1-Z_0=-\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\rho_k+1\Big)^{-1}.$$

故

$$Z_m=\frac{\sum_{k=m}^{N-1}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{N-1}\rho_k},\ 1\le m\le N-1.$$

证毕.

引理 3.2 设$\{X_n,n\ge 0\}$是 $\mathbf{Z}^+$ 上的马氏链,转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} \beta_0+\gamma_0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n & \gamma_n & \alpha_n & \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $0\le\beta_j,\alpha_j,\gamma_j\le 1$,则

$$Z_m=\begin{cases} \dfrac{\sum_{k=m}^{\infty}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k} & \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k<\infty, \\ 1 & \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty. \end{cases}$$

证明 由引理 3.1 有

$$Z_m=\frac{\sum_{k=m}^{N-1}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{N-1}\rho_k},\ 1\le m\le N-1.$$

令 $N\to+\infty$. 若$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k<\infty$,则

$$Z_m=\frac{\sum_{k=m}^{\infty}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k};$$

若$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty$,则 $Z_m=1$. 从而

$$Z_m=\begin{cases} \dfrac{\sum_{k=m}^{\infty}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k} & \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k<\infty, \\ 1 & \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty. \end{cases}$$

证毕.

引理 3.3 设$\{X_n,n\ge 0\}$是 $\mathbf{Z}^+$ 上的 RWIRE. 又假设 $0<\alpha_n<1$, $n\ge 0$, $E\log\sigma_1$ 存在. 则

(i) $E\log\sigma_1<0\Leftrightarrow P\big(\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k<\infty\big)=1$;

(ii) $E\log\sigma_1\ge 0\Leftrightarrow P\big(\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k=\infty\big)=1$.

证明　记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\log\sigma_i=\log\rho_n, n\geq 1$. 先证必要性. (i) 当 $E\log\sigma_1<0$ 时，由 Borel 强大数定律知 $\frac{S_n}{n}\to E\log\sigma_1<0$, a. s. 故 $\frac{S_n}{n^{0.5}}\to-\infty$. 从而对几乎一切 $w\in\Omega$，存在 $N(w)$，使得当 $n>N(w)$ 时有 $S_n<-n^{0.5}$. 故 $0\leq\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n<\sum_{n=N}^{\infty}e^{-n^{0.5}}<\infty$ a. s..

(ii) 当 $E\log\sigma_1>0$ 时，由 Borel 强大数定律知 $\frac{S_n}{n}\to E\log\sigma_1>0$, a. s. 故 $S_n\to+\infty$. 从而

$$\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=N}^{\infty}e^{S_n}=\infty \text{ a. s.}.$$

当 $E\log\sigma_1=0$ 时，$\frac{S_n}{n}\to E\log\sigma_1=0$ a. s. 若 $\log\sigma_1=0$ a. s.，则 $S_n=0, n\geq 1$ a. s.. 显然

$$\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=N}^{\infty}e^{S_n}=\infty \text{ a. s.},$$

否则有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}S_n=\infty$. 故对任意 $M>0$ 有 $P(S_n\geq M, \text{i. o.})=1$. 因此 $\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\infty$ a. s.. 综上，当 $E\log\sigma_1\geq 0$ 时 $\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\infty$ a. s..

下证充分性. 对于 (i)，若 $\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n<\infty$，则必有 $E\log\sigma_1<0$. 否则若 $E\log\sigma_1\geq 0$，由 (ii) 的必要性知 $\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\infty$. 矛盾. 同理可得若 $\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\infty$，则必有 $E\log\sigma_1\geq 0$. 证毕.

定理 3.4　设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的马氏链，转移矩阵为

$$\begin{pmatrix} \beta_0+\gamma_0 & \alpha_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n & \gamma_n & \alpha_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$0\leq\beta_j, \alpha_j, \gamma_j\leq 1$，则

$$Z_m'=\begin{cases} \int_{\Omega}\dfrac{\sum_{k=m}^{\infty}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k}P(\mathrm{d}w) & E(\log\sigma_1)<0, \\ 1 & E(\log\sigma_1)\geq 0. \end{cases}$$

证明　因 $\{X_n, n\geq 0\}$ 在 $x=0$ 处是以概率 $\beta_0+\gamma_0$ 吸收的，由引理 3.2 和引理 3.3 知，当 $E\log\sigma_1<0$ 时，

$$Z_m'=\int_{\Omega}P_w^m(T_0<T_N)P(\mathrm{d}w)$$

$$=\int_{\Omega}\frac{\sum_{k=m}^{\infty}\rho_k}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k}P(\mathrm{d}w).$$

当 $E\log\sigma_1\geq 0$ 时，

$$Z_m'=\int_{\Omega}1P(\mathrm{d}w)=1.$$

证毕.

