doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.04.005

一类一阶泛函微分方程正周期解的存在性

祝 岩
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文运用全局分歧定理研究了一阶泛函微分方程

$$u'(t)-a(t)u(t)+\lambda g(t)f(u(t-\tau(t)))=0, t\in\mathbf{R}$$

正 T-周期解的存在性，其中 $\lambda>0$ 是参数，$a\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$，$g\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 且 $a\not\equiv 0$，$g\not\equiv 0$，$\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$a,g,\tau$ 都是 T-周期函数，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. 本文构造了该方程正 T-周期解的全局结构，获得了方程正 T-周期解的存在性.

关键词：存在性；全局结构；正周期解；全局分歧理论；泛函微分方程

中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2019)04-0607-07

Existence of positive periodic solutions for a class of first-order functional differential equations

ZHU Yan
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we use the global bifurcation theorem to study the existence of positive T-periodic solutions of the first-order functional differential equation

$$u'(t)-a(t)u(t)+\lambda g(t)f(u(t-\tau(t)))=0, t\in\mathbf{R},$$

where $\lambda>0$ is a parameter, $a\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$, $g\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$, $a\not\equiv 0$, $g\not\equiv 0$, $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, a,g,τ are T-periodic functions, $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$. We construct the global structure of the set of positive T-periodic solutions of the equation and establish some existence results of the positive T-periodic solutions of this equation.

Keywords: Existence; Global structure; Positive periodic solution; Global bifurcation theorem; Functional differential equation
(2010 MSC 26A33)

1 引 言

一阶泛函微分方程在生物学、经济学、生态学、计算机应用及人口动力系统等领域有着广泛应用，如动物血红细胞存在模型[1,2]

$$y'(t)=-a(t)y(t)+\frac{b(t)}{1+y(t-\tau(t))^n}, n>0,$$

Nicholson's blowflies 模型[3,4]

$$y'(t)=-a(t)y(t)+ b(t)y(t-\tau(t))\mathrm{e}^{-\beta(t)y(t-\tau(t))}$$

等. 因此，关于一阶泛函微分方程正周期解的研究具有重要的现实意义.

近年来，许多作者致力于研究一阶泛函微分方程正周期解的存在性，获得了很多有意义的结果[5-16]. 特别地，Wan 等人[5]运用锥上的不动点理论研究了一阶泛函微分方程

收稿日期：2018-10-16
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：祝岩(1995—)，男，甘肃嘉峪关人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：18693761799@163.com

$$y'(t)=-a(t)y(t)+g(t,y(t-\tau(t)))\qquad(1)$$

正周期解的存在性,其中 $a\in C(\mathbf{R},(0,\infty))$, $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $g\in C(\mathbf{R}\times[0,\infty),[0,\infty))$,且 a,τ,g 都是 ω-周期函数. $\omega>0$ 是一个常数,获得结果如下:

定理 A 假设

(i) $\liminf_{u\to 0}\min_{t\in[0,\omega]}\dfrac{g(t,u)}{a(t)u}>1$, $\limsup_{u\to\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\dfrac{g(t,u)}{a(t)u}<1$;

(ii) $\limsup_{u\to 0}\max_{t\in[0,\omega]}\dfrac{g(t,u)}{a(t)u}<1$, $\liminf_{u\to\infty}\min_{t\in[0,\omega]}\dfrac{g(t,u)}{a(t)u}>1$.

当上述两种情况之一成立时,方程(1)至少存在一个正 ω-周期解. 2008 年,Padhi 等[6]运用 Legget-Williams 不动点定理研究了含参数 λ 的一阶泛函微分方程

$$y'(t)=-a(t)y(t)+\lambda f(t,y(t-\tau(t)))\qquad(2)$$

正 T-周期解的存在性,其中 $\lambda>0$ 是一个参数, $a\in C(\mathbf{R},(0,\infty))$, $\tau\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$, $f\in C(\mathbf{R}\times[0,\infty),[0,\infty))$, a,τ,f 都是 T-周期函数, $T>0$ 是一个常数,获得结果如下:

