

doi: 10.3969/j.issn.0490-6756.2019.04.001

# 二维随机耦合 Logistic 映射的混沌特征

余文慧<sup>1</sup>, 高仕龙<sup>2,3</sup>

(1. 西华大学理学院, 成都 610039; 2. 乐山师范学院数学与信息科学学院, 乐山 614000;  
3. 乐山师范学院应用数学研究中心, 乐山 614000)

**摘要:** 本文研究二维随机耦合 Logistic 映射的混沌特征. 当系统的耦合系数满足两点分布时, 本文从相图、Lyapunov 指数的角度研究得出: 当耦合系数按一定的概率在混沌和非混沌区间跳跃时, 系统可按周期分岔和 Hopf 分岔走向混沌. 特别地, 系统轨道的概率密度函数揭示了系统状态的演化规律.

**关键词:** 二维 Logistic 映射; 混沌; Lyapunov 指数; 两点分布

**中图分类号:** O29 **文献标识码:** A **文章编号:** 0490-6756(2019)04-0581-07

## Chaotic characteristics of two dimensional random coupled Logistic map

YU Wen-Hui<sup>1</sup>, GAO Shi-Long<sup>2,3</sup>

(1. College of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China;

2. College of Mathematics and Information Science, Leshan Normal University, Leshan 614000, China;

3. Research Centre of Applied Mathematics, Leshan Normal University, Leshan 614000, China)

**Abstract:** The chaotic characteristics of two dimensional random coupled Logistic map are studied in this paper. The coupling coefficients of the system are considered to obey two points distribution, and the phase diagram and Lyapunov exponents are exploited to judge the system state. Numerical results show that the system can lead to chaos based on periodic bifurcation and Hopf bifurcation when the coupling coefficients jump between the chaotic and non-chaotic regions according to certain probability. In particular, the probability density functions of the system orbits reveal the evolution of the system.

**Keywords:** 2D-Logistic map; Chaos; Lyapunov exponent; Two points distribution

## 1 引言

Logistic 模型  $x = ux(1-x)$  最早出现在种群生态学的研究中, 常被用于模拟和分析生物种群的演化. 该模型是数学生态学家 May 于 1976 年发表在《自然》杂志上的一篇影响甚广的综述文献中提出的<sup>[1]</sup>. 这也是最早研究由倍周期分岔通向混沌的例子. 后来, Feigenbaum 证明, 一个非线性系统发

生倍周期分岔后必然会产生混沌<sup>[2,3]</sup>.

目前, 一维 Logistic 映射及其推广形式中的混沌现象得到了比较详尽的研究<sup>[4-10]</sup>. 而对二维 Logistic 映射中的混沌的研究尚不多见. 例如, 孙海坚<sup>[11]</sup>等人通过 LMGS 定义把 Logistic 映射的研究从一维推广到二维或者更高维. Kaneko<sup>[12]</sup>、Sakaguchi<sup>[13]</sup>和 Chowdhury<sup>[14]</sup>等人研究了二维 Logistic 映射的分岔. Hastings<sup>[15]</sup>, Udwardia<sup>[16]</sup>和 Lloyd<sup>[17]</sup>等

收稿日期: 2018-07-08

基金项目: 四川科技计划(2018JY0256); 四川省教育厅科研项目(16TD0029)

作者简介: 余文慧(1995-), 女, 安徽宿松人, 硕士研究生, 主要研究方向为随机混沌. E-mail: 2194318737@qq.com

通讯作者: 高仕龙. E-mail: lunan1027@126.com

探讨了生态学中虫口与人口的二维 Logistic 映射的混沌动力学. 王兴元等人<sup>[18]</sup>研究发现二维 Logistic 映射可按照不同的途径走向混沌,且通向混沌的道路与 Hopf 分岔、倍周期有关. 王立明<sup>[19]</sup>则利用分岔图研究了系统通向混沌的道路并确定了系统能够产生混沌的参数空间,并对奇怪吸引子进行了详细地描述.

二维 Logistic 映射中的混沌研究主要基于控制参数在定常空间内变化,所产生的混沌时间序列是确定而非随机的. 这极大地限制了混沌在保密通信<sup>[20]</sup>等工程领域中的应用. 本文考虑二维耦合 Logistic 映射,其控制参数满足两点分布. 我们从相图、Lyapunov 指数的角度研究了控制参数按一定的概率在混沌和非混沌区间跳跃时系统的混沌特征,并描述了系统轨道的概率密度函数随参数的演化进程.

