doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.02.004

有界复形的 Modified Ringel-Hall 代数的结构常数

陈 悦
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：设 k 是有限域，A 是 k 上的满足一定有限性条件的本质小的遗传阿贝尔范畴. 本文研究了有界复形范畴的 modified Ringel-Hall 代数 $MH(A)$ 中零微分复形乘积的结构常数，给出了它们与 A 的 Ringel-Hall 代数 $H(A)$ 的 Hall 数间的关系.

关键词：Modified Ringel-Hall 代数；零微分有界复形；结构常数
中图分类号：O154.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)02-0209-04

Structure constants of the modified Ringel Hall algebras over bounded complexes

CHEN Yue
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Let k be a finite field and A be an essentially small hereditary Abelian category over k satisfying some finiteness conditions. We consider the structure constants of the products of complexes with zero differentials in $MH(A)$ and show that it is related to the Hall number of the Ringel-Hall algebras $H(A)$.

Keywords: Modified Ringel-Hall algebra; Complex with zero differentials; Structure constant
(2010 MSC 18E10, 18E35)

1　引　言

1990 年，Ringel 给出了满足有限性条件的阿贝尔范畴的 Ringel-Hall 代数的定义并利用 Ringel-Hall 代数的方法实现了半单李代数的正部分及相应量子群的正部分. 特别地，Ringel 在文献[1]中证明了若 L 为有限域上的有限表示型遗传代数，则 L 的有限生成模范畴的 Ringel-Hall 代数与其相对应的量子群的正部分同构. 1995 年，Green 在文献[2]中给出了遗传代数的 Ringel-Hall 代数的双代数结构，并将 Ringel 关于有限型量子群正部分的实现推广至任意型.

此后，人们尝试通过 Ringel-Hall 代数方法给出量子群的整体实现，而不仅限于正部分. 其中，Xiao 在文献[3]中给出了遗传代数的 Ringel-Hall 代数反极子，并利用 Drinfeld double Ringel-Hall 代数整体实现了量子群. Bridgeland 在文献[4]中利用遗传代数的投射模的 $Z/2$-分次复形范畴的 Ringel-Hall 代数的局部化整体地实现了量子群. Gorsky 在文献[5]中引入了 semi-derived Hall 代数，并给出了 Bridgeland 所定义的 Ringel-Hall 代数的导出不变性. Lu 和 Peng 在文献[6]中推广了 Bridgeland 与 Gorsky 的构造，对一般的遗传范畴定义了其 $Z/2$-分次复形范畴的 modified Ringel-Hall 代数，并证明了该 modified Ringel-Hall 代数同构于其相应的 Ringel-Hall 代数的 Drinfeld double. Lin 和 Peng 在文献[7]中定义了任意遗传阿贝尔范畴 A 中的 Z-分次有界复形范畴的 modified Ringel-Hall 代数 $MH(A)$，给出了 $MH(A)$的一组基，并利用 modified Ringel-Hall 代数

收稿日期：2018-04-11
作者简介：陈悦(1993－)，女，四川射洪人，硕士，主要研究方向为代数表示论. E-mail：tulip_cye@163.com

中的乘法结合律给出了 Green 公式的新的证明.

本文主要研究 $MH(A)$ 中零微分有界复形乘积的结构常数，同时给出了它们与通常 Hall 数的关系.

2 预备知识

用 $|S|$ 表示集合 S 所含的元素个数. 本文中我们总假定 k 是有限域，A 是 k 上的本质小的遗传阿贝尔 k-范畴，且 A 满足以下有限性条件

$$\dim_k \mathrm{Hom}_A(M,N)<\infty,\ \dim_k \mathrm{Ext}_A^1(M,N)<\infty,\ \forall M,N\in A.$$

设 $X\in A$，用 $\mathrm{Aut}(X)$ 表示 X 的自同构群，$a_X:=|\mathrm{Aut}(X)|$，$[x]$ 表示 X 所在的同构类. 用 $\mathrm{Iso}(X)$ 表示 A 的对象的同构类的集合，$K_0(A)$ 表示 A 的 Grothendieck 群，$\hat{X}$ 表示 X 在 $K_0(A)$ 中的像. 用 $C(A)$ 表示 A 上的所有复形作成的范畴.

