doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2019.06.004

带阻尼项的广义 SRLW 方程的线性化差分方法

王　希，张　虹，胡劲松
(西华大学理学院，成都 610039)

摘　要：本文对带有阻尼项的耗散广义 SRLW 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个具有二阶理论精度的三层线性化差分格式. 综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法，本文导出了该格式的收敛性和稳定性. 数值实验表明该方法是可靠的.

关键词：阻尼耗散；广义 SRLW 方程；线性化差分格式；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2019)06-1009-05

A linearized difference method for generalized SRLW equation with damping term

WANG Xi, *ZHANG Hong*, *HU Jin-Song*
(College of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, numerical solution of the initial-boundary value problem of dissipative generalized SRLW equation with damping term is considered. A three-level linearized difference scheme with second order accuracy is proposed. It is proved that the difference scheme is convergent and stable by using mathematical induction and discrete functional analysis. Efficiency of the method is demonstrated by some numerical examples.

Keywords: Damping dissipation; Generalized SRLW equation; Linearized difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

文献[1]在研究弱非线性离子声波和空间电波的传播时提出了广义对称正则长波(SRLW)方程

$$u_t+\rho_x+\frac{1}{p}(u^p)_x-u_{xxt}=0 \tag{1}$$

$$\rho_t+u_x=0 \tag{2}$$

这里 $p\geqslant 2$ 为正整数. 此外，方程(1)、(2)式也出现在许多其他数学物理领域[2-3]. 在实际问题中，粘性阻尼是不可避免的，而且与色散一样起着十分重要的作用. 本文考虑如下带有阻尼项的耗散广义 SRLW 方程初边值问题：

$$u_t+\rho_x-\upsilon u_{xx}+\frac{1}{p}(u^p)_x-u_{xxt}=0,$$
$$(x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{3}$$

$$\rho_t+u_x+\gamma\rho=0,(x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{4}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\rho(x,0)=\rho_0(x),$$
$$x\in[x_L,x_R] \tag{5}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,\rho(x_L,t)=\rho(x_R,t)=0,$$
$$t\in[0,T] \tag{6}$$

其中 $\upsilon>0$ 是耗散系数，$\gamma>0$ 是阻尼系数，$u_0(x)$、$\rho_0(x)$是已知光滑的函数. 当考虑耗散时，方程组

收稿日期：2018-11-14
基金项目：四川省应用基础研究项目(20190387)；四川省教育厅重点科研基金(16ZA0167)；西华大学重点科研基金(Z1513324)；国家自然科学基金青年基金(11701481)
作者简介：王希(1995－)，女，四川资中人，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：826927166@qq.com

(3)(4)是反映非线性离子声波运动本质现象的合理模型[4]. 文献[5-8]分别讨论了方程组(3)(4)式周期边值问题和初边值问题的解的适定性、整体存在唯一性以及其解的长时间性态等. 由于其解析解很难求出,文献[9-11]分别用有限差分方法和有限元方法对带有阻尼项的耗散 SRLW 方程进行了数值研究,文献[12-13]又进一步用有限差分方法研究了问题(3)～(6),分别构造了两层非线性差分格式和三层平均隐式差分格式.

本文利用 Richardson 外推思想,对初边值问题(3)～(6)式提出一个三层外推线性差分格式. 借鉴文献[14]中的分析技巧,本文在不能得到其差分解的最大模估计的情况下综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法,直接证明它们的收敛性和稳定性,并给出数值算例.