## 2 二维 Logistic 映射的稳定性与分岔

根据 Euler 方法,Logistic 方程  $x = ux(1-x)$  可由差分方程

$$x_{n+1} = x_n + ux_n(1-x_n) \tag{1}$$

经迭代求解. 相应地,二维 Logistic 映射为

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + ux_n(1-x_n) \\ y_{n+1} = y_n + uy_n(1-y_n) \end{cases} \tag{2}$$

本文考虑具有一次耦合项的二维 Logistic 映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + ux_n(1-x_n) + ry_n \\ y_{n+1} = y_n + uy_n(1-y_n) + rx_n \end{cases} \tag{3}$$

当  $r = u$  时,式(1)经化简可得

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + u(x_n - x_n^2 + y_n) \\ y_{n+1} = y_n + u(y_n - y_n^2 + x_n) \end{cases} \tag{4}$$

其中  $u > 0$  称为耦合系数. 由式(4)可求得系统的不动点为  $p_1(0,0), p_2(2,2)$ .  $p_1, p_2$  的稳定性由式(4)的 Jacobian 矩阵决定,其 Jacobian 矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1+u-2ux_n & u \\ u & 1+u-2uy_n \end{bmatrix}$$

将  $p_1$  的坐标值代入矩阵  $A$  中,求出其特征值分别为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + 2u$ . 故可判断  $p_1$  是不稳定的. 类似得到  $p_2$  对应的特征值分别为  $\lambda_1 = 1 - 2u, \lambda_2 = 1 - 4u$ . 故可知当  $0 < u \leq 0.5$  时,  $p_2$  是稳定的,当  $u > 0.5$  时,  $p_2$  是不稳定的.

一般来说,当控制参数越过某个临界值时,会使系统的动力学性态发生定性变化,这种现象称为分岔. 混沌现象是由于解的突变产生的,解发生突

变的参数值称为分岔点. 一种规则的运动最多经过 3 次 Hopf 分岔就能演变为混沌状态<sup>[21]</sup>. 文献<sup>[22]</sup>详细介绍了当耦合系数为常数且  $u \in [0.497, 0.686]$ ,初始值为  $(x_0, y_0) = (0.4, 0.5)$  时系统(4)的状态演变,其轨道点纵坐标的分岔图如图 1(a).

通过观察分岔图,可以发现系统行为的演化过程为:当  $0.497 \leq u \leq 0.499$  时,轨道趋于一个不动点;随着的  $u$  增加,当  $0.499 \leq u \leq 0.500$  时,系统(4)由一个不动点经过倍周期分岔进入 2-周期点;随着  $u$  的继续增加,2-周期点逐渐失稳,系统(4)通过 Hopf 分岔进入混沌状态,此时混沌区间为:  $0.652 \leq u \leq 0.686$ . 特别地,图 1(b)是图 1(a)的局部放大,从中可以观察到,在一些周期窗口中有些分支线先分离再合并,而在一维 Logistic 映射分岔图中这些现象是观察不到的.

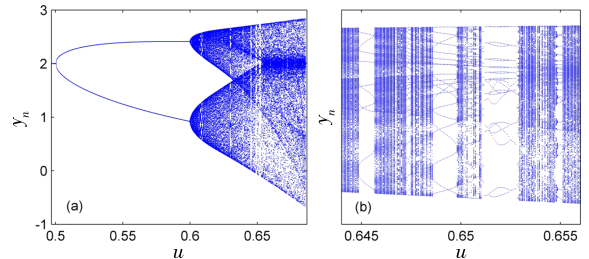


图 1 系统(4)在  $u$  取常数时的分岔图

Fig. 1 Bifurcation graph with a constant parameter  $u$  in system (4)

当参数空间为定常时,系统运动状态的变化虽然与一维 Logistic 映射略有不同,但都可以产生混沌现象. 对于系统(4),二维 Logistic 映射的动力学行为是由耦合系数  $u$  决定的. 为了更好地研究耦合系数对系统状态的影响,现将式(4)一般化为

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + u_1(x_n - x_n^2 + y_n) \\ y_{n+1} = y_n + u_2(y_n - y_n^2 + x_n) \end{cases} \tag{5}$$

其中  $u_1, u_2$  为系统的耦合系数. 不难证明,当  $u_1 = u_2$  且两者为确定性的常数时,系统(5)即为系统(4),其相平面的轨道点关于  $y = x$  对称,即有如下定理.