复形 $X^\cdot=(X^n,d^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 称为有界复形，若只有有限多个 n 使得 $X_n\neq 0$；复形 $X^\cdot$ 称为无环复形，若 $X^\cdot=(X^n,d^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 的各阶同调群 $H^n(X^\cdot)=0(n\in\mathbf{Z})$. 用 $C^b(A)$ 表示由 $C(A)$ 上的所有有界复形作成的满子范畴，$C_{ac}^b(A)$ 表示 A 上的有界无环复形作成的范畴.

设 $X\in A$，$m\in\mathbf{Z}$，用 $U_{X,m}$ 表示 X 位于第 m 次齐次分支的 stalk 复形，$K_{X,m}$ 表示下面的无环复形

$$\cdots\to 0\to X\xrightarrow{1_X}X\to 0\to\cdots,$$

其中 X 位于第 $m-1$ 次和 m 次齐次分支.

设 $B,C,M,N\in A$，用 $V(M,C,B,N)$ 表示 $\mathrm{Hom}(M,C)\times\mathrm{Hom}(C,B)\times\mathrm{Hom}(B,N)$ 的满足下列条件的态射作成的子集：

$$\{(f,g,h)\mid 0\to M\xrightarrow{f}C\xrightarrow{g}B\xrightarrow{h}N\to 0\ \text{是正合列}\}.$$

易知，$V(M,C,B,N)$ 是有限集合. 定义

$$\gamma_{BC}^{MN}:=\frac{|V(M,C,B,N)|}{a_Ba_C}.$$

设 ε 为有限域 k 上的本质小的正合范畴，满足以下有限性条件

$$\dim_k \mathrm{Hom}_\varepsilon(M,N)<\infty,\ \dim_k \mathrm{Ext}_\varepsilon^1(M,N)<\infty,\ \forall M,N\in\varepsilon.$$

给定 $M,N,L\in\varepsilon$，定义

$$\mathrm{Ext}_\varepsilon^1(M,L)_N\subset\mathrm{Ext}_\varepsilon^1(M,L)$$

为中间项同构于 N 的扩张构成的子集.

定义 2.1[1] ε 的 Ringel-Hall 代数 $H(\varepsilon)$ 是以 ε 的对象的同构类为基生成的 Q-线性空间，$H(\varepsilon)$ 的乘法 $\diamond$ 定义如下

$$[M]\diamond[L]:=\sum_{[N]\in\mathrm{Iso}(\varepsilon)}\frac{|\mathrm{Ext}_\varepsilon^1(M,L)_N|}{|\mathrm{Hom}_\varepsilon(M,L)|}[N],$$

其中 $M,L\in\varepsilon$.

由定义可知，$H(\varepsilon)$ 是有单位元的结合代数，且单位元为 $[0]$.

设 $M,N,L\in\varepsilon$，用 g_{ML}^N 表示集合 $\{L'\subseteq N\mid L'\cong L,N/L'\cong M\}$ 的元素个数，且有 Riedtmann-Peng 公式[8,9]

$$g_{ML}^N=\frac{|\mathrm{Ext}_\varepsilon^1(M,L)_N|}{|\mathrm{Hom}_\varepsilon(M,L)|}\frac{a_N}{a_Ma_L}.$$

设 $H(C^b(A))$ 是 $C^b(A)$ 的 Ringel-Hall 代数，即对任意 $M,L\in C^b(A)$，有

$$[M]\diamond[L]:=\sum_{[N]\in\mathrm{Iso}(\varepsilon)}\frac{|\mathrm{Ext}_\varepsilon^1(M,L)_N|}{|\mathrm{Hom}_\varepsilon(M,L)|}[N].$$

记 I 是 $H(C^b(A))$ 的由所有 $[M]-[K\oplus L]$ 生成的理想，其中 $M,L,K\in C^b(A)$，满足 $0\to K\to M\to L\to 0$ 是短正合列，且 K 是无环复形，则可定义商代数 $H(C^b(A))/I$，其乘法仍记为 $\diamond$.

