doi：103969/j. issn. 0490-6756. 2018. 06. 003

四阶奇异摄动问题的弱 Galerkin 有限元法

王 琳，罗 鲲，张世全
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘 要：本文研究二维和三维情形下四阶奇异摄动问题弱 Galerkin 有限元法的构造与分析. 我们引入了弱二阶偏导数算子，对单元内部的位移变量采用连续分片 $k(k\geqslant 2)$ 次多项式逼近，对单元边界上的位移梯度采用间断分片 $k-1$ 次多项式逼近. 基于 Scott-Zhang 和 L^2 投影算子的性质，该方法能够得到能量范数的最优误差估计，且针对边界层问题，能够得到与摄动参数一致无关的收敛阶. 数值算例验证了理论结果.

关键词：弱 Galerkin 有限元方法，四阶奇异摄动问题，边界层
中图分类号：O241.82 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2018)06-1141-07

Weak Galerkin finite element method for fourth order singular perturbation problems

WANG Lin, *LUO Kun*, *ZHANG Shi-Quan*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper, we discuss the construction and analysis of the weak Galerkin (WG) finite element method for the fourth order singular perturbation problems in two and three dimensions. By introducing the weak second order partial derivative operators, the WG method is constructed by adopting continuous piecewise polynomials of degree $k(k\geqslant 2)$ for the approximation to the displacement in the interior of elements, and discontinuous piecewise polynomials of degree $k-1$ for the approximations to the trace of displacement gradient on the inter-element boundaries. Based on the properties of the Scott-Zhang and L^2 projections, optimal error estimates in energy norm are derived. In addition, for the boundary layer case, we show that the methods are convergent uniformly with respect to the perturbation parameter. Numerical examples are provided to verify the theoretical results.

Keywords: Weak Galerkin finite element method; Fourth order singular perturbation problems; Boundary layer
(2010 MSC 65M60)

1 引 言

本文考虑四阶奇异摄动问题的弱 Galerkin 有限元方法[1-25]. 假设 $\Omega\subset\mathbf{R}^d\,(d=2,3)$ 是凸多边形或多面体区域，边界为 $\partial\Omega$. 考虑下述四阶奇异摄动问题：求解 u 满足

$$\begin{cases}\varepsilon^2\Delta^2 u-\Delta u=f, \text{ in } \Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial n}=0, \text{ on } \partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

其中，实参数 $0<\varepsilon\leqslant 1$，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 在边界 $\partial\Omega$ 上的外法向导数，右端项 $f\in L^2(\Omega)$.

收稿日期：2018-04-22
基金项目：国家自然科学基金(11401407)
作者简介：王琳(1993－)，女，四川内江人，硕士，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：603988270@qq.com
通讯作者：张世全. E-mail：shiquanzhang@scu.edu.cn

在二维情形下,模型可看作是薄板的线弹性问题,其中 u 代表薄板位移,参数 ε 定义为

$$\varepsilon = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)l^2 T},$$

其中 t 为板厚度,E 为弹性材料的杨氏模量,ν 为泊松比率,l 为板直径,T 为板末端施加的各向同性拉力密度的绝对值[7]. 在三维情形下,模型可看作定常 Cahn-Hilliard 方程的简化,其中 ε 表示相分离过度区的长度[3,11].

对于标准变分问题,需要构造包含于 $H^2(\Omega)$ 的有限元空间,即需要构造全局 C^1 连续的有限元函数. 这类有限元函数的构造十分困难,特别是针对三维问题. 而由于强边界层的影响,协调元在拟一致网格上也得不到好的逼近结果[10,13,14].

为克服上述困难,非协调元方法[25]是一种很好的选择. 作为求解四阶问题的最简单非协调元,Morley 元被经常提到,然而 Morley 元并不适用于求解二阶问题. Wang[19]证明了 Morley 元对二阶问题是不收敛的,Nilssen 等[10]也举出反例说明当摄动参数 ε 趋于零时 Morley 元的解是发散的. Wang 等[8,20]提出了一类针对四阶奇异摄动问题的修正 Morley 元方法,并将其应用到二维和三维情形,得到了能量范数关于摄动参数 ε 的一致收敛性. 此外, 基于非标准方法[23,24],Brenner 和 Neilan[1]采用对称 C^0 内部惩罚法,利用惩罚项代替有限元函数的 C^1 连续性得到了关于能量范数的一致稳定误差估计.

2011 年,Wang 和 Ye 在文献[16]中首次提出了用于求解二阶椭圆问题的弱 Galerkin (WG)有限元方法. 随后,该方法被大量应用于求解偏微分方程,如 Stokes 方程[4,17]、重调和方程[5,9,21]及弹性方程[22]等.