定理 B 令 $f^{\infty}=\limsup_{y\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\dfrac{f(t,y)}{y}<1$. 假设存在两个常数 c_1,c_2 满足 $0<c_1<c_2$ 使得

(A1) $f(t,y)\geqslant 2\delta c_2$, $c_2\leqslant y\leqslant\delta c_2$, $0\leqslant t\leqslant T$;

(A2) $f(t,y)<c_1$, $0\leqslant y\leqslant c_1$, $0\leqslant t\leqslant T$

成立,那么对于

$$\frac{\delta-1}{2\delta T}<\lambda<\frac{\delta-1}{\delta T},$$

方程(2)至少存在三个非负 T-周期解. 其中 $\delta=e^{\int_0^T a(\theta)\mathrm{d}\theta}$.

注意到上述文献虽然得到了一阶泛函微分方程正周期解的存在性结果,但由于所使用工具的局限却无法得到关于正周期解的全局结构的信息.

2004 年,Ma[17]率先对二阶非线性常微分方程 Dirichlet 问题结点解的全局结构进行了研究. 二阶微分算子是对称算子,一阶微分算子则是非对称算子,其解的全局结构的研究较为困难. 关于一阶泛函微分方程正周期解的全局结构至今少见研究. 本文研究一类一阶泛函微分方程

$$u'(t)-a(t)u(t)+\lambda g(t)f(u(t-\tau(t)))=0,\quad t\in\mathbf{R}\qquad(3)$$

正 T-周期解的存在性,其中 $\lambda>0$ 是一个参数. 运用全局分歧理论,我们构造出一阶泛函微分方程正周期解的全局结构,得到了方程(3)正周期解的存在性结果.

本文总假定:

(H1) $a\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 且 $a\not\equiv 0$, $g\in C(\mathbf{R},[0,\infty))$ 且 $g\not\equiv 0$, $\tau\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, a,g,τ 都是 T-周期函数;

(H2) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$,对任意的 $u>0$ 有 $f(u)>0$.

为求方便,记

$$f_0:=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u},\ f_\infty:=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}.$$

令 λ_1 是线性方程

$$u'(t)-a(t)u(t)+\lambda g(t)u(t-\tau(t))=0,\ t\in\mathbf{R}$$

的主特征值.

本文主要结果如下:

定理 1.1 设(H1)和(H2)成立, $f_0\in(0,\infty)$. 则

(a) 设 $f_\infty\in(0,\infty)$,则 $\lambda\in\left(\dfrac{\lambda_1}{f_0},\dfrac{\lambda_1}{f_\infty}\right)$ 或者 $\lambda\in\left(\dfrac{\lambda_1}{f_\infty},\dfrac{\lambda_1}{f_0}\right)$ 时方程(3)至少存在一个正 T-周期解;

(b) 设 $f_\infty=0$,则 $\lambda\in\left(\dfrac{\lambda_1}{f_0},\infty\right)$ 时方程(3)至少存在一个正 T-周期解;

(c) 设 $f_\infty=\infty$,则 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\lambda_1}{f_0}\right)$ 时方程(3)至少存在一个正 T-周期解.

定理 1.2 设(H1)和(H2)成立, $f_\infty\in(0,\infty)$. 则

(a) 设 $f_0=0$,则 $\lambda\in\left(\dfrac{\lambda_1}{f_\infty},\infty\right)$ 时方程(3)至少存在一个正 T-周期解;

(b) 设 $f_0=\infty$,则 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\lambda_1}{f_\infty}\right)$ 时方程(3)至少存在一个正 T-周期解.

定理 1.3 设(H1)和(H2)成立.

(a) 设 $f_0=0$ 且 $f_\infty=\infty$,则对任意 $\lambda>0$,方程(3)至少存在一个正 T-周期解;

(b) 设 $f_0=\infty$ 且 $f_\infty=0$,则对任意 $\lambda>0$,方程(3)至少存在一个正 T-周期解.

推论 1.4 假设存在一个常数 $\iota>0$ 使得

$$\frac{f(u)}{u}\geqslant\iota,\ \forall u\neq 0.$$

那么存在 $\lambda_0>0$ 使得 $\lambda>\lambda_0$ 时方程(3)不存在正 T-周期解.