用 S 表示 $H(C^b(A))/I$ 的由所有 $q[K]$ 生成的子集，其中 $q\in Q^\times$，$K\in C_{ac}^b(A)$，则单位元 $[0]\in S$，且 $H(C^b(A))/I$ 关于 S 的右局部化存在，记为 $(H(C^b(A))/I)[S^{-1}]$，仍用 $\diamond$ 表示其乘法.

定义 2.2[7] 称右局部化 $(H(C^b(A))/I)[S^{-1}]$ 为 A 的有界复形范畴的 modified Ringel-Hall 代数，记为 $MH(A)$.

设 $M,N\in A$ 且 $\hat{M}=\hat{N}$. 则对任意 $i\in\mathbf{Z}$，在 $MH(A)$ 中有

$$[K_{M,i}]=[K_{N,i}],$$

记为 $K_{\hat{M},i}$. 如果 $\alpha=\hat{M}-\hat{N}$，定义

$$K_{\alpha,i}=\frac{1}{\langle\alpha,\hat{N}\rangle}[K_{M,i}]\diamond[K_{N,i}]^{-1}.$$

命题 2.3[7] (i) 设 $X^\cdot=(X^n,d^n)_{n\in\mathbf{Z}}\in C^b(A)$，不妨设 $X^\cdot$ 的最左和最右的非零齐次分支分别是 X^l 和 X^r. 则在 $MH(A)$ 中有

$$[X^\cdot]=\langle\mathrm{Im}(\hat{d}^{r-1}),\mathrm{Ker}(\hat{d}^{r-1})\rangle\langle\mathrm{Im}(\hat{d}^{r-2}),\mathrm{Ker}(\hat{d}^{r-2})\rangle\cdots\langle\mathrm{Im}(\hat{d}^{l}),\mathrm{Ker}(\hat{d}^{l})\rangle[K_{\mathrm{Im}(d^{r-1}),r}]\diamond[K_{\mathrm{Im}(d^{r-2}),r-1}]\diamond\cdots\diamond[K_{\mathrm{Im}(d^{l}),l+1}]\diamond[U_{H^r(X^\cdot),r}]\diamond[U_{H^{r-1}(X^\cdot),r-1}]\diamond[U_{H^l(X^\cdot),l}].$$

（ii）下列元素 $[K_{\alpha^{r-1},r}]\diamond[K_{\alpha^{r-2},r-1}]\diamond\cdots\diamond[K_{\alpha^{l},l+1}]\diamond[U_{M^{r-1},r-1}]\diamond[U_{M^{r-2},r-1}]\diamond\cdots\diamond[U_{M^{l},l}]$ 是 $MH(\mathcal{A})$ 的一组基，其中 $r,l\in\mathbf{Z},r\geqslant l,\alpha^{i}\in K_0(\mathcal{A}),M^{j}\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A}),l\leqslant i\leqslant r-1,l\leqslant j\leqslant r$.

以下我们也用 $U_{M,n}$ 表示其所在同构类 $[U_{M,n}]$.

命题 2.4[7]　Modified Ringel-Hall 代数 $MH(\mathcal{A})$ 是由 $\{U_{M,n},K_{\alpha,n}\mid M\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A}),\alpha\in K_0(\mathcal{A}),n\in\mathbf{Z}\}$ 生成的有单位元的结合 $\mathbb{Q}$-代数，且其生成关系为下面的关系(1)～(10)：

$$U_{M,n}\diamond U_{L,n}=\sum_{[N]\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}\frac{|\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,L)_N|}{|\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,L)|}[N]\tag{1}$$

$$K_{\alpha,n}\diamond U_{M,n}=\langle\hat{M},\alpha\rangle U_{M,n}\diamond K_{\alpha,n}\tag{2}$$

$$K_{\alpha,n}\diamond K_{\beta,n}=\frac{1}{\langle\alpha,\beta\rangle}K_{\alpha+\beta,n}\tag{3}$$

$$U_{M,n}\diamond K_{\alpha,n+1}=\langle\alpha,\hat{M}\rangle K_{\alpha,n+1}\diamond U_{M,n}\tag{4}$$