本文利用弱 Galerkin 有限元方法求解上述四阶奇异摄动问题:引入弱函数 $v=\{v_0,v_g\}$ 定义函数 v 的内部 v_0 及梯度的边界迹 v_g,采用连续分片 k 次多项式逼近弱函数的内部 v_0,采用间断分片 $k-1$ 次多项式逼近弱函数的边界迹 v_g. 理论分析表明该方法能够得到能量范数意义下的最优误差估计. 针对边界层问题,也能得到与摄动参数 ε 无关的一致稳定估计.

本文剩下部分结构如下:第二节给出常用符号及弱函数与弱导数的定义;第三节介绍有限元离散格式;四、五节给出离散格式的误差估计;六、七节给出数值算例及结论.

2 预备知识

2.1 基本记号

假设 $D\subset\mathbf{R}^d$,$(d=2,3)$为有界开区域,m 为非负整数,$H^m(D)$表示区域 D 上的 m 阶 Sobolev 空间,范数和半范数分别记为 $\|\cdot\|_{m,D}$,$|\cdot|_{m,D}$,内积记为$(\cdot,\cdot)_{m,D}$. $H_0^m(D)$为表示 $H^m(\Omega)$在空间 $C_0^\infty(D)$中的闭包.

令 $T_h=\cup\{T\}$表示区域 Ω 的正则单纯形剖分,网格尺度 $h=\max_{T\in T_h}h_T$,其中 h_T 为包含单元 T 的最小圆/球的直径. 记 $\varepsilon_h=\cup\{\partial T\}$为 T_h 中所有单元边界/面的集合,ε_h^0 为所有单元内部边/面的集合,ε_h^b 为剖分单元 T 的边界边/面的集合.

对任意的正整数 k,$P_k(T)$表示定义在单元 T 上次数不大于 k 的所有多项式的集合. 记 $P_k(T_h)$为剖分 T_h 上的次数不大于 k 的分片多项式的集合,$P_k(T_h)=\{v:v\in P_k(T),\forall T\in T_h\}$.

在离散 Sobolev 空间 $H^m(T_h)=\{v\in L^2(\Omega):v|_T\in H^m(T),T\in T_h\}$中,定义离散范数及半范

$$\|v\|_{m,h}^2=\sum_{T\in T_h}\|v\|_{m,T}^2,$$

$$|v|_{m,h}^2=\sum_{T\in T_h}|v|_{m,T}^2.$$

最后,当区域 $D=\Omega$ 时,简记 $\|\cdot\|_{m,\Omega}=\|\cdot\|_m$,$|\cdot|_{m,\Omega}=|\cdot|_m$. 文中用 $X\lesssim Y$ 表示 $X\leqslant CY$,其中 C 为与网格尺度 h 及参数 ε 无关的常数.

2.2 弱函数及弱二阶导数

对任意的单元 $T\in T_h$,边界为 ∂T. 定义 T 上的弱函数 $v=\{v_0,v_g\}$,其中 $v_0\in L^2(T)$,$v_g=(v_{g1},\cdots,v_{gd})'\in[L^2(\partial T)]^d$,这里 v_0 表示弱函数 v 在单元 T 内部的值,v_g 为弱函数 v 的梯度在单元边界 ∂T 上的值. 值得注意的是,v_g 并不是 ∇v_0 在边界的限制,它们之间没有必然联系.

定义单元 T 上的弱函数空间 $V(T)$ 为

$$V(T)=\{v=\{v_0,v_g\}:v_0\in L^2(T),\ v_g\in[L^2(\partial T)]^d\}.$$

定义弱函数 v 的弱梯度 $\nabla_w v$ 为

$$\nabla_w v=\{\nabla v_0,v_g\}.$$

记 $n=(n_1,\cdots,n_d)'$为单元边界 ∂T 上的单位外法向. 下面定义弱函数 v 的离散弱二阶导数 $\partial_{ij,w,m,T}^2 v$.

定义 2.1 对任意的 $v\in V(T)$,v 的离散弱二阶导数 $\partial_{ij,w,m,T}^2 v$,$(i,j=1,\cdots,d)$,定义为 $P_m(T)$中存在且唯一的多项式,且对任意的 $\varphi\in P_m(T)$满足

$$(\partial_{ij,w,m,T}^2 v,\varphi)_T=$$

$-(\partial_i v_0, \partial_j \varphi)_T + \langle v_{gi}, \varphi n_j \rangle_{\partial T}.$

为简单起见,在不引起混淆的情况下,下面记 $(\partial^2_{ij,w} v)|_T = \partial^2_{ij,w,m,T}(v|_T)$.