2 差分格式及截断误差

对区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$作网格剖分,取空间步长 $h=\frac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ, $x_j=x_L+jh(0\leqslant j\leqslant J)$,$t_n=n\tau(n=0,1,2,\cdots,N,N=\left[\frac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$, $U_j^n\approx u(x_j,t_n)$和 $Z_h^0=\{U=(U_j)\mid U_0=U_J=0,j=0,1,\cdots,J-1,J\}$. 用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值),并定义如下记号:

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},(U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$
$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},(U_j^n)_t=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau},$$
$$U_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},\langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,$$
$$\|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,\ \|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|.$$

对初边值问题(3)～(6),考虑如下有限差分格式:

$$(U_j^n)_t-(U_j^n)_{x\bar{x}t}+(\phi_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\upsilon(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\left(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right)^{p-1}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \quad (7)$$
$$(\phi_j^n)_t+(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+\gamma\phi_j^{n+\frac{1}{2}}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,J-1;\ n=1,2,\cdots,N-1 \quad (8)$$
$$U_j^0=u_0(x_j),\phi_j^0=\rho_0(x_j),j=0,1,2,\cdots,J \quad (9)$$
$$U^n\in Z_h^0,\phi^n\in Z_h^0,n=0,1,2,\cdots,N \quad (10)$$

则差分格式(7)～(10)的截断误差为

$$r_j^n=(u_j^n)_t-(u_j^n)_{x\bar{x}t}+(\rho_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\upsilon(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\left[\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right]^{p-1}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} \quad (11)$$
$$s_j^n=(\rho_j^n)_t+(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+\gamma\rho_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (12)$$

由 Taylor 展开可知,当 $h,\tau\to0$ 时

$$|r_j^n|+|s_j^n|=O(\tau^2+h^2) \quad (13)$$

3 差分格式收敛性和稳定性

引理 3.1(离散 Sobolev 不等式[14]) 设 $U=\{U_j\mid j=0,1,2,\cdots,J\}$是定义在有限区间$[x_L,x_R]$的任意网格函数. 则有

$$\|U\|_\infty\leqslant C_0\sqrt{\|U\|}\sqrt{\|U_x\|+\|U\|},$$

此处 C_0 是不依赖于 $U=\{U_j\mid j=0,1,2,\cdots,J\}$和空间步长 h 的常数。

引理 3.2(离散 Gronwall 不等式[14]) 设$\{w^n\mid n=0,1,2,\cdots,N;N\tau\leqslant T\}$为非负网格函数,满足 $w^n\leqslant A+\tau\sum_{l=1}^{n}B_lw^l$,其中 A 和 $B_l(l=0,1,2,\cdots,N)$是非负的常数. 则对于 $0\leqslant n\leqslant N$ 有

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}|w^n|\leqslant A\exp\left(2\tau\sum_{l=1}^{N}B_l\right),$$

其中 $\|e^1\|+\|e_x^1\|+\|\eta^1\|\leqslant C_1(\tau)$充分小,满足 $\tau(\max_{1\leqslant n\leqslant N}B_l)\leqslant\frac{1}{2}$.

引理 3.3[9] 设 $u_0\in H^1,\rho_0\in L_2$. 则初边值问题(3)～(6)的解满足 $\|u\|_{L_2}\leqslant C$, $\|u_x\|_{L_2}\leqslant C$, $\|\rho\|_{L_2}\leqslant C$, $\|u\|_{L_\infty}\leqslant C$.

定理 3.4 设 $u_0\in H^1,\rho_0\in L_2$. 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小,则差分格式(7)～(10)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$,ϕ^n 以 $\|\cdot\|$ 收敛到初边值问题(3)～(6)的解,且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

证明 由(11)～(12)式各自减去(7)～(8)式得

$$r_j^n=(e_j^n)_t-(e_j^n)_{x\bar{x}t}+(\eta_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\upsilon(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+Q_j \quad (14)$$
$$s_j^n=(\eta_j^n)_t+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+\gamma\eta_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (15)$$

其中

$$Q_j=\left[\frac{3}{2}u_j^n-\frac{1}{2}u_j^{n-1}\right]^{p-1}(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-\left[\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}\right]^{p-1}(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}.$$