$$K_{\alpha,n}\diamond U_{M,n+1}=U_{M,n+1}\diamond K_{\alpha,n}\tag{5}$$

$$K_{\alpha,n}\diamond K_{\beta,n+1}=\langle\beta,\alpha\rangle K_{\beta,n+1}\diamond K_{\alpha,n}\tag{6}$$

$$U_{M,n}\diamond U_{L,n+1}:=\sum_{B,C\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}\gamma_{LM}^{BC}\frac{a_La_M}{a_Ba_C}\langle\hat{M}-\hat{B},\hat{B}\rangle K_{\hat{M}-\hat{B},n+1}\diamond U_{C,n+1}\diamond U_{B,n}\tag{7}$$

当 $|m-n|\geqslant 2$ 时，

$$U_{M,m}\diamond U_{N,n}=U_{N,n}\diamond U_{M,m}\tag{8}$$

$$K_{\alpha,m}\diamond U_{N,n}=U_{N,n}\diamond K_{\alpha,m}\tag{9}$$

$$K_{\alpha,m}\diamond K_{\beta,n}=K_{\beta,n}\diamond K_{\alpha,m}\tag{10}$$

定义 2.5　设 $X^{\cdot}=(X^{n},d^{n})_{n\in\mathbf{Z}}\in C^{b}(\mathcal{A})$，不妨设 $X^{\cdot}$ 的最左和最右的非零齐次分支分别是 X^{l} 和 X^{r}. 则定义 $X^{\cdot}$ 的宽度为 $r-l+1$. 如果 $X^{\cdot}=0$，那么定义 $X^{\cdot}$ 的宽度为 0.

定义 2.6　设 S 是非交换结合代数，$(a^{i})_{i\in\mathbf{Z}}$ 是 S 的一列元素，其中只有有限个元素不等于单位元. 则称 $\overleftarrow{\prod_{i}}a^{i}=a^{p}a^{p-1}\cdots a^{q+1}a^{q}$ 是 $(a^{i})_{i\in\mathbf{Z}}$ 的逆序积，其中 $p\geqslant q$，且当 $i>p$ 或 $i<q$ 时 $a^{i}=1$.

由命题 2.3 我们有

命题 2.7　对任意的 $X^{\cdot}=(X^{i},0)_{i\in\mathbf{Z}}\in C^{b}(\mathcal{A})$)，即 $X^{\cdot}$ 是零微分的有界复形，在 $MH(\mathcal{A})$ 中有

$$[X^{\cdot}]=\overleftarrow{\prod_{i\in\mathbf{Z}}}U_{X^{i},i}.$$

3　主要结果

引理 3.1[7]　设 $B,C,M,N\in\mathcal{A}$，则

$$\gamma_{BC}^{MN}=\sum_{I\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}g_{NI}^{B}g_{IM}^{C}\frac{a_Ma_Ia_N}{a_Ba_C}.$$

定理 3.2　设 $A_1^{\cdot}=(A_1^{i},0)_{i\in\mathbf{Z}}$，$A_2^{\cdot}=(A_2^{j},0)_{j\in\mathbf{Z}}\in C^{b}(\mathcal{A})$. 则在 $MH(\mathcal{A})$ 中有

$$[A_1^{\cdot}]\diamond[A_2^{\cdot}]=\sum_{I^{i},M^{i},N^{i},X^{i}\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}\prod_{i\in\mathbf{Z}}\Big(g_{I^{i}M^{i}}^{A_1^{i}}g_{M^{i}N^{i}}^{X^{i}}g_{N^{i}I^{i-1}}^{A_2^{i}}\cdot\frac{a_{M^{i}}a_{I^{i}}a_{N^{i}}}{a_{X^{i}}}\frac{\langle\hat{A}_1^{i}-\hat{M}^{i},\hat{M}^{i}\rangle}{\langle\hat{M}^{i+1},\hat{A}_1^{i}-\hat{M}^{i}\rangle}\Big)\cdot\overleftarrow{\prod_{i\in\mathbf{Z}}}K_{\hat{A}_1^{i-1}-\hat{M}^{i-1},i}\diamond\overleftarrow{\prod_{i\in\mathbf{Z}}}U_{X^{i},i}.$$