3　弱 Galerkin 有限元离散

假设正整数 $k \geqslant 2$, 构造弱 Galerkin 有限元空间

$$V_h = \{v = \{v_0, v_g\} : v_0 \in H^1(\Omega),\ v_0|_T \in P_k(T), v_g|_e \in [P_{k-1}(e)]^d,\ \forall e \subset \partial T, T \in T_h\},$$

$$V_h^0 = \{v \in V_h : v_0 \in H_0^1(\Omega), v_g|_e = 0, \forall e \in \varepsilon_h^b\},$$

其中v_g在单元边界 $e \in \varepsilon_h$ 上为单值函数. 定义双线性型如下:

$$s(v,w) = \sum_{T \in T_h} \alpha \langle \nabla v_0 - v_g, \nabla w_0 - w_g \rangle_{\partial T},$$

其中 $\alpha|_T = \varepsilon^2 h_T^{-1} + \varepsilon$. 则离散格式为: 寻找 $u_h = \{u_0, u_g\} \in V_h^0$, 使得

$$\varepsilon^2 (\partial^2_w u_h, \partial^2_w v)_h + (\nabla_w u_h, \nabla_w v)_h + s(u_h, v) = (f, v_0) \tag{2}$$

对任意的 $v = \{v_0, v_g\} \in V_h^0$ 成立, 其中

$$(\partial^2_w u, \partial^2_w v)_h = \sum_{T \in T_h} \sum_{i,j=1}^{d} (\partial^2_{ij,w,k-2,T} u, \partial^2_{ij,w,k-2,T} v)_T,$$

$$(\nabla_w u_h, \nabla_w v)_h = \sum_{T \in T_h} (\nabla u_0, \nabla v_0)_T.$$

引理 3.1　对任意的 $v = \{v_0, v_g\} \in V_h^0$, 定义

$$\| v \|_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 (\partial^2_w v, \partial^2_w v)_h + (\nabla_w v, \nabla_w v)_h + s(v,v).$$

则 $\| v \|_\varepsilon$ 是线性空间 V_h^0 上的范数.

证明　我们仅需证明 $\| v \|_\varepsilon$ 的正定性. 假设存在函数 $v \in V_h^0$, 使得 $\| v \|_\varepsilon = 0$. 则由 $\| v \|_\varepsilon$ 的定义可得$\partial^2_{ij,w} v = 0, i,j = 1, \cdots, d, \partial_i v_0 = v_{gi}$ 及 $\nabla v_0 = 0$. 根据 $\nabla v_0 = 0$ 及 $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ 可得 $v_0 \equiv 0$. 又由 $\partial_i v_0 = v_{gi}$ 可得 $v_{gi} = 0, i = 1, \cdots, d$. 证毕.

定理 3.2　离散方程(2)的解存在且唯一.

证明　由于线性方程(2)的方程个数等于未知量个数,即解的存在性等价于唯一性,我们仅需证明解的唯一性. 假设存在解 u_h^1 和 u_h^2 满足离散方程. 令 $e_h = u_h^1 - u_h^2$. 根据离散方程的定义, 可以得到

$$\varepsilon^2 (\partial^2_w e_h, \partial^2_w v)_h + (\nabla_w e_h, \nabla_w v)_h + s(e_h, v) = 0, \forall v \in V_h^0.$$

由于 $e_h = u_h^1 - u_h^2 \in V_h^0$, 在上式中取 $v = e_h$ 可得

$$\varepsilon^2 (\partial^2_w e_h, \partial^2_w e_h)_h + (\nabla_w e_h, \nabla_w e_h)_h + s(e_h, e_h) = 0,$$

根据 $\| v \|_\varepsilon^2$ 范数的定义. 有 $e_h = 0$. 证毕.

4　误差分析

4.1　L^2 投影及逼近性质

本节给出关于 Scott-Zhang 插值算子的定义及在误差分析中有用的不等式. 下面先给出投影的定义及性质.

引理 4.1[9]　假设 $k \geqslant 2, d = 2,3$. 则存在 Scott-Zhang 插值算子 $Q_0 : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \cap P_k(T_h)$, 使得下面等式成立:

$$(Q_0 u, v)_T = (u, v)_T, v \in P_{k-d-1}(T),\ \forall k \geqslant d+1, \forall T \in T_h,$$

$$\langle Q_0 u, v \rangle_e = \langle u, v \rangle, v \in P_{k-d}(e),\ \forall k \geqslant d, \forall e \in \varepsilon_h.$$

在剖分 T_h 上, 对 $v \in H^2(\Omega)$. 定义 $H^2(\Omega)$到 V_h 的投影$Q_h u$: $Q_h v = \{Q_0 v, Q_b \nabla v\}$, 其中 Q_0 为引理 4.1 中定义的 Scott-Zhang 插值算子, Q_b 为 $[L^2(e)]^d$ 到$[P_{k-1}(e)]^d$ 的标准L^2 投影.

