doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.02.004

Doubling Fock 空间之间的正 Toeplitz 算子

简舒曼，王晓峰，夏　锦
（广州大学数学与信息科学学院，广州 510006）

摘　要：设$F^p(\phi)$为复平面 **C** 上的加权 Fock 空间，其中 ϕ 为次调和函数，$\Delta\phi dA$ 为 doubling 测度. 本文利用均值函数与 t-Berezin 变换刻画了$F^p(\phi)(0<p<\infty)$与$F^\infty(\phi)$之间具有正测度符号的 Toeplitz 算子T_μ的有界性和紧性，拓展了已有结果.

关键词：Doubling Fock 空间；Toeplitz 算子；均值函数；t-Berezin 变换
中图分类号：O177　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)02-0225-06

Positive Toeplitz operators between doubling Fock spaces

JIAN Shu-Man, *WANG Xiao-Feng*, *XIA Jin*
(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Let $F^p(\phi)$ be a weighted Fock space on the complex plane **C**, where ϕ is subharmonic and $\Delta\phi dA$ a doubling measure. We characterize the boundedness and compactness of the Toeplitz operator T_μ (with positive Borel measure μ on **C**) between weighted Fock spaces $F^p(\phi)(0<p<\infty)$ and $F^\infty(\phi)$ by using the averaging functions and t-Berezin transform. Our results extend the known results.

Keywords: Doubling Fock spaces; Toeplitz operator; averaging function; *t*-Berezin transform
(2010 MSC 47B35)

1　引　言

记 **C** 为复平面. 令 $D(z,r)=\{w\in\mathbf{C}: |w-z|<r\}$，其中 $z\in\mathbf{C}$，$r>0$. 若对于复平面 **C** 上的正 Borel 测度，存在常数 $C>0$ 使得

$$\mu(D(z,2r))\leqslant C\mu(D(z,r)),$$

$r>0$，称 μ 为 doubling 测度，其中 $z\in\mathbf{C}$.

设 dA 为 **C** 上的 Lebesgue 面积测度，ϕ 次调和、实值且不恒为 0，$\mu=\Delta\phi dA$ 为 doubling 测度. 则对任意 $z\in\mathbf{C}$，总存在函数 $\rho(z)$ 使得 $\mu(D(z,\rho(z)))=1$. 称 $\rho(z)$为正半径. 函数ρ^{-2}可看做是 ϕ 的正规化.

设 $0<p<\infty$. 空间$L^p(\phi)$由满足$\|f\|_{p,\phi}<\infty$的 Lebesgue 可测函数 f 构成，其中

$$\|f\|_{p,\phi}=\left(\int_{\mathbf{C}}|f(z)e^{-\phi(z)}|^p dA(z)\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

空间$L^\infty(\phi)$由满足$\|f\|_{\infty,\phi}<\infty$的 Lebesgue 可测函数 f 构成，其中

$$\|f\|_{\infty,\phi}=\operatorname{esssup}\{|f(z)e^{-\phi(z)}|\}<\infty.$$

设 $H(\mathbf{C})$为 **C** 上的全体整函数，加权 Fock 空间$F^p(\phi)$定义为

$$F^p(\phi)=L^p(\phi)\cap H(\mathbf{C}).$$

易知，当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时，$F^p(\phi)$是以$\|\phi\|_{p,\phi}$为范数的 Banach 空间，且$F^2(\phi)$是以

$$\langle f,g\rangle_\phi=\int_{\mathbf{C}}f(z)\overline{g(z)}e^{-2\phi(z)}dA(z)$$

为内积的 Hilbert 空间. 当 $0<p<1$ 时，$F^p(\phi)$是以 $d(f,g)=\|f-g\|_{p,\phi}^p$为距离的 F-空间. 文献[1]研

收稿日期：2019-03-19
基金项目：国家自然科学基金(11471084)
作者简介：简舒曼(1994－)，女，广东紫金人，硕士生，主要研究方向为复分析. E-mail：854127671@qq.com
通讯作者：王晓峰. E-mail：wxf@gzhu.edu.cn

究了单位球上的 Bloch-Orlicz 空间之间的复合算子. 当 $\phi(z)=\frac{1}{2}|z|^2$ 时, $F^2(\phi)$ 为经典 Fock 空间[2]. 当 $\phi(z)=|z|^m$ 时, $F^2(\phi)$ 为一类 Fock 空间[3-4]. 当 $\phi(z)=-m\ln(A+|z|^2)+|z|^2$ 时, $F^2(\phi)$ 为 Fock-Sobolev 空间[5], 其中 $A>0$, m 为正整数.