证明　由于 $A_1^{\cdot},A_2^{\cdot}\in C^{b}(\mathcal{A})$，则存在 $l,r(l\leqslant r)$，使得当 $i>r$ 或 $i<l$ 时有 $A_1^{i}=0$，$A_2^{i}=0$. 从而当 $i>r$ 或 $i<l$ 时，$X^{i}=0,N^{i}=0,M^{i}=0$；当 $i\geqslant r$ 或 $i<l$ 时，$I^{i}=0$. 所以，当 $i>r$ 或 $i<l$ 时，

$$g_{I^{i}M^{i}}^{A_1^{i}}=1,g_{M^{i}N^{i}}^{X^{i}}=1,g_{N^{i}I^{i-1}}^{A_2^{i}}=1,$$

$$a_{M^{i}}=1,a_{N^{i}}=1,a_{X^{i}}=1,$$

$$\langle\hat{A}_1^{i}-\hat{M}^{i},\hat{M}^{i}\rangle=1,\langle\hat{M}^{i+1},\hat{A}_1^{i}-\hat{M}^{i}\rangle=1,$$

$$K_{\hat{A}_1^{i}-\hat{M}^{i}},i+1=[0],U_{X^{i},i}=[0],$$

当 $i\geqslant r$ 或 $i<l$ 时，$a_{I^{i}}=1$.

因为 $I^{l-1}=0,I^{r}=0$，易知 $g_{N^{l}I^{l-1}}^{A_2^{l}}$ 与 $g_{I^{r}M^{r}}^{A_1^{r}}$ 等于 1 或等于 0. 要使我们的乘积有意义，则有 $g_{N^{l}I^{l-1}}^{A_2^{l}}$ 与 $g_{I^{r}M^{r}}^{A_1^{r}}$ 等于 1，从而 $A_2^{l}\cong N^{l},A_1^{r}\cong M^{r}$. 故

$$g_{I^{r}M^{r}}^{A_1^{r}}=1,g_{N^{l}I^{l-1}}^{A_2^{l}}=1,a_{M^{r}}=a_{A_1^{r}},a_{N^{l}}=a_{A_2^{l}},$$

$$\langle\hat{M}^{r},\hat{A}_1^{r-1}-\hat{M}^{r-1}\rangle=\langle\hat{A}_1^{r},\hat{A}_1^{r-1}-\hat{M}^{r-1}\rangle,$$

$$\langle\hat{A}_1^{r}-\hat{M}^{r},\hat{M}^{r}\rangle=1,\langle\hat{M}^{r+1},\hat{A}_1^{r}-\hat{M}^{r}\rangle=1,$$

$$K_{\hat{A}_1^{r}}-\hat{M}^{r},r+1=[0].$$

为证明定理，可对复形 $A_1^{\cdot}$ 和 $A_2^{\cdot}$ 同时作平移. 不妨设 $l=0$，此时 $A_1^{\cdot}$ 和 $A_2^{\cdot}$ 的宽度 $\leqslant r+1$. 下面对 r 作归纳.

当 $r=1$ 时，据命题 2.4 及命题 2.7 可得

$$[A_1^{\cdot}]\diamond[A_2^{\cdot}]=U_{A_1^1,1}\diamond U_{A_1^0,0}\diamond U_{A_2^1,1}\diamond U_{A_2^0,0}=$$

$$\sum_{M^0,N^1\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}\gamma_{A_2^1A_1^0}^{M^0N^1}\frac{a_{A_2^1}a_{A_1^0}}{a_{M^0}a_{N^1}}\langle\hat{A}_1^0-\hat{M}^0,\hat{M}^0\rangle U_{A_1^1,1}\diamond K_{\hat{A}_1^0-\hat{M}^0,1}\diamond U_{N^1,1}\diamond U_{M^0,0}\diamond U_{A_2^0,0}=$$