引理 4.2　对任意的单元 $T \in T_h$, 定义标准 L^2 投影 $\Pi_h : L^2(T) \to P_{k-2}(T)$. 则对任意 $v \in H^2(T)$, 投影 Q_h 具有如下的交换性:

$$\partial^2_{ij,w}(Q_h v) = \Pi_h(\partial^2_{ij} v), \forall i,j = 1, \cdots, d \tag{3}$$

证明　对任意的 $v \in H^2(T), \varphi \in P_{k-2}(T)$, 根据离散弱二阶导数的定义及投影的性质, 利用分部积分可得

$$\begin{aligned}(\partial^2_{ij,w}(Q_h v), \varphi)_T = {} & -(\partial_i Q_0 v, \partial_j \varphi)_T + \langle Q_b(\partial_i v), \varphi n_j \rangle_{\partial T} = \\ & (Q_0 v, \partial^2_{ji} \varphi)_T - \langle Q_0 v, \partial_j \varphi n_i \rangle_{\partial T} + \\ & \langle Q_b(\partial_i v), \varphi n_j \rangle_{\partial T} = \\ & (v, \partial^2_{ji} \varphi)_T - \langle v, \partial_j \varphi n_i \rangle_{\partial T} + \langle \partial_i V, \varphi n_j \rangle_{\partial T} = \\ & (\partial^2_{ij} v, \varphi)_T = (\Pi_h \partial^2_{ij} v, \varphi)_T.\end{aligned}$$

证毕.

根据文献[12,15], 有下面的误差估计.

引理 4.3　假设 T_h 为区域 Ω 的单纯型正则剖分. 则对任意的 $v \in H^{m+1}(\Omega)$, 下面不等式成立

$$h^{2s} |u - Q_0 u|^2_{s,h} \lesssim h^{2m+2} |u|^2_{m+1},\ \forall 0 \leqslant s \leqslant m \leqslant k \tag{4}$$

$$\sum_{T \in T_h} \| u - Q_0 v \|^2_{\partial T} \lesssim h^{2m+1} | v |^2_{m+1},\ \forall 0 \leqslant m \leqslant k \tag{5}$$

引理 4.4　假设 T_h 为区域 Ω 的正则单纯型有限元剖分, $T \in T_h$. 则对任意的 $v \in H^{m+1}(T)$, 下面不等式成立:

$$\| u - Q_b v \|_{\partial T} \lesssim h^{m+1/2} |v|_{m+1,T},$$

$\forall\, 0\leqslant m\leqslant k-1$ (6)

$h_T^s|\partial_{ij}^2 v-\Pi_h\partial_{ij}^2 v|_{s,T}\lesssim h^{m-1}|v|_{m+1,T}$,

$\forall\, 1\leqslant s+1\leqslant m\leqslant k$ (7)

$\|\partial_{ij}^2 v-\Pi_h\partial_{ij}^2 v\|_{\partial T}\lesssim h^{m-3/2}|v|_{m+1,T}$,

$\forall\, 2\leqslant m\leqslant k$ (8)

4.2 误差方程

假设 $u_h=\{u_0,u_g\}$ 为离散方程(2)的解. 方程(1)的真解 u 到弱有限元空间 V_h 中的投影为

$$Q_h u=\{Q_0 u,Q_b(\nabla u)\}.$$

记误差函数 $e_h=Q_h u-u_h=\{e_0,e_g\}$. 下面给出离散格式的误差方程.

引理 4.5 假设 $u_h=\{u_0,u_g\}$ 为离散方程(2)的解,$u\in H^3(\Omega)$ 为方程(1)的真解. 则误差函数 e_h 满足下述方程

$$\varepsilon^2(\partial_w^2 e_h,\partial_w^2 v)_h+(\nabla_w e_h,\nabla_w v)_h+s(e_h,v)=E(u,v) \tag{9}$$

对任意的 $v=\{v_0,v_g\}\in V_h^0$ 成立,其中

$$E(u,v)=\varepsilon^2\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^{d}\langle(\Pi_h\partial_{ij}^2 u-\partial_{ij}^2 u)n_j,\partial_i v_0-v_{gi}\rangle_{\partial T}+(\nabla(Q_0 u-u),\nabla v_0)_h+s(Q_h u,v).$$

证明 由 u_h 为离散方程(2)的解,则对任意的 $v\in V_h^0$,下面等式成立:

$$\varepsilon^2(\partial_w^2 u_h,\partial_w^2 v)_h+(\nabla_w u_h,\nabla_w v)_h+s(u_h,v)=(f,v_0).$$

根据投影算子的定义及交换性(3)、弱二阶导数的定义,利用分部积分可得

$$\begin{aligned}(\partial_{ij,w}^2(Q_h u),\partial_{ij,w}^2 v)_T&=(\Pi_h\partial_{ij}^2 u,\partial_{ij,w}^2 v)_T=\\&-(\partial_j(\Pi_h(\partial_{ij}^2 u)),\partial_i v_0)_T+\langle\Pi_h\partial_{ij}^2 u n_j,v_{gi}\rangle_{\partial T}=\\&(\Pi_h(\partial_{ij}^2 u),\partial_{ij}^2 v_0)_T-\langle\Pi_h\partial_{ij}^2 u n_j,\partial_i v_0-v_{gi}\rangle_{\partial T}=\\&(\partial_{ij}^2 u,\partial_{ij}^2 v_0)_T-\langle\Pi_h\partial_{ij}^2 u n_j,\partial_i v_0-v_{gi}\rangle_{\partial T}.\end{aligned}$$