**定理 2.1**<sup>[22]</sup> 令  $z_n = x_n + iy_n$ , 记  $z_n^* = y_n + ix_n$ , 系统(4)可表示为  $z_{n+1} = f(z_n)$ . 由它构造吸引子,有  $[f^k(z_n)]^* = f^k(z_n^*)$ , 其中  $k$  为迭代次数.

证明 利用数学归纳法. 由式(4)知

$$f^*(z_n) = f(z_n^*)$$

假设  $[f^{k-1}(z_n)]^* = f^{k-1}(z_n^*)$  成立, 则

$$\begin{aligned} [f^k(z_n)]^* &= [f^{k-1}[f(z_n)]]^* = \\ &= f^{k-1}[f^*(z_n)] = \end{aligned}$$

$$f^{k-1}[f(z_n^*)] = f^k(z_n^*)$$

即  $[f^k(z_n^*)]^* = f^k(z_n^*)$ , 故命题为真.

### 3 数值实验

文献[22]研究了耦合系数在定常区间变化且  $u_1 = u_2$  时二维 Logistic 映射的混沌特征, 但忽略了耦合系数受到扰动时系统的动力学行为. 在耦合系数  $u$  为定常时, 系统(4)的动力学性态是确定的. 而如果进一步考虑环境等因素造成的耦合参数的随机波动, 此时二维 Logistic 映射成为随机耦合系统,  $u_1, u_2$  称为随机耦合系数.

为简单起见, 考虑随机耦合系数  $u_1, u_2$  符合两点分布, 其中一个取值在非混沌区间, 另一个取值在混沌区间. 对于系统(5), 选取初始点为  $(x_0, y_0) = (0.4, 0.5)$ , 概率值  $p \in [0, 1]$ . 以下我们将分别利用相图、Lyapunov 指数图和轨道的概率密度函数来研究二维随机耦合 Logistic 映射的混沌特征和演化规律.

#### 3.1 情形 1

考虑随机耦合系数  $u_1, u_2$  均服从同一参数值为  $p$  的两点分布, 即

$$u_1, u_2 = \begin{cases} 0.67, & \text{概率为 } p \\ 0.58, & \text{概率为 } 1-p \end{cases}$$

其中 0.67 取值于混沌区间, 0.58 取值于非混沌区间.

3.1.1 相图 对复杂非线性系统进行分析, 可在相空间观察其运动轨迹. 相空间即是将系统变量作为坐标分量所构成的广义空间, 相空间中的点代表系统的运动状态. 考虑将方程(5)迭代  $N$  次, 计算时舍去最初的 1000 次迭代, 以保证系

统的轨道收敛到吸引子上. 图 2 是参数  $p$  在区间  $[0, 1]$  上变化时系统的演化.

从图 2 中发现, 当  $p=0.01$  时, 系统(5)出现了两个周期点(图 2(a)); 随着  $p$  值的增加, 轨道上点的密度增大且轨道按照复杂的方式扭转, 系统变换趋势呈现不可预测性.  $0.02 \leq p \leq 0.20$  时, 出现了准周期运动(图 2(b)); 增加  $p$ , 2-周期点失稳, 发生 Hopf 分岔, 此时系统进入混沌状态. 随着概率的增加, 周围点的密度会随之增大, 邻近的轨道向它收敛. 这是因为当系统内有不同频率的振荡互相耦合时, 系统会产生一系列新的耦合频率的运动; 当  $p=0.6$  时, 与图 2(c)相比此时可以清楚的观察到系统的点聚集在一个闭合的环中, 两个相邻的周期点逐渐形成一个整体, 称此时系统的状态表现为奇怪吸引子(图 2(d)).