2 预备知识

令 $X=\{u\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\,|\,u(t)=u(t+T)\}$. 其范数为 $\|u\|_\infty=\max\limits_{t\in T}|u(t)|$. 则 $(X,\|u\|_\infty)$ 是一个

Banach 空间. 令 $E=\{u|u\in X\cap C^1[0,T]\}$，其范数为 $\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\}$. 则 $(E,\|u\|)$ 是一个 Banach 空间. 显然，方程(3)有解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是算子方程

$$u(t)=\lambda\int_t^{t+T}G(t,s)g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s,t\in\mathbf{R}$$

的解，其中

$$G(t,s)=\frac{\mathrm{e}^{-\int_t^s a(\theta)\mathrm{d}\theta}}{1-\mathrm{e}^{-\int_0^T a(\theta)\mathrm{d}\theta}},t\leqslant s\leqslant t+T.$$

记

$$M:=\max_{t\in[0,T],s\in[t,t+T]}G(t,s),$$

$$m:=\min_{t\in[0,T],s\in[t,t+T]}G(t,s),\sigma=\frac{m}{M}.$$

设 $P=\{u\in X|u(t)\geqslant 0,u(t)\geqslant\sigma\|u\|_\infty,t\in[0,T]\}$是 X 中的一个锥. 定义算子$A_\lambda:P\to X$ 为

$$A_\lambda u(t)=\lambda\int_t^{t+T}G(t,s)g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s,$$
$$t\in\mathbf{R}.$$

引理 2.1 设(H1)和(H2)成立. 则$A_\lambda(P)\subset P$ 且$A_\lambda:P\to P$ 是全连续算子.

证明 根据 P 的定义，对于 $u\in P$，令 $s=\tilde{s}+T$. 则

$$(A_\lambda u)(t+T)=\lambda\int_{t+T}^{t+2T}G(t+T,s)g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s=$$
$$\lambda\int_t^{t+T}G(t+T,\tilde{s}+T)g(\tilde{s}+T)f(u(\tilde{s}+T-\tau(\tilde{s}+T)))\mathrm{d}\tilde{s}=$$
$$\lambda\int_t^{t+T}G(t,s)g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s=(A_\lambda u)(t).$$

由 $g(t)f(u(t-\tau(t)))$ 的周期性易见 $\int_t^{t+T}g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s$ 是常数. 对于 $u\in P$ 以及 $t\in[0,T]$，

$$(A_\lambda u)(t)\geqslant m\lambda\int_t^{t+T}g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s=$$
$$\frac{m}{M}M\lambda\int_t^{t+T}g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\sigma\max_{t\in[0,T]}\lambda\int_t^{t+T}G(t,s)g(s)f(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\sigma\|A_\lambda u\|_\infty.$$

因此$A_\lambda(P)\subset P$. 根据 Arzelà-Ascoli 定理[19]易得 $A_\lambda:P\to P$ 是全连续算子. 证毕.

引理 2.2(Rabinowitz 全局分歧定理)[20] 设 X 是一个 Banach 空间. 考虑如下方程

$$x=\mu(Lx+Nx),\mu\in\mathbf{R},x\in X \tag{4}$$

假定

(H1) 算子 $L:X\to X$ 为线性紧算子；

(H2) 非线性算子 $N:U(0)\subset X\to X$ 全连续，并且

$$\frac{\|Nx\|}{\|x\|}\to 0,x\to 0;$$

(H3) μ_0为 L 在 X 中的本征值，其代数重数 $\bar{\omega}(\mu_0)$为奇数，其中

$$\bar{\omega}(\mu_0)=\dim\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\ker((I-\mu_0L)^m)\}.$$

若(H1)～(H3)成立，则$(\mu_0,0)$是(4)式的一个分歧点. 设 $C(\mu_0)$是(4)式的非平凡解的闭包中包含点$(\mu_0,0)$的连通分支，则下列两种情形之一出现：

(i) $C(\mu_0)$无界；

(ii)$C(\mu_0)$还连接$(\bar{\mu},0)$，而$\bar{\mu}$是不同于μ_0的本征值.