对 $(\partial_w^2 Q_h u,\partial_w^2 v)_h$,由 $u\in H^3(\Omega)$,$v_0\in H_0^1(\Omega)$,利用分部积分知上式等于

$$\begin{aligned}(\partial_w^2 Q_h u,\partial_w^2 v)_h&=\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^{d}(-(\partial_{ijj}^3 u,\partial_i v_0)_T-\langle\Pi_h\partial_{ij}^2 u n_j,\partial_i v_0-v_{gi}\rangle_{\partial T}+\langle\partial_{ij}^2 u n_j,\partial_i v_0\rangle_{\partial T})=\\&(\Delta^2 u,v_0)_h-\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^{d}\langle(\Pi_h\partial_{ij}^2 u-\partial_{ij}^2 u,(\partial_i v_0-v_{gi})n_j\rangle_{\partial T}.\end{aligned}$$

由 $f=\varepsilon^2\Delta^2 u-\Delta u$ 及 $v_0\in H_0^1(\Omega)$,根据分部积分可得

$$\begin{aligned}(f,v_0)&=\varepsilon^2(\Delta^2 u,v_0)_h-(\Delta u,v_0)_h=\\&\varepsilon^2(\Delta^2 u,v_0)_h+(\nabla u,\nabla v_0)_h-\sum_{T\in T_h}\langle\nabla u\cdot n,v_0\rangle_{\partial T}=\\&\varepsilon^2(\Delta^2 u,v_0)_h+(\nabla u,\nabla v_0)_h.\end{aligned}$$

结合上述三个等式,可得误差方程成立. 证毕.

4.3 误差估计

本节将给出关于离散形式(2)的误差估计. 根据误差方程(9),我们需要估计函数 $E(u,v)$. 为简单起见,记

$$\begin{aligned}E(u,v)&=\\&\varepsilon^2\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^{d}\langle(\Pi_h\partial_{ij}^2 u-\partial_{ij}^2 u)n_j,\partial_i v_0-v_{gi}\rangle_{\partial T}+\\&(\nabla(Q_0 u-u),\nabla v)_h+s(Q_h u,v):=\\&\sum_1^3 E_i(u,v),\end{aligned}$$

其中 $E_i(u,v)$ 每一项一一对应.

定理 4.6 对任意的整数 $k\geqslant 2$,假设 $u\in H^{k+1}(\Omega)$ 是方程(1)的精确解,$u_h\in V_h$ 是离散方程(2)的解. 则有下面的误差估计

$$\|Q_h u-u_h\|_\varepsilon\lesssim(\varepsilon+h)h^{k-1}|u|_{k+1} \tag{10}$$

证明 根据误差方程(9),我们需要估计函数 $E(u,v)$. 对 $E_2(u,v)$,由 Cauchy-Schwarz 不等式及投影误差估计(4)可得

$$|E_2(u,v)|=|(\nabla(Q_0 u-u),\nabla v_0)_h|\lesssim h^k|u|_{k+1}|v_0|_1.$$

对 $E_1(u,v)$,由 Cauchy-Schwarz 不等式及投影误差估计(8)可得

$$\begin{aligned}|E_1(u,v)|&=\\&\varepsilon^2\Big|\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^{d}\langle(\Pi_h\partial_{ij}^2 u-\partial_{ij}^2 u,(\partial_i v_0-v_{gi})n_j\rangle_{\partial T}\Big|\lesssim\\&\varepsilon\Big(\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^{d}h_T\|\Pi_h\partial_{ij}^2 u-\partial_{ij}^2 u\|_{\partial T}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{T\in T_h}\varepsilon^2 h_T^{-1}\|\nabla v_0-v_g\|_{\partial T}^2\Big)^{1/2}\lesssim\\&\varepsilon h^{k-1}|u|_{k+1}\|v\|_\varepsilon.\end{aligned}$$

对 $E_3(u,v)$,由 Cauchy-Schwarz 不等式、三角不等式、投影误差估计(5)及(6)可得

$$\begin{aligned}|E_3(u,v)|&=\\&\Big|\sum_{T\in T_h}\alpha\langle\nabla Q_0 u-Q_b(\nabla u),\nabla v_0-v_g\rangle_{\partial T}\Big|\leqslant\\&\Big|\sum_{T\in T_h}\varepsilon^2 h_T^{-1}\langle\nabla Q_0 u-Q_b(\nabla u),\nabla v_0-v_g\rangle_{\partial T}\Big|+\\&\Big|\sum_{T\in T_h}\varepsilon\langle\nabla Q_0 u-Q_b(\nabla u),\nabla v_0-v_g\rangle_{\partial T}\Big|\lesssim\\&\varepsilon\Big(\sum_{T\in T_h}h_T^{-1}\|\nabla Q_0 u-\end{aligned}$$

$$Q_b(\nabla u)\|_{\partial T}^2)^{1/2}(\sum_{T\in T_h}\varepsilon^2 h_T^{-1}\|\nabla v_0-v_g\|_{\partial T}^2)^{1/2}+$$

$$(\sum_{T\in T_h}h_T\|\nabla Q_0 u-Q_b(\nabla u)\|_{\partial T}^2)^{1/2}$$

$$(\sum_{T\in T_h}\varepsilon^2 h_T^{-1}\|\nabla v_0-v_g\|_{\partial T}^2)^{1/2}\lesssim$$

$$(\varepsilon+h)h^{k-1}|u|_{k+1}\|v\|_\varepsilon.$$

综上，由范数 $\|v\|_\varepsilon$ 的定义，利用三角不等式可以得到误差估计(10). 证毕.