奇怪吸引子是系统的轨道不稳定和耗散系统体积收缩这两种内在性质同时发生导致的现象. 轨道的不稳定性使轨道局部分离, 而耗散性使相空间收缩到低维的曲面上, 表现为结构紊乱的吸引子<sup>[21]</sup>. Smale 认为, 奇怪吸引子映射首先应是均匀双曲线形的; 其次, 奇怪吸引子的任意邻域中都应该有周期轨道<sup>[23]</sup>. 当  $p > 0.6$  后, 随着概率的增加, 系统相图点的密度逐渐减小, 线条轮廓比较明显. 这是因为此时系统由奇怪吸引子渐渐转变为简单吸引子. 随着概率  $p \rightarrow 1, u_1 = u_2 = 0.67$ , 系统逐步由随机走向确定(图 2(f)). 总体而言, 在相图变化过程中可以观察到周期现象、极限环和奇怪吸引子, 这说明系统(5)可按照周期分岔和 Hopf 分岔走向混沌.

观察奇怪吸引子的形成过程可以发现, 其具有以下特点<sup>[24, 25]</sup>:

- 1) 奇怪吸引子的结构不随参数连续变化, 即整体结构会发生瞬变;
- 2) 由于轨道的无穷伸长、压缩和折叠, 奇怪吸引子空间结构十分复杂;
- 3) 奇怪吸引子不一定填满某一有限区域, 往往具有一些空隙或空洞的存在, 这使得它具有无穷嵌套的自相似结构;
- 4) 从整体上看, 系统是稳定的, 即吸引子外的一切运动最后都要收缩到吸引子上. 但就局部而言, 吸引子内的运动又是不稳定的, 相邻运动轨道要互相排斥而按指数分离.

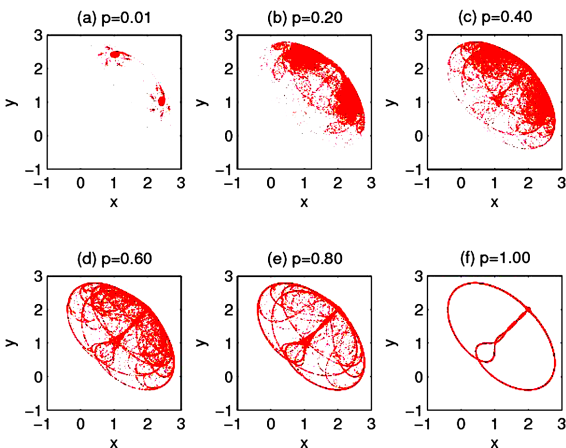


图 2 情形 1 时吸引子随参数  $p$  的演化

Fig. 2 The evolution of the attractors with parameters  $p$  in the first case

3.1.2 Lyapunov 指数图 非线性系统具有与线性系统不同的特点和性能, 当控制参数处于某个区

间时,系统可能呈现混沌状态.目前,在表征混沌运动方面,具有重要统计意义的特征值之一便是 Lyapunov 指数,它是相空间中初始条件不同的两条相邻轨道按指数律相互吸引或分离程度的一种度量.混沌系统可由相空间中的不规则轨道形成的奇怪吸引子来描述,而奇怪吸引子的一个明显特征就是对初始条件具有敏感依赖性, Lyapunov 指数恰好可以定量的表示奇怪吸引子这一运动性态.计算 Lyapunov 指数的方法很多,其中常用的一种是 Jacobian 矩阵法.

**定义 3.1** 设  $\mathbf{R}^n$  空间上的差分方程为  $x_{i+1} = f(x_i)$ ,  $f$  为  $\mathbf{R}^n$  上的连续可微映射,  $f'(x)$  为  $f$  的 Jacobian 矩阵,即

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

令  $J_i = f'(x_0)f'(x_1)\cdots f'(x_{i-1}) = [f^i(x)]'_{x=x_0}$ , 其中上标  $i$  表示第  $i$  次迭代.