$$\sum_{M^0,N^1,X^1,X^0\in\mathrm{Iso}(\mathcal{A})}\gamma_{A_2^1A_1^0}^{M^0N^1}g_{M^0A_2^0}^{X^0}g_{A_1^1N^1}^{X^1}\frac{a_{A_2^1}a_{A_1^0}}{a_{M^0}a_{N^1}}\frac{a_{A_1^1}a_{N^1}}{a_{X^1}}\frac{a_{M^0}a_{A_2^0}}{a_{X^0}}\frac{\langle\hat{A}_1^0-\hat{M}^0,\hat{M}^0\rangle}{\langle\hat{A}_1^1,\hat{A}_1^0-\hat{M}^0\rangle}=$$

$$K_{\hat{A}_1^0-\hat{M}^0,1}\diamond U_{X^1,1}\diamond U_{X^0,0}$$

$$\sum_{M^0, N^1, X^1, X^0, I^0 \in \mathrm{Iso}(A)} g^{A_1^0}_{I^0 M^0} g^{X^0}_{M^0 A_2^0} g^{X^1}_{A_1^1 N^1} g^{A_2^1}_{N^1 I^0} \cdot \frac{a_{M^0} a_{N^1} a_{I^0} a_{A_1^1} a_{A_2^0}}{a_{X^1} a_{X^0}} \frac{\langle \hat{A}_1^0 - \hat{M}^0, \hat{M}^0 \rangle}{\langle \hat{A}_1^1, \hat{A}_1^0 - \hat{M}^0 \rangle} \cdot K_{\hat{A}_1^0 - \hat{M}^0, 1} \diamond U_{X^1, 1} \diamond U_{X^0, 0}.$$

由有界性及 $A_1^1 \cong M^1, A_2^0 \cong N^0$ 知 $r=1$ 时结论成立.

设 $r=n-1$ 时结论成立. 则当 $r=n$ 时，据命题 2.4 及命题 2.7 有

$$[A_1^{\cdot}] \diamond [A_2^{\cdot}] = U_{A_1^n, n} \diamond U_{A_1^{n-1}, n-1} \diamond \cdots \diamond U_{A_1^0, 0} \diamond U_{A_2^n, n} \diamond U_{A_2^{n-1}, n-1} \diamond \cdots \diamond U_{A_2^0, 0} =$$
$$U_{A_1^n, n} \diamond U_{A_1^{n-1}, n-1} \diamond U_{A_2^n, n} \diamond U_{A_1^{n-2}, n-2} \diamond \cdots \diamond U_{A_1^0, 0} \diamond U_{A_2^{n-1}, n-1} \diamond \cdots \diamond U_{A_2^0, 0} =$$
$$\sum_{M^{n-1}, N^n \in \mathrm{Iso}(A)} \gamma^{M^{n-1} N^n}_{A_2^n A_1^{n-1}} \frac{a_{A_2^n} a_{A_1^{n-1}}}{a_{M^{n-1}} a_{N^n}} \cdot \langle \hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1}, \hat{M}^{n-1} \rangle U_{A_1^n, n} \diamond$$
$$K_{\hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1}, n} \diamond U_{N^n, n} \diamond U_{M^{n-1}, n-1} \diamond U_{A_1^{n-2}, n-2} \diamond \cdots \diamond U_{A_1^0, 0} \diamond U_{A_2^{n-1}, n-1} \diamond \cdots \diamond U_{A_2^0, 0} =$$
$$\sum_{M^{n-1}, N^n, X^n, I^{n-1} \in \mathrm{Iso}(A)} g^{A_1^{n-1}}_{I^{n-1} M^{n-1}} g^{X^n}_{A_1^n N^n} g^{A_2^n}_{N^n I^{n-1}} \cdot \frac{a_{A_1^n} a_{N^n} a_{I^{n-1}}}{a_{X^n}} \frac{\langle \hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1}, \hat{M}^{n-1} \rangle}{\langle \hat{A}_1^n, \hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1} \rangle} \cdot$$
$$K_{\hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1}, n} \diamond U_{X^n, n} \diamond U_{M^{n-1}, n-1} \diamond U_{A_1^{n-2}, n-2} \diamond \cdots \diamond U_{A_1^0, 0} \diamond U_{A_2^{n-1}, n-1} \diamond \cdots \diamond U_{A_2^0, 0}.$$