5　边界层和一致收敛性

从定理 4.6 的误差估计结果可知，能量范数半范 $(\varepsilon+h)|u|_{k+1}$ 有 $k-1$ 次最优收敛阶，但当 ε 趋于零时 $|u|_{k+1}$ 可能趋于无穷大. Nilssen 等在文献[10]中给出一个反例，说明当 $\varepsilon\to 0$ 时该反例的 $|u|_2$ 和 $|u|_3$ 均趋于无穷大，这时上述误差估计失效. 由此需要估计能量范数与 $|u|_k$，$|u|_{k+1}$ 无关的误差估计.

假设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为凸多边形区域，u^0 是下面退化问题的解

$$\begin{cases}-\Delta u^0=f,\ \text{in }\Omega,\\ u^0=0,\ \text{on }\partial\Omega\end{cases}\tag{11}$$

由文献[6]，有 $u^0\in H^2(\Omega)$ 且满足正则性估计

$$\|u^0\|_{H^2(\Omega)}\lesssim\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

在文献[10]中，Nilssen 给出方程的先验估计.

引理 5.1　假设 $f\in L^2(\Omega)$，$u\in H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)$ 为方程(1)的真解，$u^0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 为退化问题(11)的解. 则存在与 ε，f 无关的常数 C，使得下述不等式成立

$$\varepsilon^{1/2}|u|_2+\varepsilon^{3/2}|u|_3\leqslant C\|f\|_0,$$

$$|u-u^0|_1\leqslant C\varepsilon^{1/2}\|f\|_0.$$

定理 5.2　对任意的正整数 $k\geqslant 2$，假设 $u\in H^3(\Omega)$ 和 $u_h\in V_h$ 分别为方程(1)的精确解及离散方程(2)的解，则有下述误差估计

$$\|Q_h u-u_h\|_\varepsilon\lesssim h^{1/2}\|f\|_0\tag{12}$$

证明　根据 Cauchy-Schwarz 不等式、三角不等式、投影误差估计(4)及引理 5.1 可得

$$|E_2(u,v)|=|(\nabla(Q_0u-u),\nabla v_0)_h|\lesssim$$

$$(|u-u^0-Q_0(u-u^0)|_1+$$

$$|u^0-Q_0u^0|_1)|v_0|_1\lesssim$$

$$(h^{1/2}(\varepsilon^{-1/2}|u-u_0|_1)^{1/2}(\varepsilon^{1/2}|u-u^0|_2)^{1/2}+$$

$$h|u^0|_2)|v_0|_1\lesssim h^{1/2}\|f\|_0\|v_0\|_\varepsilon.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式、迹不等式、投影误差估计(8)及引理 5.1 得到

$$|E_1(u,v)|\lesssim\varepsilon^2(\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^d\|\Pi_h\partial_{ij}^2u-$$

$$\partial_{ij}^2u\|_{\partial T}^2)^{\frac12}(\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^d\|(\partial_iv_0-v_{gi})n_j\|_{\partial T}^2)^{\frac12}\lesssim$$

$$\varepsilon^{3/2}(\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^d\|\Pi_h\partial_{ij}^2u-\partial_{ij}^2u\|_{\partial T}^2)^{\frac12}\cdot$$

$$(\sum_{T\in T_h}\sum_{i,j=1}^d\varepsilon\|(\partial_iv_0-v_{gi})n_j\|_{\partial T}^2)^{\frac12}\lesssim$$

$$h^{1/2}\varepsilon^{3/2}|u|_3\|v\|_\varepsilon\lesssim h^{1/2}\|f\|_0\|v\|_\varepsilon.$$