将  $J_i$  的  $n$  个特征根的模从大到小排序为

$$|\lambda_1^{(i)}| \geq |\lambda_2^{(i)}| \geq \cdots \geq |\lambda_n^{(i)}|.$$

那么,  $f$  的 Lyapunov 指数<sup>[21]</sup>为

$$\lambda_k = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \ln |\lambda_k^{(i)}|, \quad k=1, \cdots, n \quad (7)$$

Jacobian 矩阵法具有较高的精度,对目前常见的混沌系统都适用.一般来说,具有正和零 Lyapunov 指数的方向,都起支撑吸引子的作用,轨道迅速分离,对初始值敏感;而负 Lyapunov 指数对应着收缩方向,运动稳定,对于初始值不敏感.这两种因素对抗的结果就是造成空间轨道的伸缩与折叠,形成奇怪吸引子.因此,对于奇怪吸引子而言,其最大 Lyapunov 指数为正,另外也至少有一个为负,并且正的 Lyapunov 指数越大系统的混沌程度就越强,反之亦然.因此,二维 Logistic 映射可根据 Lyapunov 指数的符号来判断系统的状态:当  $(\lambda_1, \lambda_2) = (+, -)$ , 系统表现为奇怪吸引子;当  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, -)$  时,系统表现为不动点;当  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -)$ , 系统表现为极限环.

图 3 是系统(5)随概率变化时的 Lyapunov 指数图.当  $0.25 \leq p \leq 1$  时,大部分情形下最大 Lyapunov 指数  $\lambda_1 > 0$ , 第二大 Lyapunov 指数  $\lambda_2 < 0$ , 这对应于混沌运动.在此混沌区中,也有  $\lambda_1 < 0$  的情形,但是所占比例较小,除了由于耦合系数的随

机性外,主要缘于混沌区中包含了不同周期的周期窗口.

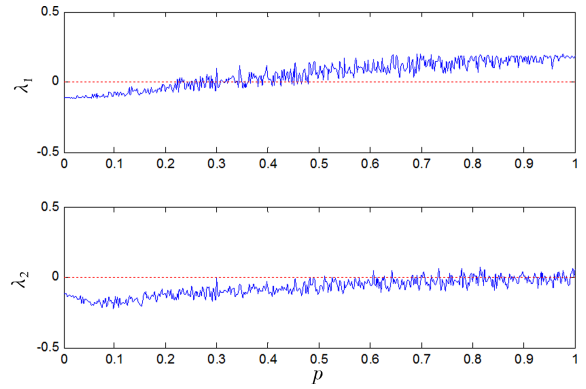


图 3 情形 1 时的 Lyapunov 指数曲线

Fig. 3 The Lyapunov exponent curve in the first case

3.1.3  $y_n$  的概率密度函数 混沌序列貌似随机,但在给定初值的情况下是确定性的空间轨道.这在一定程度上限制了混沌序列的实际应用意义.针对这个问题,不少学者做了一些相应的优化处理,如文献[26]提出了混沌系统的随机过程并针对此做了相关的研究.文献[27]利用一维 Logistic 映射产生的混沌时间序列,加入反正弦与反余弦变换对映射进行优化改进以提高随机性.文献[28]通过将多个一维 Logistic 映射组合起来构成复杂的混沌系统以此来提高随机性.虽然这些措施一定程度提高了随机性,但不能改变的是此时产生的仍然是伪随机序列.

本文假设耦合系数服从两点分布,使得在每次迭代中控制参数都是随机的.则二维随机耦合 Logistic 映射产生的混沌时间序列具有真正意义上的随机性和不可确定性,这为混沌系统的应用研究提供了一种新的思路.为了观测随着概率值  $p$  的增加,系统轨道由分岔走向混沌的变化规律,图 4 给出了轨道坐标值的概率密度函数的演化规律.由定理 2.1 可知,在情形 1 下系统(5)的吸引子的相图的统计特征关于直线  $y=x$  对称.基于此,可以证明将轨道坐标值做旋转变换后其概率密度函数具有某种对称性.

为了便于观察,对系统(5)进行  $N$  次迭代,并对迭代后的轨道点的坐标进行  $45^\circ$  顺时针旋转变换,得到纵坐标  $y_n$  的概率密度函数  $p(y)$ , 如图 4, 其中横坐标表示  $y_n$ , 纵坐标为对应横坐标中各点的概率.观察可以发现,坐标旋转变换后每幅图中  $y_n$  的概率密度函数都关于  $y$  轴对称.在  $p$  值较小



时,  $y_n$  的概率密度函数近似于两点分布. 结合相图可知此时系统(5)做周期运动. 随着概率  $p$  的增大 ( $p > 0.4$ ),  $y_n = 0$  时的极小值点渐渐演变为峰值点,  $y_n$  的概率密度函数也逐渐演化成三峰分布, 最后为单峰分布. 结合相图可知此时系统(5)的演变过程为: 周期—分岔—混沌.