下面用数学归纳法证明. 由引理 3.3 以及(13)式知,存在与 τ 和 h 无关的常数 C_u,C_r 和 C_s,使得

$$\|u^n\|_\infty\leqslant C_u,\ \|r^n\|_\infty\leqslant C_r(\tau^2+h^2),$$
$$\|s^n\|_\infty\leqslant C_s(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N \quad (16)$$

由初始条件可得以下估计式：

$$\| e^0 \| = 0,\ \| \eta^0 \| = 0,\ \| U^0 \|_\infty \leqslant C_u \tag{17}$$

再由文献[13]中计算出具有二阶精度的 U^1 和 ϕ^1，于是可得到以下估计式：

$$\| e^1 \| + \| e_x^1 \| + \| \eta^1 \| \leqslant C_1(\tau^2 + h^2) \tag{18}$$

这里 C_1 为与 τ 和 h 无关的常数.

现在假设

$$\| e^l \| + \| e_x^l \| + \| \eta^l \| \leqslant C_l(\tau^2 + h^2),\quad l = 2,3,\cdots,n(n \leqslant N-1) \tag{19}$$

其中 $C_l(l=2,3,\cdots,n)$ 为与 τ 和 h 无关的常数. 由引理 3.1 和 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\| e^l \|_\infty \leqslant C_0 \sqrt{\| e^l \|}\sqrt{\| e_x^l \| + \| e^l \|} \leqslant \frac{1}{2}C_0(2\| e^l \| + \| e_x^l \|) \leqslant \frac{3}{2}C_0 C_l(\tau^2 + h^2),\ l = 1,2,\cdots,n \tag{20}$$

$$\| U^l \|_\infty \leqslant \| u^l \|_\infty + \| e^l \|_\infty \leqslant C_u + \frac{3}{2}C_0 C_l(\tau^2 + h^2),\ l = 2,3,\cdots,n \tag{21}$$

将(14)式两端与 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积，由分部求和公式，整理得

$$\frac{1}{2}\|e^n\|_t^2 + \frac{1}{2}\|e_x^n\|_t^2 + \langle \eta_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = -\upsilon \|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle - \langle Q, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = -\upsilon \|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2 + \langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle - h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}U_j^n - \frac{1}{2}U_j^{n-1}]^{p-1}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} - h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}e_j^n - \frac{1}{2}e_j^{n-1}]\sum_{k=0}^{p-2}(\frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1})^{p-2-k}(\frac{3}{2}U_j^n - \frac{1}{2}U_j^{n-1})(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \tag{22}$$

由引理 3.3 以及微分中值定理，有

$$(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} = \frac{u(x_{j+1}, \frac{t_n + t_{n+1}}{2}) - u(x_{j-1}, \frac{t_n + t_{n+1}}{2})}{2h} = \frac{\partial}{\partial x}u(x_{\xi_j}, \frac{t_n + t_{n+1}}{2}),\ x_{j-1} \leqslant x_{\xi_j} \leqslant x_{j+1},$$

即

$$\| u_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}} \|_\infty \leqslant C_u \tag{23}$$

再取 h 和 τ 充分小，使得

$$\frac{3}{2}C_0(\max_{0\leqslant l\leqslant n} C_l)(\tau^2 + h^2) \leqslant 1 \tag{24}$$

于是由(21)(23)式和(24)式以及 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}U_j^n - \frac{1}{2}U_j^{n-1}]^{p-1}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \leqslant [2C_u + 3C_0\max(C_n, C_{n-1})(\tau^2 + h^2)]^{p-1} h\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}| \cdot |e_j^{n+\frac{1}{2}}| \leqslant 2^{p-3}(C_u + 1)^{p-1}(\| e_x^{n+1} \|^2 + \| e_x^n \|^2 + \| e^{n+1} \|^2 + \| e^n \|^2) \tag{25}$$