设 E 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个 Banach 空间. 记 $L(E)$为有界线性算子 $T:E\to E$ 的全体在范数

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|\,|\,\|x\|=1\}$$

下所构成的 Banach 空间，$I:E\to E$ 为恒同映射. 则集合 $\sigma(T)=\{\lambda\in C|\lambda I-T:E\to E$ 存在有界逆$\}$称为 T 的谱. 集合 $\rho(T)=C\backslash\sigma(T)$称为 T 的预解集，而 $r(T)=\sup\{|\lambda|\,|\lambda\in\rho(T)\}$称为 T 的谱半径.

引理 2.3[20] 设 X 是一个 Banach 空间. 若锥 $K\subset X$ 且满足$K^0\neq\varnothing$，$T\in L(X)$是一个紧的强正算子，则

(a) $r(T)>0$，$r(T)$是 T 的一个具有正特征函数 $v\in K^0$ 的简单特征值，并且 T 再没有其他特征值；

(b) 对于任意满足 $\lambda\neq r(T)$的特征值 λ，有 $|\lambda|<r(T)$；

(c) 对任意 $y>0$，当 $\lambda>r(T)$时，方程 $\lambda x-Tx=y$ 有唯一解 $x\in K^0$；当 $\lambda<r(T)$时，方程 $\lambda x-Tx=y$ 在 K 中无解；

(d) 对任意 $y>0$，方程 $r(T)x-Tx=-y$ 在 K 中无解；

(e) 若 $S\in L(X)$ 并且 $Sx\geqslant Tx$ 于 K，则 $r(S)\geqslant r(T)$. 进一步，若 $Sx\gg Tx$ 对一切 $x>0$ 成立，则 $r(S)>r(T)$.

引理 2.4[18] 令 E 是一个 Banach 空间，$\{C_n\}$ 是 E 中的一族闭连通集. 假设以下条件成立：

(i) 存在 $z_n\in C_n$，$n=1,2,\cdots$ 并且存在 $z_*\in E$ 使得 $z_n\to z_*$；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\infty$，其中 $r_n=\sup\{\|u\|\,|\,x\in C_n\}$；

(iii) 对于任意 $R>0$，$(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n)\cap B_R$ 是 E 的一个相对紧集，其中 $B_R=\{x\in E|\,\|x\|<R\}$.

那么 $D:=\limsup\limits_{n\to+\infty}C_n$ 包含一个无界的连通分支 C 且 $z_*\in C$.

考虑线性方程

$$u'(t)-a(t)u(t)+\lambda g(t)u(t-\tau(t))=0,\quad t\in\mathbf{R} \tag{5}$$

的主特征值.

引理 2.5 设(H1)成立. 那么方程(5)存在一个主特征值 λ_1，$\lambda_1>0$ 并且是简单的，其对应的特征函数 $\varphi_1(t)$ 在 $[0,T]$ 中同样为正.

证明 定义锥 $P_0=\{u\in X|u(t)\geqslant 0,t\in[0,T]\}$. 则 P_0 是一个正规锥并且其内部是非空的. 显然，$X=P_0-P_0$，即 P_0 是一个 X 中的完全锥. 因为 $G(t,s)>0$，$t\leqslant s\leqslant t+T$，定义算子 $L:X\to X$ 为

$$Lu(t)=\int_t^{t+T}G(t,s)g(s)u(s-\tau(s))\mathrm{d}s.$$

则 L 是一个强正算子，即 $L(u)\in \mathrm{int}\,P_0$，$u\in P_0\setminus\{0\}$. 根据引理 2.3，谱半径 $r(L)>0$ 并且在 $[0,T]$ 存在 $\varphi_1(t)\in X$，$\varphi_1(t)>0$ 并且使得 $L\varphi_1=(r(L))^{-1}$ 是线性特征值问题的主特征值. 证毕.