则由归纳假设可知

$$\text{上式} = \sum_{M^{n-1}, N^n, X^n, I^{n-1} \in \mathrm{Iso}(A)} g^{A_1^{n-1}}_{I^{n-1} M^{n-1}} g^{X^n}_{A_1^n N^n} g^{A_2^n}_{N^n I^{n-1}} \cdot \frac{a_{A_1^n} a_{N^n} a_{I^{n-1}}}{a_{X^n}} \frac{\langle \hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1}, \hat{M}^{n-1} \rangle}{\langle \hat{A}_1^n, \hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1} \rangle} \cdot$$
$$K_{\hat{A}_1^{n-1} - \hat{M}^{n-1}, n} \diamond U_{X^n, n} \Big(\sum_{I^i, M^i, N^i, X^i \in \mathrm{Iso}(A), i \in \mathbf{Z}} \prod \Big(g^{A_1^i}_{I^i M^i} g^{X^i}_{M^i N^i} g^{A_2^i}_{N^i I^{i-1}} \frac{a_{M^i} a_{I^i} a_{N^i}}{a_{X^i}} \frac{\langle \hat{A}_1^i - \hat{M}^i, \hat{M}^i \rangle}{\langle \hat{M}^{i+1}, \hat{A}_1^i - \hat{M}^i \rangle} \Big) \cdot$$
$$\overleftarrow{\prod_{i \in \mathbf{Z}}} K_{\hat{A}_1^{i-1} - \hat{M}^{i-1}, i} \diamond \overleftarrow{\prod_{i \in \mathbf{Z}}} U_{X^i, i} \Big).$$

由有界性知及 $M^n \cong A_1^n$ 知

$$\text{上式} = \sum_{I^i, M^i, N^i, X^i \in \mathrm{Iso}(A), i \in \mathbf{Z}} \prod \Big(g^{A_1^i}_{I^i M^i} g^{X^i}_{M^i N^i} g^{A_2^i}_{N^i I^{i-1}} \frac{a_{M^i} a_{I^i} a_{N^i}}{a_{X^i}} \frac{\langle \hat{A}_1^i - \hat{M}^i, \hat{M}^i \rangle}{\langle \hat{M}^{i+1}, \hat{A}_1^i - \hat{M}^i \rangle} \Big) \overleftarrow{\prod_{i \in \mathbf{Z}}} K_{\hat{A}^{i-1} - \hat{M}^{i-1}, i} \diamond \overleftarrow{\prod_{i \in \mathbf{Z}}} U_{X^i, i}.$$

故 $r=n$ 时结论成立. 证毕.

参考文献:

[1] Ringel CM. Hall algebras and quantum groups [J]. Invent Math, 1990, 101: 583.

[2] Green J. Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups [J]. Invent Math, 1995, 120: 361.

[3] Xiao J. Drinfeld double and Ringel-Green theory of Hall algebras [J]. J Algebra, 1997, 190: 100.

[4] Bridgeland T. Quantum groups via Hall algebras of complexes [J]. Ann Math. 2013, 177: 739.

[5] Gorsky M. Semi-derived Hall algebras and tilting invariance of Bridgeland-Hall algebras [J]. arXiv: math/1303.5879v2 [math. QA].

[6] Lu M, Peng L G. Modified Ringel-Hall algebras and Drinfeld double [J]. arXiv: 1608.03106 V1 [math. RT].

[7] Lin J, Peng L G. Modified Ringel-Hall algebras, Green formula and derived Hall algebras [J]. J Algebra, 2019, 526: 81.

[8] Peng L G. Some Hall polynomials for representation-finite trivial extention algebras [J]. J Algebra, 1997, 197: 1.

[9] Riedtmann C. Lie algebras generated by indecomposables [J]. J Algebra, 1994, 170: 526.

[10] 林记. $\widetilde{A}_n$-型丛倾斜代数的 Cohen-Macaulay Auslander 代数的导出等价分类 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2016, 53: 967.

[11] 林记. $D^b(A)$的 A－整体维数 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2011, 48: 1266.

引用本文格式:

中　文: 陈悦. 有界复形的 Modified Ringel Hall 代数的结构常数 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 209.

英　文: Chen Y. The structure constants of the modified Ringel Hall algebras over bounded complexes [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2019, 56: 209.