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}e_j^n - \frac{1}{2}e_j^{n-1}]\sum_{k=0}^{p-2}(\frac{3}{2}u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1})^{p-2-k}(\frac{3}{2}U_j^n - \frac{1}{2}U_j^{n-1})(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}} e_j^{n+\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=0}^{p-2}[\frac{3}{2}\| u^n \|_\infty - \frac{1}{2}\| u^{n-1} \|_\infty]^{p-2-k}(\frac{3}{2}\| U^n \|_\infty - \frac{1}{2}\| U^{n-1} \|_\infty)^k \| u_x^{n+\frac{1}{2}} \|_\infty h\sum_{j=1}^{J-1}(\frac{3}{2}e_j^n - \frac{1}{2}e_j^{n-1})e_j^{n+\frac{1}{2}} \leqslant 2^{p-3}(p-1)(C_u + 1)^{p-1}[2\| e^{n+1} \|^2 + 5\| e^n \|^2 + \| e^{n-1} \|^2] \tag{26}$$

$$\langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2}\langle r^n, e^{n+1} + e^n \rangle \leqslant \frac{1}{2}\| r^n \|^2 + \frac{1}{4}[\| e^{n+1} \|^2 + \| e^n \|^2] \tag{27}$$

将(25)～(27)式代入(22)式，整理有

$$(\| e^{n+1} \|^2 - \| e^n \|^2) + (\| e_x^{n+1} \| - \| e_x^n \|^2) + 2\tau\langle \eta_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}} \rangle \leqslant \tau\| r^n \|^2 + \frac{1}{2}\tau[\| e^{n+1} \|^2 + \| e^n \|^2] + 2^{p-3}\tau(C_u + 1)^{p-1}[\| e_x^{n+1} \|^2 + \| e_x^n \|^2 + \| e^{n+1} \|^2 + \| e^n \|^2] + \tau 2^{p-3}(p-1)(C_u + 1)^{p-1}[2\| e^{n+1} \|^2 + 5\| e^n \|^2 + \| e^{n-1} \|^2] \tag{28}$$

再将(15)式两端与 $\eta^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积，由分部求和公式，整理得

$$(\|\eta^{n+1}\|^2-\|\eta^n\|^2)+2\tau\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},\eta^{n+\frac{1}{2}}\rangle\leqslant\tau\|s^n\|^2+\frac{1}{2}\tau[\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2] \tag{29}$$

将(28)式和(29)式相加,并注意到$\langle\eta_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=-\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},\eta^{n+\frac{1}{2}}\rangle$,整理有

$$\begin{aligned}&(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)+(\|\eta^{n+1}\|^2-\|\eta^n\|^2)\leqslant\\&\quad\tau\|r^n\|^2+\tau\|s^n\|^2+5\cdot2^{p-1}(p-1)\tau(C_u+1)^{p-1}[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\\&\quad\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2]\end{aligned} \tag{30}$$

将(30)式从 1 到 n 递推求和,整理得

$$\begin{aligned}&\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2\leqslant\|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2+\|\eta^1\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|s^k\|^2+\\&\quad\tau\sum_{k=0}^{n+1}[15\cdot2^{p-1}(p-1)(C_u+1)^{p-1}](\|e^k\|^2+\|e_x^k\|^2+\|\eta^k\|^2)\end{aligned} \tag{31}$$

又

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|r^k\|^2\leqslant T(C_r)^2(\tau^2+h^2)^2 \tag{32}$$

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|s^k\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|s^k\|^2\leqslant T(C_s)^2(\tau^2+h^2)^2 \tag{33}$$

将(18)、(32)、(33)式代入(31)式,利用引理 3.2,取 τ 充分小以满足

$$\tau<\frac{1}{15\cdot2^p(p-1)(C_u+1)^{p-1}},$$

于是有

$$\begin{aligned}&\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2\leqslant\\&\quad(T(C_r)^2+T(C_s)^2+C_1^2)\cdot\\&(\tau^2+h^2)^2e^{2T[15\cdot2^{p-1}(p-1)(C_u+1)^{p-1}]}\leqslant\\&\quad(C_{n+1})^2(\tau^2+h^2)^2,n=1,2,\cdots,N-1,\end{aligned}$$