3 主要结论的证明

在这一部分，为了运用全局分歧定理我们将 f 延拓成一个奇函数 $\bar f$，$\bar f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$\bar f(u)=\begin{cases}f(u),x\geqslant 0,\\ -f(-u),x<0.\end{cases}$$

现在我们研究辅助方程

$$u'(t)-a(t)u(t)+\lambda g(t)\bar f(u(t-\tau(t)))=0,\quad t\in\mathbf{R} \tag{6}$$

设 $\xi,\zeta\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，使得

$$\bar f(u)=f_0u+\xi(u),\ \bar f(u)=f_\infty u+\zeta(u) \tag{7}$$

显然，

$$\lim_{u\to 0}\frac{\xi(u)}{u}=0,\ \lim_{u\to\infty}\frac{\zeta(u)}{u}=0.$$

令 $\dot\zeta(u)=\max\limits_{0\leqslant|s|\leqslant u}|\zeta(s)|$. 那么 $\dot\zeta$ 是非减的并且

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\dot\zeta(u)}{u}=0.$$

定理 1.1 的证明 我们先考虑从平凡解 $u\equiv 0$ 处产生的分岐问题

$$-u'(t)+a(t)u(t)=r\lambda f_0g(t)u(t-\tau(t))+r\lambda g(t)\xi(t-\tau(t)) \tag{8}$$

上式可以转化为等价的积分方程

$$u(t)=\int_t^{t+T}G(t,s)[r\lambda f_0g(s)u(s-\tau(s))+r\lambda g(s)\xi(u(s-\tau(s)))]\mathrm{d}s.$$

记 $u\to 0$ 时

$$\int_t^{t+T}G(t,s)g(s)\xi(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s=o(\|u\|).$$

易见

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\int_0^TG(t,s)g(s)\xi(u(s-\tau(s)))\mathrm{d}s\right|\leqslant MT\ \|g\|_\infty\ \|\xi(u)\|_\infty.$$

令 $E^*=\mathbf{R}\times E$，S^+ 表示 $u\in E$ 时正函数的集合，$\Phi^+=\mathbf{R}\times S^+$. 根据引理 2.2 和引理 2.5，在 $\mathbf{R}\times E$ 中存在(8)式的连接 $(\frac{\lambda_1}{f_0},0)$ 和 ∞ 的连通分支 C^+. 进一步，$C^+\setminus\{(\frac{\lambda_1}{f_0},0)\}\subset\Phi^+$. 很明显，任何形式如 $(1,u)$ 的(8)式的解都对应着方程(3)的一个解. 我们将证明 C^+ 穿过超平面 $\{1\}\times E\subset E^*$.

(a) $f_\infty\in(0,\infty)$. 在这种情况下，我们只需要证明 C^+ 连接 $(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)$ 和 $(\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty},\infty)$. 设 $(\mu_n,u_n)\in C^+$ 满足

$$\mu_n+\|u_n\|\to\infty \tag{9}$$

因为 $(0,0)$ 是 $r\equiv 0$ 时(8)式的唯一解，而 $C^+\cap(\{0\}\times E)=\varnothing$，所以当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时有 $\mu_n>0$.

情形 1 $\frac{\lambda_1}{f_\infty}<\lambda<\frac{\lambda_1}{f_0}$. 这种情况下，我们可证

$$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty},\frac{\lambda_1}{\lambda f_0})\subseteq\{\lambda\in\mathbf{R}|\,\exists(\lambda,u)\in\mathbf{R}\}.$$

以下分两步证明. 第一步，首先证明：存在一个常数 $S>0$ 使得对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 时有 $\mu_n\subset(0,S]$. 因为 (μ_n,u_n) 是(8)式的解，注意到

$$-u_n{}'(t)+a(t)u_n(t)=\mu_n\lambda g(t)\frac{\bar f(u_n(t-\tau(t)))}{u_n(t-\tau(t))}u_n(t-\tau(t)),\ t\in\mathbf{R} \tag{10}$$

根据(H2)以及 $f_0,f_\infty\in(0,\infty)$ 可知存在一个常数 $\rho_1>0$ 使得 $\frac{f(u)}{u}\geqslant\rho_1>0$. 令 $\bar\mu_1$ 为

$$\rho - u_n{}'(t) + a(t)u_n(t) = \bar{\mu}_1 \lambda g(t)\rho_1 u_n(t-\tau(t)), t\in\mathbf{R}$$

的主特征值. 我们将(10)式的主特征值与$\bar{\mu}_1$比较，根据引理 2.3 可得$0<\mu_n<\bar{\mu}_1$.