同理，我们可以得到

$$|E_3(u,v)|=|\sum_{T\in T_h}\alpha\langle\nabla Q_0u-$$

$$Q_b(\nabla u),\nabla v_0-v_g\rangle_{\partial T}|\leqslant$$

$$|\sum_{T\in T_h}\varepsilon^2h_T^{-1}\langle\nabla Q_0u-Q_b(\nabla u),\nabla v_0-v_g\rangle_{\partial T}|+$$

$$|\sum_{T\in T_h}\varepsilon\langle\nabla Q_0u-Q_b(\nabla u),\nabla v_0-v_g\rangle_{\partial T}|\lesssim$$

$$\varepsilon(\sum_{T\in T_h}h_T^{-1}\|\nabla Q_0u-$$

$$Q_b\nabla u)\|_{\partial T}^2)^{1/2}(\sum_{T\in T_h}\varepsilon^2h_T^{-1}\|\nabla v_0-v_g\|_{\partial T}^2)^{1/2}+$$

$$\varepsilon^{1/2}(\sum_{T\in T_h}\|\nabla Q_0u-Q_b\nabla u)\|_{\partial T}^2)^{1/2}\cdot$$

$$(\sum_{T\in T_h}\varepsilon\|\nabla v_0-v_g\|_{\partial T}^2)^{1/2}\lesssim$$

$$h^{1/2}\varepsilon|u|_2^{1/2}|u|_3^{1/2}\|v\|_\varepsilon+h^{1/2}\varepsilon^{1/2}|u|_2\|v\|_\varepsilon\lesssim$$

$$h^{1/2}\|f\|_0\|v\|_\varepsilon.$$

综合上述三个不等式，利用三角不等式可得式(12). 证毕.

6　数值算例

本节将给出两个数值算例. 通过数值试验我们得到了与理论一致的数值结果.

例 6.1　设区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$u(x,y)=(\sin(\pi x)\sin(\pi y))^2$ 为问题(1)的精确解. 对 $\varepsilon\geqslant 0$，右端项 f 满足方程 $f=\varepsilon^2\Delta^2u-\Delta u$.

对计算区域 Ω，我们采用正则 $2\times n\times n$ 网格剖分，记网格尺度 $h=1/n$. 我们对 v_0 采用连续分片二次多项式逼近，v_g 采用分片线性多项式逼近. 针对不同参数 ε 及网格尺度 h，表 1 列举了能量范数的相对误差 $\|Q_hu-u_h\|_\varepsilon/\|Q_hu\|_\varepsilon$. 可以看出，针对不同的 ε，能量范数具有 1 精度，当 ε 接近 0 时，能量范数能达到 2 阶精度，与理论一致.

例 6.2　设区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$u(x,y)=\varepsilon(e^{-x/\varepsilon}+e^{-y/\varepsilon})-x^2y$ 为方程(1)的精确解，源项 $f=2y$.

注意到当 ε 接近零时 u 具有边界层

表 1 能量范数的相对误差(例 6.1)

Tab. 1 The relative error in the energy norm (Example 6.1)

$\varepsilon\backslash h$	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
2^{0}	6.48E-01	3.77E-01	2.06E-01	1.08E-01	5.57E-02
阶	—	0.86	0.94	0.97	0.99
2^{-2}	6.48E-01	3.77E-01	2.06E-01	1.08E-01	5.57E-02
阶	—	0.78	0.87	0.93	0.96
2^{-4}	3.16E-01	1.59E-01	8.46E-02	4.59E-02	2.45E-02
阶	—	0.99	0.91	0.88	0.90
2^{-6}	1.78E-01	6.03E-02	2.36E-02	1.12E-02	5.85E-03
阶	—	1.56	1.35	1.66	1.36
2^{-8}	1.49E-01	4.25E-02	1.20E-02	3.80E-03	1.49E-03
阶	—	1.81	1.82	1.66	1.36
2^{-10}	1.43E-01	3.93E-02	1.03E-02	2.70E-03	7.49E-04
阶	—	1.86	1.94	1.93	1.85

$$|u|_2 \approx \varepsilon^{-1/2},\ |u|_3 \approx \varepsilon^{-3/2}.$$

我们采用与算例 6.1 中相同的网格剖分及多项式逼近.从表 2 中可以看出,当 ε 接近 1 时能够得到 1 阶精度,当 ε 趋于 0 时能量范数的收敛阶降为 0.5 阶.可以注意到当 ε/h 比值相同时范数具有相同的收敛阶,与定理 5.2 的理论结果一致.

表 2 能量范数的相对误差(例 6.2).

Tab. 2 The relative error in the energy norm (Example 6.2)

$\varepsilon\backslash h$	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
2^{0}	1.42E-01	7.62E-02	3.97E-02	2.03E-02	1.02E-02
阶	—	0.90	0.94	0.97	0.98
2^{-1}	1.35E-01	7.51E-02	4.02E-02	2.09E-02	1.06E-02
阶	—	0.85	0.90	0.95	0.97
2^{-2}	1.67E-01	9.73E-02	5.39E-02	2.86E-02	1.48E-02
阶	—	0.78	0.85	0.91	0.95
2^{-3}	2.27E-01	1.39E-01	7.98E-02	4.38E-02	2.31E-02
阶	—	0.71	0.80	0.87	0.92
2^{-4}	3.16E-01	1.59E-01	8.46E-02	4.59E-02	2.45E-02
阶	—	0.60	0.72	0.81	0.88
2^{-5}	2.82E-01	2.09E-01	1.38E-01	8.36E-02	4.76E-02
阶	—	0.43	0.60	0.73	0.81
2^{-6}	1.78E-01	6.03E-02	2.36E-02	1.12E-02	5.85E-03
阶	—	0.26	0.43	0.60	0.73
2^{-7}	1.95E-01	1.78E-01	1.49E-01	1.11E-01	7.31E-02
阶	—	0.14	0.26	0.42	0.60
2^{-8}	1.49E-01	4.25E-02	1.20E-02	3.80E-03	1.49E-03
阶	—	0.07	0.14	0.25	0.42