其中

$$C_{n+1}=[\sqrt{T}(C_r+C_s)+C_1]e^{15\cdot2^{p-1}T(p-1)(C_u+1)^{p-1}}.$$

显然,C_{n+1}为与 n 无关的常数.从而由归纳假设有

$$\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),\ \|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),$$
$$\|\eta^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N.$$

最后由引理 3.1 有

$$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N.$$

定理 3.5 在定理 3.4 的条件下,差分格式(7)~(10)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$,ϕ^n 以 $\|\cdot\|_{L^2}$ 关于初值无条件稳定.

4 数值实验

在 $t=0$ 时刻,由于阻尼还没有作用,耗散还没有产生,所以在数值实验中把问题(3)~(6)中的初值函数取为广义 SRLW 方程的初值函数[16]($t=0$ 时)

$$u_0(x)=\left[\frac{5p(p+1)}{12}\right]^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{sech}^{\frac{2}{p-1}}\frac{p-1}{6}\sqrt{5}x,v=1.5,$$

$$\rho_0(x)=\frac{2}{3}\left[\frac{5p(p+1)}{12}\right]^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{sech}^{\frac{2}{p-1}}\frac{p-1}{6}\sqrt{5}x,v=1.5.$$

对初边值问题(3)~(6),考虑 $p=5,\upsilon=\gamma=0.5$ 及 $p=7,\ v=\gamma=0.2$ 两种情形进行数值实验.固定 $x_L=x_R=20,T=1.0$.由于方程(3)(4)式的精确解并不知道,我们用类似文献[13]的误差估计方法,将细网格 $(\tau=h=\frac{1}{160})$上的数值解作为精确解来估计误差.就 τ 和 h 的不同取值,数值解和孤波解在不同时刻的误差的数值模拟见表 1 和表 2.

表 1 $p=5\ v=\gamma=0.5$ 时数值解和孤波解在不同时刻的误差

Tab.1 Error comparison between the numerical solution and the solitary wave solution at various time

		$\|\cdot\|_\infty$			$\|\cdot\|$		
		$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$
u	$t=0.2$	8.911 778 3 e−4	2.192 188 3 e−4	5.281 620 2 e−5	1.079 304 0 e−3	2.689 724 4 e−4	6.365 248 5 e−5
	$t=0.6$	1.786 652 7 e−3	4.432 329 7 e−4	1.055 624 8 e−4	2.119 431 4 e−3	5.215 579 9 e−4	1.230 422 3 e−4
	$t=1.0$	1.929 729 2 e−3	4.804 189 2 e−4	1.142 462 9 e−4	2.222 307 4 e−3	5.712 165 1 e−4	1.586 916 5 e−4
ρ	$t=0.2$	1.029 866 6 e−3	2.569 566 6 e−4	6.175 165 8 e−5	9.987 588 5 e−4	2.392 227 8 e−4	5.764 762 3 e−5
	$t=0.6$	2.122 019 1 e−3	5.242 111 3 e−4	1.273 751 7 e−4	1.852 907 5 e−3	4.584 861 9 e−4	1.951 565 4 e−4
	$t=1.0$	2.288 745 5 e−3	5.734 911 3 e−4	1.359 999 9 e−4	2.049 505 5 e−3	5.068 677 8 e−4	1.209 677 3 e−4

表 2　$p=7, v=\gamma=0.2$ 时数值解和孤波解在不同时刻的误差

Tab. 2　Error comparison between the numerical solution and the solitary wave solution at various time