第二步，根据(9)式以及第一步的证明，我们得到$\|u_n\|\to\infty, n\to\infty$. 在方程

$$-u_n{}'(t) + a(t)u_n(t) = \mu_n\lambda f_\infty g(t)u_n(t-\tau(t)) + \mu_n\lambda g(t)\zeta(t-\tau(t)).$$

上式两边同除以$\|u_n\|$，再令$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. 因为$v_n$在$E$中有界，所以存在收敛子列，我们仍将之记作$v_n$，即存在$v\in E$，$\|v\|=1$，使得$v_n\to v$. 进一步，根据条件(H1)以及$\bar{\zeta}$非减可得

$$\frac{|\zeta(u_n)|}{\|u_n\|} \leqslant \frac{\bar{\zeta}(|u_n|)}{\|u_n\|} \leqslant \frac{\bar{\zeta}(\|u_n\|)}{\|u_n\|}.$$

从而

$$\lim_{u\to\infty}\frac{|\zeta(u_n)|}{\|u_n\|}=0.$$

所以

$$v(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)\,\bar{\mu}\lambda f_\infty g(s)v(s-\tau(s))\mathrm{d}s,$$

其中$\bar{\mu}=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$. 因此

$$v'(t) - a(t)v(t) + \bar{\mu}\lambda f_\infty g(t)v(t-\tau(t)) = 0 \tag{11}$$

下证$v\in C^+$. 反设$v\notin C^+$. v是(11)式的一个非平凡解，并且v在$[0,T]$上有一些零点. 考虑到$v_n\in E$，因而v在$[0,T]$上是变号的. 这与在E中有$v_n\to v$以及$v_n\in C^+$矛盾. 因此$v\in C^+$. 进一步可得$\bar{\mu}\lambda f_\infty=\lambda_1$，从而

$$\bar{\mu}=\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty}.$$

因此C^+连接$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)$和$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty},\infty)$.

情形 2　$\frac{\lambda_1}{f_0}<\lambda<\frac{\lambda_1}{f_\infty}$. 在这种情形下，我们有$\frac{\lambda_1}{\lambda f_0}<1<\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty}$. 若$(\mu_n,u_n)\in C^+$满足(9)式并且$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n=\infty$，则有

$$(\{1\}\times E)\cap C^+\neq 0.$$

若存在一个常数$S>0$，使得对于任意$n\in\mathbf{N}^*$都有$\mu_n\subset(0,S]$. 运用与情形 1 第一步中类似的证明方法可得

$$(\mu_n,u_n)\to(\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty},\infty), n\to\infty.$$

因此C^+连接$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)(\frac{\lambda_1}{\lambda f_\infty},\infty)$.

(b) $f_\infty=0$. 在这种情形下，我们将证明C^+连接$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)$和$(+\infty,+\infty)$. 反设$\sup\{\lambda|(\lambda,u)\in C^+\}<\infty$. 那么存在一个序列$\{(\mu_k,u_k)\}\subset C^+$使得

$$\|u_k\|\to+\infty,\ \|\mu_k\|\leqslant C_0,$$

其中C_0是依赖k的一些正常数. 进一步，对于$t\in[0,T]$，有$\lim\limits_{k\to\infty}u_k(t)=\infty$. 由$\{(\mu_k,u_k)\}\subset C^+$可得

$$-u_k{}'(t)+a(t)u_k(t) = \mu_k\lambda g(t)\bar{f}(u_k(t-\tau(t))), t\in\mathbf{R}.$$

令$v_k(t)=\frac{u_k(t)}{\|u_k\|}$. 则$\|v_k\|=1$. 那么存在$(\mu_*,v_*)\subset(0,C_0]\times E$，$\|v_*\|=1$使得在$\mathbf{R}\times E$中有

$$\lim_{k\to\infty}(\mu_k,v_k)=(\mu_*,v_*).$$

进一步，联系$f_\infty=0$有

$$-v_*{}'(t)+a(t)v_*(t)=\mu_* g(t)\cdot 0, t\in\mathbf{R}.$$

因此，对$t\in\mathbf{R}$有$v_*\equiv 0$. 这与$\|v_*\|=1$矛盾. 因此$\sup\{\lambda|(\lambda,u)\in C^+\}=\infty$.