令 $K(\cdot,\cdot)$ 为 $F^2(\phi)$ 的 Bergman 核, 即对于 $f\in F^2(\phi)$,

$$f(\cdot)=Pf(\cdot)=\int_{\mathbf{C}}K(\cdot,w)f(w)\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}A(w).$$

若 μ 为 $\mathbf{C}$ 的 Borel 测度, 合测度 μ 符号的 Toeplitz 算子定义为

$$T_\mu f(\cdot)=\int_{\mathbf{C}}K(\cdot,w)f(w)\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w).$$

对经典 Fock 空间上 Toeplitz 算子, 已有很多结果, 如文献[6]. 当 $\mu>0$ 时, Isralowitz 和 Zhu[7] 刻画了经典 Fock 空间上正测度符号 Toeplitz 算子 T_μ 的有界性和紧性, 其中测度 μ 满足

$$\sup\int_{\mathbf{C}}|K_\phi(z,w)|^2\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w)<\infty.$$

Schuster 与 Varolin[8] 利用均值函数与 t-Berezin 变换刻画了广义 Fock 空间上 Toeplitz 算子 T_μ 的有界性和紧性及其充要条件. Hu 等人[9] 利用 Fock-Carleson 测度刻画了广义 Fock 空间 $F^p(\phi)$ 与 $F^q(\phi)$ 之间的 Toeplitz 算子的有界性与紧性, 其中 $0<p,q<\infty$. Mengestic[10] 等价地刻画了经典 Fock 空间 $F^p(\phi)$ 与 $F^q(\phi)$ 间的 Toeplitz 算子的有界性与紧性, 其中 $1\leqslant p<\infty$, $q=\infty$. Wang 等人[11] 在 Fock-type 空间上研究了 Hankel 算子及其有界性和紧性. Oliver 和 Pascuas[12] 则刻画了加权的 doubling Fock 空间 $F^p(\phi)(1\leqslant p<\infty)$ 上以正测度符号 Toeplitz 算子 T_μ 的有界性和紧性.

在文献[13]中, Hu 和 Lv 讨论了加权 doubling Fock 空间 $F^p(\phi)$ 与 $F^q(\phi)$ 之间的以正测度符号的 Toeplitz 算子的有界性与紧性的充要条件, 其中 $0<p,q<\infty$. 本文扩展文献[13]的结果, 刻画了加权 doubling Fock 空间 $F^p(\phi)$ 与 $F^\infty(\phi)$ 之间的以正测度符号的 Toeplitz 算子的有界性与紧性.

在证明本文结果前, 先介绍一些记号. 对两个量 A 和 B, $A\lesssim B$ 表示存在无关紧要的常数 C 使得 $A\leqslant CB$, $A\simeq B$ 表示 $A\lesssim B$ 和 $B\gtrsim A$ 同时成立.

均值函数和 t-Berezin 变换是人们研究各种解析函数空间上算子的基本工具. 若 $E\subset\mathbf{C}$ 是可测的, 可写 $A(E)=\int_{\mathrm{E}}\mathrm{d}A$. 对于 $\mu\geqslant0$, $r>0$, μ 的均值函数定义为

$$\widehat{\mu_r}(z)=\frac{\mu(D^r(z))}{A(D^r(z))},$$

其中 $D^r(z)=D(z,r\rho(z))$, $r>0$, $z\in\mathbf{C}$. 对于 $p>0$, $z\in\mathbf{C}$, $F^p(\phi)$ 中的正规化 Bergman 核定义为

$$k_{p,z}(w)=\frac{K(.,z)}{\|K(.,z)\|_{p,\phi}}.$$

给定 $t>0$, 设 μ 的 t-Berezin 变换定义为

$$\widetilde{\mu_t}(z)=\int_{\mathbf{C}}|k_{t,z}(w)|^2\,\mathrm{e}^{-t\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w),$$

其中 $z\in\mathbf{C}$. 给定可测函数 f, $\mathrm{d}\mu=f\mathrm{d}A$, 简记 $\widehat{f_r}(z)=\widehat{\mu_r}$, $\widetilde{f_t}(z)=\widetilde{\mu_t}$, 特别地, $\widetilde{\mu_2}$ 为 Fock 空间的经典的 Berezin 变换.