7 结 论

本文研究了四阶奇异摄动问题的弱 Galerkin 有限元方法.我们利用 C^0 连续函数逼近位移变量,避免了构造 C^1 连续高次多项式的困难并减小了计算量.同时,通过恰当的空间匹配,选取合适的稳定项系数,我们得到与摄动参数 ε 一致无关的误差估计,克服边界层效应.方法的构造方式能够应用于其它非稳态抛物摄动问题,如非稳态的 Cahn-Hilliard 型方程等.

参考文献：

[1] Brenner C S, Neilan M. A C^0 interior penalty method for a fourth order elliptic singular perturbation problem [J]. Siam J Numer Anal, 2011, 43: 869.

[2] Brenner C S, Scott L R. The mathematical theory of finite element methods [M]. New York: Springer-Verlag, 2008.

[3] Cahn J W, Elliott C M, Cohen A N. The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature [J]. Eur J Appl Math, 1996, 7: 287.

[4] Chen G, Feng M, Xie X. Robust globally divergence-free weak Galerkin methods for stokes equations [J]. J Comput Math, 2016, 34: 549.

[5] Chen G, Feng M. A C^0 weak Galerkin finite element method for fourth-order elliptic problems [J]. Numer Meth Part D E, 2016, 32: 1090.

[6] Grisvard P. Elliptic problems in non-smooth domains [M]. Marshfield: Pitman Publishing Inc, 1985.

[7] Guzmán J, Leykekhman D, Neilan M. A family of non-conforming elements and the analysis of Nitsche's method for a singularly perturbed fourth order problem [J]. Calcolo, 2012, 49: 95.

[8] Wang M, Meng X. A robust finite element method for a 3-D elliptic singular perturbation problem [J]. J Comput Math, 2007, 25: 631.

[9] Mu L, Wang J, Ye X, *et al*. A C^0 weak Galerkin finite element method for the biharmonic equation [J]. J Sci Comput, 2014, 59: 473.

[10] Nilssen T, Tai X, Winther R. A robust nonconforming H^2 -element [J]. Math Comput, 2001, 70: 489.

[11] Cohen A N. On Cahn-Hilliard type equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1990, 15: 797.

[12] Scott L R, Zhang S. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions [J]. Math Comput, 1990, 54: 483.

[13] Semper B. Conforming finite element approximations for a fourth-order singular perturbation problem [J]. Siam J Numer Anal, 1992, 29: 1043.

[14] Semper B. Locking in finite-element approximations to long thin extensible beams [J]. Ima J Numer Anal, 1994, 14: 97.

[15] Shi Z, Wang M. Finite element method [M]. Beijing: Science Press, 2013.

[16] Wang J, Ye X. A weak Galerkin finite element method for second-order elliptic problems [J]. J Comput Appl Math, 2011, 241: 103.

[17] Wang J, Ye X. A weak Galerkin finite element method for the stokes equations [J]. Adv Comput Math, 2016, 43: 155.

[18] Wang L, Wu Y, Xie X. Uniformly stable rectangular elements for fourth order elliptic singular perturbation problems [J]. Numer Meth Part D E, 2013, 297: 21.

[19] Wang M. On the necessity and sufficiency of the patch test for convergence of nonconforming finite elements[J]. Siam J Numer Anal, 2002, 39: 363.

[20] Wang M, Xu J, Hu Y. Modified Morley element method for a fourth order elliptic singular perturbation problem [J]. J Comput Math, 2006, 24: 113.

[21] Ye X, Mu L. Weak Galerkin finite element methods for the biharmonic equation on polytonal meshes [J]. Numer Meth Part D E, 2014, 30: 1003.

[22] 刘邦繁. 平面弹性问题的弱 Galerkin 有限元方法 [J]. 四川大学学报:自然科学版, 2016, 53: 13.

[23] 付卫,王皓,张世全. 特征值问题的组合杂交有限元方法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2017, 54: 708.

[24] 潘雪琴,周琴,冯民富. 稳态自然对流问题的连续内罚有限元方法 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2014, 51: 1099.

[25] 张敏, 罗鲲, 张世全. 三维 Stokes 问题的一种非协调-协调有限元方法[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 37.

引用本文格式：

中　文：王琳，罗鲲，张世全. 四阶奇异摄动问题的弱 Galerkin 有限元法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：1141.

英　文：Wang L, Luo K, Zhang S Q. Weak Galerkin finite element method for fourth order singular perturbation problems [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2018, 55: 1141.