(c) $f_\infty=\infty$. 在这种情形下，我们将证明C^+连接$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)$和$(0,\infty)$. 其关键在于构造一个函数序列$\{f_{[n]}\}$如下：

$$f_{[n]}(u)=\begin{cases}\bar{f}(u), u\in[-n,n],\\ \dfrac{2n^2-\bar{f}(n)}{n}(s-n)+\bar{f}(n), u\in(n,2n),\\ \dfrac{2n^2-\bar{f}(-n)}{n}(s+n)+\bar{f}(-n), u\in(-2n,-n),\\ nu, u\in(-\infty,-2n)\cup[2n,\infty).\end{cases}$$

该序列满足$f_{[n]}\to\bar{f},n\to\infty$. 我们考虑方程

$$-u'(t)+a(t)u(t)=\lambda g(t)f_{[n]}(u(t-\tau(t)))=0,t\in\mathbf{R}.$$

显然,$(f_{[n]})_0=f_0,(f_{[n]})_\infty=n$. 从情形(a)的证明我们知道存在一个无界连通分支$C_{[n]}$,它连接$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)$和$(\frac{\lambda_1}{\lambda_n},\infty)$. 根据引理 2.4,存在一个无界连通分支$C^+\subset\limsup_{n\to\infty}C_{[n]}$使得$(\frac{\lambda_1}{\lambda f_0},0)\in C^+,(0,\infty)\in C^+$. 定理得证.

定理 1.2 的证明 (a) $f_0=0$. 在这种情形下,我们令(λ,u)是(6)式的一个非平凡解. 我们将(6)式两边同时除以$\|u\|^2$并记$v=\frac{u}{\|u\|^2}$得到

$$-v'(t)+a(t)v(t)=\lambda g(t)\frac{\bar{f}(u(t-\tau(t)))}{\|u\|^2},t\in\mathbf{R} \tag{12}$$

定义函数

$$\tilde{f}(u)=\begin{cases}\|v\|^2f(\frac{v}{\|v\|^2}),v\neq0,\\ 0,v=0.\end{cases}$$

显然,方程(12)等价于

$$-v'(t)+a(t)v(t)=\lambda g(t)\tilde{f}(v(t-\tau(t))),t\in\mathbf{R} \tag{13}$$

易知$(\lambda,0)$是(13)式的一个平凡解. 显然

$$\tilde{f}0=f_\infty,\tilde{f}_\infty=f_0.$$

通过定理 1.1 情形(b)的证明,再进行相反地转化$v\to\frac{v}{\|v\|^2}=u$,结论得证.

(b) $f_0=\infty$. 在这种情形下,运用与定理 1.1 情形(a)中相似的方法和定理 1.1 情形(c)的结论,我们得到对于任意的$\lambda\in(0,\frac{\lambda_1}{f_\infty})$,方程(3)至少存在一个正 T-周期解. 定理得证.

定理 1.3 的证明 (a) $f_0=0,f_\infty=\infty$. 我们构造一个函数序列如下

$$f^{[n]}(u)=\begin{cases}\frac{u}{n},u\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}],\\ (\bar{f}(\frac{2}{n})-\frac{1}{n^2})(nu-2)+\bar{f}(\frac{2}{n}),u\in(\frac{1}{n},\frac{2}{n}),\\ -(\bar{f}(-\frac{2}{n})+\frac{1}{n^2})(nu+2)+\bar{f}(-\frac{2}{n}),u\in(-\frac{2}{n},-\frac{1}{n}),\\ \bar{f}(u),u\in(-\infty,-\frac{2}{n})\cup[\frac{2}{n},\infty).\end{cases}$$