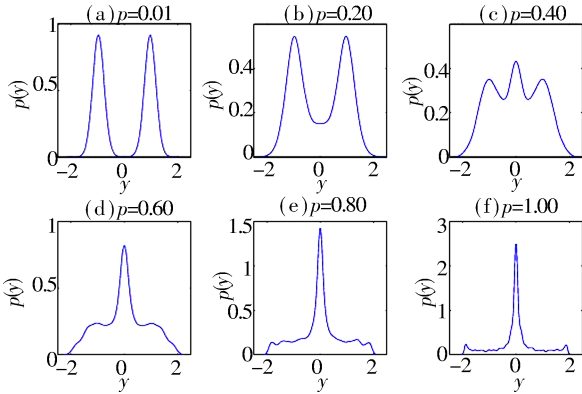


图 4 情形 1 中  $y_n$  的概率密度函数演化规律

Fig. 4 The evolution of probability density function of  $y_n$  in the first case

### 3.2 情形 2

考虑随机耦合系数  $u_1, u_2$  服从参数值为  $p$  的两点分布, 但取值概率按如下方式:

$$u_1 = \begin{cases} 0.67, & \text{概率为 } p, \\ 0.58, & \text{概率为 } 1-p, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0.67, & \text{概率为 } 1-p, \\ 0.58, & \text{概率为 } p. \end{cases}$$

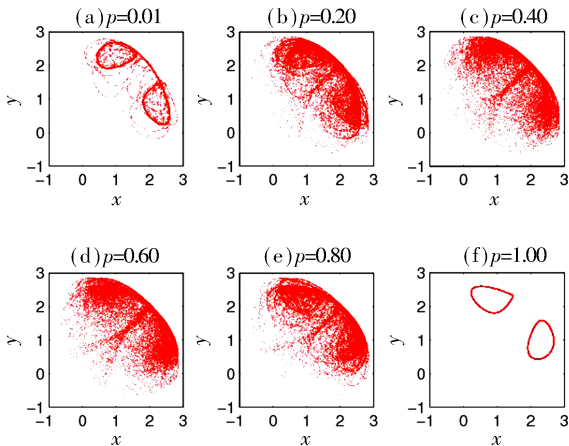


图 5 情形 2 时吸引子随参数  $p$  的演化

Fig. 5 The evolution of the attractor with parameters  $p$  in the second case

3.2.1 相图 此时系统(5)的相图如图 5 所示, 对比情形 1, 二者有以下三点不同: 情形 1 下系统(5)在  $p=0.01$  时表现为周期点, 而在情形 2 下, 一

开始就表现为极限环. 情形 1 随着概率  $p$  的增大, 相空间轨道点的密度逐渐增加, 最终形成一个封闭的空间. 而情形 2 随着概率的增大系统点的密度虽然围绕极限环增加, 但并没有形成封闭空间. 在  $p=1$  时, 情形 1 下系统由最开始的周期点逐渐演变为简单吸引子, 而在情形 2 下系统一开始表现为极限环, 最终的表现状态仍为极限环, 而在中间状态表现为混沌特征.

结合两种情况, 总的来说, 当系统处于混沌状态时, 其整体状态是绕着一些大的空洞周而复始的运动, 系统既不做规则运动, 也不是杂乱无章的. 这种运动具有貌似随机性, 但又不是完全随机. 因此, 既可以将混沌描述为无周期的有序运动, 这表现为奇怪吸引子的运动轨道永不重复和相交, 也可以说是服从一定规律的无序运动.