引理 3.5[3]　对固定环境有

(i) $\{X_n, n\geq 0\}$ 常返 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\infty$;

(ii) $\{X_n, n\geq 0\}$ 正常返 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\infty, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\rho_n}<\infty$;

(iii) $\{X_n, n\geq 0\}$ 零常返 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\infty, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\rho_n}=\infty$;

(iv) $\{X_n, n\geq 0\}$ 非常返 $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n<\infty$.

引理 3.6[2]　若对几乎所有的环境，$\{X_n, n\geq 0\}$ 在此环境下的某一性质成立，则在半直线上 RWIRE $\{X_n, n\geq 0\}$ 几乎必然具有该性质.

定理 3.7　设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 上的独立同分布随机环境中的随机游动，$0<\alpha_n<1, n\geq 0$，$E\log\sigma_1$ 存在. 则有

(i) $\{X_n, n\geq 0\}$ 常返 $\Leftrightarrow E\log\sigma_1\geq 0$;

(ii) $\{X_n, n\geq 0\}$ 非常返 $\Leftrightarrow E\log\sigma_1<0$.

证明　先证明充分性. (i) 当 $E\log\sigma_1>0$ 时，由 Borel 强大数定律知 $\frac{S_n}{n}\to E\log\sigma_1>0$ a. s.，故 $S_n\to+\infty$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{S_n}=\infty \text{ a. s.}.$$

当 $E\log\sigma_1=0$ 时，可得 $\frac{S_n}{n}\to E\log\sigma_1=0$ a. s.. 若 $\log\sigma_1=0$，则 $S_n=0, n\geq 1$ a. s.. 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{S_n}=\infty \text{ a. s.}.$$

否则有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}S_n=\infty$ a. s.. 故对任意的 $M>0$ 有 $P(S_n\geq M, \text{i. o.})=1$ 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\infty$ a. s.. 综上，当 $E\log\sigma_1\geq 0$ 时有 $\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\infty$ a. s.. 故由引理 3.5 和引理 3.6 知 $\{X_n, n\geq 0\}$ 是常返.

(ii) 当 $E\log\sigma_1<0$ 时，由 Borel 强大数定律知 $\frac{S_n}{n}\to E\log\sigma_1<0$ a. s.. 故 $\frac{S_n}{n^{0.5}}\to-\infty$. 从而对几乎一切 $w\in\Omega$ 存在 $N(w)$，使得当 $n>N(w)$ 时有 $S_n<-n^{0.5}$. 故

$$0\le\sum_{n=N}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=N}^{\infty}e^{-n^{0.5}}<\infty \text{ a. s.}.$$

故由引理 3.5 和引理 3.6 知$\{X_n,n\ge0\}$非常返.

下证必要性. 对于(i),若$\{X_n,n\ge0\}$常返,则必有 $E\log\sigma_1\ge0$. 否则若 $E\log\sigma_1<0$,由(ii)的必要性知$\{X_n,n\ge0\}$非常返. 矛盾. 同理,若$\{X_n,n\ge0\}$非常返,则必有 $E\log\sigma_1<0$. 证毕.

4 极限性质

令 $\mathrm{A}=\sigma\{(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),n\ge0\}$,记

$$f(i,k)=P(T_n=k|X_0=i)\doteq P_i(T_n=k),$$

$$F(i)=E_i(T_n|\mathrm{A}).$$

则且固定环境时,$f(i,k)$表示从 $i\in\mathbf{Z}^+$ 出发,恰好在 k 时刻首达$n\in\mathbf{Z}^+$的概率. 由马氏性知

$$F(i)=\alpha_iF(i+1)+\beta_iF(i-1)+\gamma_iF(i)+1,0<i<n,F(n)=0 \tag{1}$$

$$F(1)-F(0)=-\frac{1}{\alpha_0}.$$

引理 4.1 对固定的环境有

$$F(0)=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_i}+\sum_{k=1}^{i}\frac{\beta_i\beta_{i-1}\cdots\beta_k}{\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_k\alpha_{k-1}}\right).$$