该序列满足$f^{[n]}\to\bar{f},n\to\infty$. 考虑问题

$$-u'(t)+a(t)u(t)=\lambda g(t)f^{[n]}(u(t-\tau(t)))=0,t\in\mathbf{R}.$$

不难得到

$$\lim_{n\to\infty}f^{[n]}(u)=\bar{f}(u),f_0^{[n]}=\frac{1}{n},f_\infty^{[n]}=f_\infty=\infty.$$

由定理 1.1 中情形(c)的证明可知存在一个无界连通分支$C^{[n]}$,它连接$(\frac{n\lambda_1}{\lambda},0)$和$(0,\infty)$. 根据引理 2.4,可知存在一个无界连通分支$C^+\subset\limsup_{n\to\infty}C^{[n]}$使得$(+\infty,0)\in C^+,(0,\infty)\in C^+$.

(b) $f_0=\infty,f_\infty=0$. 在这种情形下,运用与定理 1.2 情形(a)中相似的方法和定理 1.3 情形(1)的结论,我们得到对于任意的$\lambda\in(0,\infty)$,方程(3)至少存在一个正 T-周期解. 定理得证.

参考文献:

[1] Gopalsamy K, Weng P X. Global attractivity and level crossing in model of Haematopoiesis [J]. Bull Inst Math Acad Sinica, 1994, 22: 341.

[2] Wan A, Jiang D Q. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations [J]. Kyushu J Math, 2002, 56: 193.

[3] Joseph W, So H, Yu J S. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowflies [J]. Differ Eq Dynam Syst, 1994, 2: 11.

[4] Weng P X. Existence and global attractivity of periodic solution of integro-differential equation in population dynamics [J]. Acta Appl Math, 1996, 12: 427.

[5] Wan A, Jiang D Q, Xu X J. A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equations [J]. Comput Math Appl, 2004,

47：1257.

[6] Padhi S，Shilpee S. Multiple periodic solutions for nonlinear first order functional differential equations with applications to population dynamics [J]. Appl Math Comput，2008，203：1.

[7] Bai D，Xu Y. Periodic solutions of first-order functional differential equations with periodic deviations [J]. Comput Math Appl，2007，53：1361.

[8] Jin Z，Wang H. A note on positive periodic solutions of delayed differential equations [J]. Appl Math Lett，2010，23：581.

[9] Wu Y. Existence of positive periodic solutions for a functional differential equation with a parameter [J]. Nonlinear Anal-Theor，2008，68：1954.

[10] Graef J R，Kong L. Periodic solutions for functional differential equations with sign-changing nonlinearities [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A，2010，140：597.

[11] Kang S，Shi B，Wang G. Existence of maximal and minimal periodic solutions for first-order functional differential equations [J]. Appl Math Lett，2010，23：22.

[12] Ma R Y，Chen R P，Chen T L. Existence of positive periodic solutions of nonlinear first-order delayed differential equations [J]. J Math Anal Appl，2011，384：527.

[13] 龙严. 非线性二阶 Robin 问题多正解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：249.

[14] 曾德强，石勇国，张瑞梅，等. 双输入时滞的网络控制系统的稳定性改进结果 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：462.

[15] 叶芙梅. 非线性二阶周期边值问题正解的全局结构 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：452.

[16] 魏丽萍. 一类三阶周期边值共振问题解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：260.

[17] Ma R Y，Thompson B. Nodal solutions for nonlinear eigenvalue problems [J]. Nonlinear Anal-Theor，2004，59：707.

[18] Ma R Y，Xu J. Bifurcation from interval and positive solutions for second order periodic boundary value problems [J]. Dyn Syst Appl，2010，19：211.

[19] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义 [M]. 北京：北京大学出版社，1987.

[20] 徐登州，马如云. 线性微分方程的非线性扰动 [M]. 北京：科学出版社，1994.

引用本文格式：

中　文：祝岩. 一类一阶泛函微分方程正周期解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：607.

英　文：Zhu Y. Existence of positive periodic solutions for a class of first-order functional differential equations [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2019，56：607.