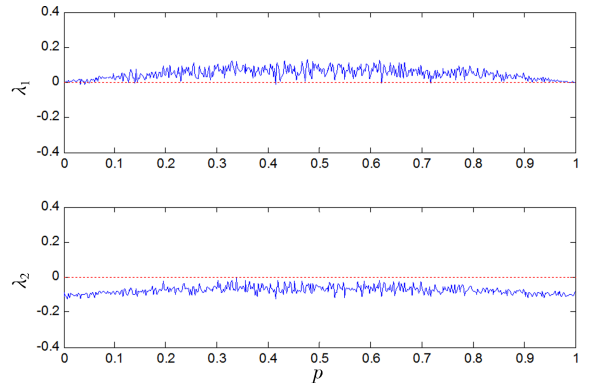


图 6 情形 2 时的 Lyapunov 指数曲线

Fig. 6 The Lyapunov exponent curve in the second case

3.2.2 Lyapunov 指数图 图 6 为第 2 种情形下的指数图, 相较于第一种情形, Lyapunov 指数也呈现三个特征: 首先是指数在统计意义上具有对称性. 这是由  $u_1, u_2$  的取值概率的对称性决定的. 其次, 从图中可见 Lyapunov 指数曲线基本符合  $(\lambda_1, \lambda_2) = (+, -)$ , 即在  $0.1 < p < 0.9$  区间上,  $\lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0$  几乎恒成立. 因此, 根据 Lyapunov 指数符号判断系统在较大的参数区间内处于混沌状态. 最后, 从图 6 中可见, 指数在中间段的波动较两端大, 其原因除了由于混沌区中包含了不同周期的周期窗口以外, 主要在于参数  $u_1, u_2$  的随机波动性.

假设  $a=0.67, b=0.58$ . 则每一次迭代中随机变量  $\xi$  取  $u_1=a, u_2=b$  的概率分别为  $p$  和  $q$ , 且  $p+q=1$ . 则

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = a^2 p + b^2 q - (ap + bq)^2 = (a-b)^2 pq$$

又因为

$$(a-b)^2 pq = (a-b)^2 \frac{1-(p-q)^2}{4}$$

所以  $p$  和  $q$  越接近 0.5, 二者差值越小, 耦合系数  $u_1, u_2$  的方差波动越大, 造成 Lyapunov 指数的波动性越大。

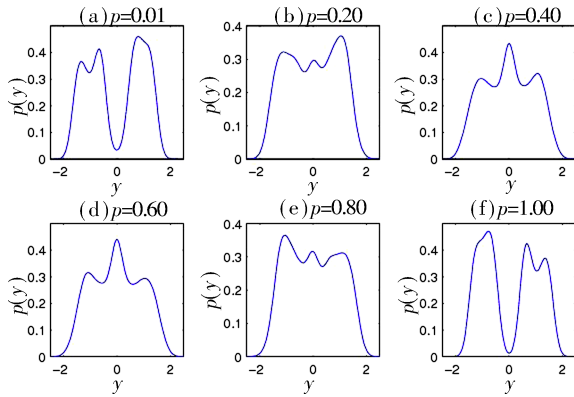


图 7 情形 2 时  $y_n$  的概率密度函数演化规律

Fig. 7 The evolution law of probability density function of  $y_n$  in the second case

3.2.3  $y_n$  的概率密度函数 情形 2 下, 系统(5)的随机耦合系数  $u_1, u_2$  依不同的概率取值, 且概率值之和为 1. 观察图 7 可知, 对于某一概率值下经旋转变换后, 轨道坐标值  $y_n$  的概率密度函数是不对称的. 这是由于此时  $u_1, u_2$  的取值概率不相同导致的不动点的坐标统计位置发生了偏移. 但由概率的取值规则可知, 当某两个概率值之和为 1 时, 对应的概率密度函数具有镜像特征. 特别地, 系统在  $p=0.5$  附近,  $u_1, u_2$  就转换为情形 1 中  $p=0.5$  的类似情形. 由于此时  $u_1, u_2$  取值概率相等, 其统计特征具有相似性. 结合图 6 可以判断出系统(5)在该情况下状态的演变过程为: 周期分岔—混沌—周期分岔.

## 4 结 论

研究二维 Logistic 映射的混沌现象一般考虑耦合系数为常数. 本文则考虑耦合系数满足两点分布, 即耦合系数依概率在混沌区间和非混沌区间的两个值之间选取, 并利用相图, Lyapunov 指数图和经旋转变换后的轨道点坐标值的概率密度函数对系统的动力学行为进行了研究. 研究表明, 在一定的参数区间内, 吸引子的最大 Lyapunov 指数为正值. 这表明此时系统可按照周期分岔和 Hopf 分岔走向混沌. 本文通过对耦合系数的随机化增强了系统的随机性. 耦合系数在每一步的迭代中都满足两

点分布, 使得运动轨道是随机的, 所呈现出的系统状态既有混沌的特征也有随机的特性. 这进一步增强了混沌在保密通讯等领域的适用范围.