证明 由(1)式得

$$\alpha_i(F(i+1)-F(i))=\beta_i(F(i)-F(i-1))-1.$$

递推得

$$F(i+1)-F(i)=\frac{\beta_i\beta_{i-1}\cdots\beta_1}{\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1}(F(1)-F(0))-\frac{\beta_i\beta_{i-1}\cdots\beta_2}{\alpha_i\alpha_{i-1}\cdots\alpha_1}-\cdots-\frac{\beta_i}{\alpha_i\alpha_{i-1}}-\frac{1}{\alpha_i}.$$

又因为 $F(1)-F(0)=-\frac{1}{\alpha_0}$,故

$$F(i)=\sum_{j=0}^{i-1}(F(j+1)-F(j))+F(0)=F(0)-\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{1}{\alpha_j}+\sum_{k=1}^{j}\frac{\beta_j\cdots\beta_k}{\alpha_j\cdots\alpha_k\alpha_{k-1}}\right).$$

令 $i=n$. 由 $F(n)=0$ 得

$$F(0)=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_j}+\sum_{k=1}^{j}\frac{\beta_j\beta_{j-1}\cdots\beta_k}{\alpha_j\alpha_{j-1}\cdots\alpha_k\alpha_{k-1}}\right).$$

引理 4.2 设$E\frac{\beta_1}{\alpha_1}$,$E\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$存在. 记$\delta=E\frac{\beta_1}{\alpha_1}$,$\mu=E\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$. 则当$\delta<1$时

$$ET_n=n\frac{1+\delta+\mu}{1-\delta}-\frac{\delta(1+\delta+\mu)}{(1-\delta)^2}(1-\delta^n).$$

证明 易见

$$ET_n=E_0T_n=E_0(E_0(T_n|e,n\ge1))=$$

$$EF(0)=E\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_j}+\sum_{k=1}^{j}\frac{\beta_j\beta_{j-1}\cdots\beta_k}{\alpha_j\alpha_{j-1}\cdots\alpha_k\alpha_{k-1}}\right)\right\}.$$

因为

$$E\frac{1}{\alpha_j}=E\left(\frac{\alpha_j+\beta_j+\gamma_j}{\alpha_j}\right)=1+\delta+\mu,$$

则

$$ET_n=\sum_{j=0}^{n-1}\{1+\delta+\mu+\sum_{k=1}^{j}\delta^{j+1-k}(1+\delta+\mu)\}=$$

$$n(1+\delta+\mu)+\frac{\delta(1+\delta+\mu)}{1-\delta}\left[n-\frac{(1-\delta^n)}{1-\delta}\right]=$$

$$n\frac{(1+\delta+\mu)}{1-\delta}-\frac{\delta(1+\delta+\mu)(1-\delta^n)}{(1-\delta)^2}.$$

定理 4.3 当$\delta=E\frac{\beta_1}{\alpha_1}<1$时,有

(i) $\frac{T_n}{n}\xrightarrow{P}\frac{1+\delta+\mu}{1-\delta}$;

(ii) $\frac{X_n}{n}\xrightarrow{P}\frac{1-\delta}{1+\delta+\mu}$.

证明

(i) 考虑 $\mathbf{Z}$ 上的 RWIRE X_n. 设

$$T_n'=\begin{cases}\min\{k\ge0;X_k=n\}, & \text{右边集非空},\\ +\infty, & \text{反之},\end{cases}$$

$$T_0'=0,\tau_n'=T_n'-T_{n-1}',n\ge1.$$

由文献[10]知$\{\tau_n',n\ge1\}$是平稳遍历序列,并且有

$$E\tau_n'=\begin{cases}\frac{1+\delta+\mu}{1-\delta}, & \delta<1,\\ +\infty, & \delta\ge1.\end{cases}$$

当$\delta<1$时,有

$$ET_n'=E\sum_{i=1}^{n}\tau_i'=n\frac{1+\delta+\mu}{1-\delta}.$$

当在 $\mathbf{Z}$ 上考虑 $\mathbf{Z}^+$ 上的 RWIREX_n 时,易得 $T_n\le T_n'$. 故对任意的$\varepsilon>0$,$\delta<1$有

$$P\left(\left|\frac{T_n}{n}-\frac{T_n'}{n}\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{ET_n'-ET_n}{n\varepsilon}=$$

$$\frac{(1+\delta+\mu)\frac{\delta(1-\delta^n)}{(1-\delta)^2}}{n\varepsilon}\to0(n\to\infty).$$

因此$\frac{T_n}{n}-\frac{T_n'}{n}\xrightarrow{P}0$. 又因为

$$\frac{T_n'}{n}\to\frac{1+\delta+\mu}{1-\delta}(\delta<1)\text{ a. s.},$$

所以(i)式成立.