		$\|\cdot\|_\infty$			$\|\cdot\|$		
		$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$	$\tau=h=0.1$	$\tau=h=0.05$	$\tau=h=0.025$
u	$t=0.2$	1.207 635 0 e−3	2.993 394 1 e−4	7.133 307 5 e−5	1.441 456 9 e−3	3.567 977 0 e−4	8.499 198 3 e−5
	$t=0.6$	2.244 262 6 e−3	5.552 344 7 e−4	1.322 569 7 e−4	2.674 064 8 e−3	6.621 294 6 e−4	1.577 380 0 e−4
	$t=1.0$	2.237 206 5 e−3	5.540 649 6 e−4	1.319 986 5 e−4	2.738 252 0 e−3	6.779 640 3 e−4	1.615 067 1 e−4
ρ	$t=0.2$	1.069 202 8 e−3	2.652 550 7 e−4	6.322 039 6 e−5	9.143 463 0 e−4	2.267 852 9 e−4	5.410 430 8 e−5
	$t=0.6$	2.333 051 0 e−3	5.799 052 8 e−4	1.384 240 7 e−4	1.909 586 1 e−3	4.736 459 9 e−4	1.131 665 3 e−4
	$t=1.0$	2.832 335 9 e−3	7.041 243 7 e−4	1.679 062 0 e−4	2.397 101 4 e−3	5.947 538 6 e−4	1.420 626 0 e−4

从数值算例可以看出，本文对初边值问题(3)～(6)所提出的差分格式(7)～(10)是有效的.

参考文献：

[1]　Seyler C E，Fenstermacler D C. A symmetric regularized long wave equation [J]. Phys Fluids，1984，27：4.

[2]　Ogino T，Takeda S. Computer simulation and analysis for the spherical and cylindrical ion-acoustic solitons [J]. J Phys Soc Jpn，1976，41：257.

[3]　Makhankov V G. Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems) [J]. Phys Rep，1978，35：1.

[4]　Clarkson P A. New similarity reductions and Painleve analysis for the symmetric regularized long wave and modified Benjamin-Bona-Mahony equations [J]. J Phys A：Math Theor，1999，22：3821.

[5]　Shang Y D，Guo B L. Long time behavior of the dissipative generalized symmetric regularized long wave equations [J]. J Par Diff Equat，2002，15：35.

[6]　尚亚东，郭柏灵. 耗散的广义对称正则长波方程周期初值问题的整体吸引子[J]. 数学物理学报，2003，23A：745.

[7]　Guo B，Shang Y. Approximate inertial manifolds to the generalized symmetric regularized long wave equations with damping term [J]. Acta Math Appl Sin-E，2003，19：191.

[8]　尚亚东，郭柏灵. 带有阻尼项的广义对称正则长波方程的指数吸引子[J]. 应用数学和力学，2005，26：259.

[9]　Hu J，Xu Y，Hu B. A linear difference scheme for dissipative symmetric regularized long wave equations with damping term [J]. Math Probl Eng，2011，2011：781750.

[10]　Hu J，Hu B，Xu Y. C-N difference schemes for dissipative symmetric regularized long wave equations with damping term [J]. Math Probl Eng，2011，2011：651642.

[11]　Xu Y，Hu B，Xie X，*et al*. Mixed finite element analysis for dissipative SRLW equations with damping term [J]. Appl Math Comput，2012，218：4788.

[12]　Zhou J. Numerical simulation of generalized symmetric regularized long-wave equations with damping term [J]. Inter J Digit Cont Technol and Its Appl，2013，7：1142.

[13]　刘倩，胡劲松，林雪梅. 带阻尼项的广义 SRLW 方程的一个守恒差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2014，51：219.

[14]　Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing：Inter，Acad，Publishers，1990.

引用本文格式：

中　文：王希，张虹，胡劲松. 带阻尼项的广义 SRLW 方程的线性化差分方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：1009.

英　文：Wang X，Zhang H，Hu J S. A linearized difference method for generalized SRLW equation with damping term [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2019，56：1009.