## 参考文献:

- [1] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics [J]. Nature, 1976, 261: 459.
- [2] 常迎香, 李险峰, 褚衍东, 等. 二维滞后 Logistic 系统的非线性动力学分析 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2007, 35: 91.
- [3] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations [J]. J Stat Phys, 1978, 19: 25.
- [4] Ott E. Chaos in dynamical systems [M]. Cambridge: Cambridge Press, 2002.
- [5] 邵明望. 一维 Logistic 映射的分形维数 [J]. 科技通报, 2000, 16: 58.
- [6] 徐刚, 文翰, 武坤. Logistic 人口增长模型的混沌数据系统及反馈控制研究 [J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版, 2003, 20: 45.
- [7] 杨卓琴, 陆启韶, 杨在中. 扩散对污染斑块上 Logistic 种群生存的影响 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2002, 30: 1.
- [8] 魏建宇, 魏山城, 汪彦军, 等. 虫口模型的计算机数值模拟实验 [J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2005, 33: 119.
- [9] 张诣. Logistic 混沌映射 [J]. 电脑知识与技术, 2008, 4: 2538.
- [10] Andres J. On the notion of random chaos [J]. Proc Amer Math Soc, 2017, 145, 3423.
- [11] Sun H J, Liu L, Guo A K. Logistic map graph set [J]. Comput Graph, 1997, 21: 89.
- [12] Kaneko K. Transition from torus to chaos accompanied by frequency lockings with symmetry breaking [J]. Prog Theor Phys, 1983, 69: 1427.
- [13] Sakaguchi H, Tomita K. Bifurcations of the coupled Logistic map [J]. Prog Theor Phys, 1987, 78: 305.
- [14] Chowdhury R A, Chowdhury K. Bifurcations in a coupled Logistic map [J]. Int J Theor Phys, 1991, 30: 97.
- [15] Hastings A. Complex interactions between dispersal and dynamics: lessons from coupled Logistic equations [J]. Ecology, 1993, 74: 1362.
- [16] Udawadia F E, Raju N. Dynamics of coupled nonlinear maps and its application to ecological modeling [J]. Appl Math Comput, 1997, 82: 137.
- [17] Lloyd A L. The coupled Logistic map: a simple

- model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics [J]. *J Theor Biol*, 1995, 173: 217.
- [18] 王兴元, 朱伟勇. 二维 Logistic 映射中混沌与分形的研究 [J]. *中国图像图形学报*, 1994, 4: 340.
- [19] 王立明. 二维 Logistic 映射的动力学行为与奇怪吸引子的分形特征 [J]. *大学物理*, 2010, 29: 21.
- [20] 付宏睿, 史红涛, 张建刚. 基于新四翼混沌系统的复杂网络的混沌同步及其在保密通信中的应用 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2017, 54: 965.
- [21] 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [22] 王兴元, 骆超. 二维 Logistic 映射的分岔与分形 [J]. *力学学报*, 2005, 37: 346.
- [23] Smale S. Differentiable dynamical systems [J]. *Bull Amer Math Soc*, 1967, 73, 747.
- [24] 刘秉正. 非线性动力学与混沌基础 [M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1994.
- [25] 黄润生. 混沌及其应用 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1994.
- [26] Pan J, Ding Q, Zheng Y B, *et al.* Random process representations and some researches of chaos [J]. *Int J Sens Netw*, 2013, 14: 241.
- [27] 谢建全, 谢勃, 阳春华, 等. 基于 Logistic 映射的加密算法的安全性分析与改进 [J]. *小型微型模拟计算机系统*, 2010, 31: 1073.
- [28] 王永, 李盛竹, 杜茂康, 等. 基于多个 Logistic 映射的分组加密算法 [J]. *计算机工程*, 2007, 33: 162.

**引用本文格式:**

- 中文: 余文慧, 高仕龙. 二维随机耦合 Logistic 映射的混沌特征 [J]. *四川大学学报: 自然科学版*, 2019, 56: 581.
- 英文: Yu W H, Gao S L. Chaotic characteristics of two dimensional random coupled Logistic map [J]. *J Sichuan Univ: Nat Sci Ed*, 2019, 56: 581.