(ii) 由(i)知存在子列$\{n'\}\subset\{n\}$使得

$$\frac{T_{n'}}{n}\to\frac{1+\delta+\mu}{1-\delta}\text{ a. s.},$$

即 $T_{n'}\to+\infty$a. s.. 由 T_n 的定义且 X_n 是一步紧邻的随机游动知,首次到达 $n+1$ 的时刻必在首次到达 n 的时刻之后,即有 $T_n<T_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$,故 $T_n\to+\infty$. 因此,对任意的 n 都存在唯一的 $k_n(w)$ 使得

$$T_{k_n} \le n < T_{k_n+1}, k_n \in \mathbf{Z}^+ \tag{2}$$

即

$$\frac{k_n}{T_{k_n+1}} < \frac{k_n}{n} \le \frac{k_n}{T_{k_n}} \tag{3}$$

又当 $\delta<1$ 时，

$$E\log\frac{\beta_1}{\alpha_1} \le \log E\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \log\delta < 0,$$

由定理 3.5(ii)知 X_n 非常返，即 $X_n \to +\infty$ a. s.. 由(2)式知，在时刻 n 质点未到达 k_n+1，故 $X_n < k_n+1$. 因此 $k_n \to +\infty$ a. s.. 又

$$\frac{k_n}{T_{k_n}} \xrightarrow{P} \frac{1-\delta}{1+\delta+\mu},$$

由(3)式知

$$\frac{k_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1-\delta}{1+\delta+\mu} \tag{4}$$

又因为 $\frac{k_n}{n} = \frac{k_n}{T_{k_n}} \frac{T_{k_n}}{n}$，因此有

$$\frac{T_{k_n}}{n} \xrightarrow{P} 1 \tag{5}$$

再由 k_n 的定义知从 T_{k_n} 到 n 这段时间质点至多左移 $n-T_{k_n}$ 个单位. 故

$$k_n - (n - T_{k_n}) \le X_n < k_n + 1,$$

即

$$\frac{k_n}{n} - \left(1 - \frac{T_{k_n}}{n}\right) \le \frac{X_n}{n} < \frac{k_n+1}{n}.$$

由(4)、(5)式知

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{1-\delta}{1+\delta+\mu}.$$

证毕.

参考文献：

[1] Kozlov M V. Random walk in a one dimensional random medium [J]. Theor Prob Appl, 1973, 18: 387.

[2] Solomon F. Random walk in a random environment [J]. Ann Prob, 1975, 3: 1.

[3] Karlin S, Taylor H M. A first course in stochastic processes [M]. New York: Academic Press, 1975.

[4] Cogburn R. Markov chains in random environments: the case of Markov environments [J]. Ann Prob, 1980, 8: 908.

[5] Cogburn R. The Ergodic Theory of Markov chains in random environments [J]. Z Wahrach Verw Gebiete, 1984, 66: 109.

[6] Cogburn R. On direct convergence and periodicity for transition probabilities of Markov chains in random environments [J]. Ann Prob, 1990, 18: 642.

[7] 刘磊，吴芝明，林涛，刘大瑞. 基于马尔科夫模型的移动设备链接预测研究[J]. 四川大学学报：自然科学版，2015，52：45.

[8] 王华明. 一类随机环境中随机游动的值域问题[J]. 中国科学，2017，47：841.

[9] 任敏，张光辉. 右半直线上依分布收敛独立随机环境中的生灭过程的常返性[J]. 数学学报，2017，60：531.

[10] 胡学平，李会葆. 直线上随机环境中可逗留的随机游动的若干性质[J]. 数学研究，2006，39：198.

[11] 毕秋香. 半直线上随机环境中随机游动的若干性质[J]. 应用概率统计，1997，13：120.

[12] 任敏，张光辉. 右半直线上依分布收敛独立随机环境中随机游动的吸收概率[J]. 山东大学学报：理学版，2013，48：93.

引用本文格式：

中　文：任敏. 一类右半直线上独立同分布随机环境中的随机游动[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：217.

英　文：Ren M. Random walk in independent and identically distributed random environment on right half-line [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 217.