2 预备知识

引理 2.1[13] 加权 Fock 空间 $F^p(\phi)$ 满足如下性质:

(i) 给定 $p,t>0$, 实数 k, 存在 $C>0$ 使得

$$\int_{\mathbf{C}}\rho(w)^k\,\mathrm{e}^{-p\left(\frac{|z-w|}{\rho(z)}\right)^t}\mathrm{d}A(w)\leqslant C\rho(z)^{k+2},$$

其中 $z\in\mathbf{C}$;

(ii) 对于 $0<p<\infty$,

$$\|K(\cdot,z)\|_{p,\phi}\simeq\mathrm{e}^{\phi(z)}\rho(z)^{\frac{2}{p}-2},$$

其中 $z\in\mathbf{C}$;

(iii) 对于 $0<p\leqslant\infty$, $\{k_{p,z}:z\in\mathbf{C}\}$ 在 $F^p(\phi)$ 有界, 即 $\|k_{p,z}\|_{p,\phi}\leqslant M$, 其中 M 为无关紧要的常数, $k_{p,z}$ 在 $\mathbf{C}$ 的任意紧子集上一致收敛于 0;

(iv) 存在与 z,w 无关的常数 ε, C, $z,w\in\mathbf{C}$ 使得

$$|K(w,z)|\leqslant C\frac{\mathrm{e}^{\phi(w)+\phi(z)}}{\rho(w)\rho(z)}\mathrm{e}^{-\left(\frac{|z-w|}{\rho(z)}\right)^\varepsilon};$$

(v) 存在常数 r_0 使得

$$|K(w,z)|\simeq\frac{\mathrm{e}^{\phi(w)+\phi(z)}}{\rho(z)^2},$$

其中 $z\in\mathbf{C}$, $w\in D^{r_0}(z)$.

引理 2.2[13] 设 $0<p<\infty$, $\mu\geqslant0$, $r>0$. 则存在常数 C, $f\in H(\mathbf{C})$, 使得

$$\int_{\mathbf{C}}|f(z)\,\mathrm{e}^{-\phi(z)}|^p d\mu(z)\leqslant$$

$$C\int_{\mathbf{C}}|f(z)\,\mathrm{e}^{-\phi(z)}|^p\,\widehat{\mu_r}(z)\mathrm{d}A(z).$$

给定 $r>0$, 若 $\mathbf{C}$ 中点列 $\{a_k\}_k$ 满足 $\{D^r(a_k)\}_k$ 覆盖 $\mathbf{C}$, 且 $\{D^{\frac{r}{5}}(a_k)\}_k$ 两两分离, 则称 $\{a_k\}_k$ 为 r-格. 给定一个 r-格 $\{a_k\}_k$, $m>0$, 存在整数 $N>0$, 使得[13]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{D^{mr}(a_k)}(z) \leqslant N,$$

其中 $z \in \mathbf{C}$,

引理 2.3[13]　设 $0<p\leqslant\infty$，μ 是 $\mathbf{C}$ 上非负 Borel 测度. 以下陈述等价：

(i) 对某个或任意 $t>0$，$\widetilde{\mu_t}\in L^p$；

(ii) 对某个或任意 $\delta>0$，$\widehat{\mu_\delta}\in L^p$；

(iii) 对某个或任意 r-格 $\{a_k\}_k$，$\{\widehat{\mu_\delta}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2}{p}}\}_k\in l^p$，进而，

$$\|\widetilde{\mu_t}\|_{L^p}\simeq\|\widehat{\mu_\delta}\|_{L^p}\simeq\|\{\widehat{\mu_\delta}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2}{p}}\}_k\|_{l^p}.$$

引理 2.4[13]　设$\{a_k\}_k$为一个 r-格. 对于 $0<p\leqslant\infty$，$\{\lambda_k\}_k\in L^p$，令

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k k_{2,a_k}(z)\,\rho(a_k)^{1-\frac{2}{p}},$$

则 $f\in F^p(\phi)$且$\|f\|_{p,\phi}\leqslant C\|\{\lambda_k\}_k\|_{l^p}$.

引理 2.5　设 $\mu\geqslant0$，满足$\widehat{\mu_\delta}\rho^\sigma\in L^\infty$，$\delta>0$，$\sigma\in\mathbf{R}$，则$T_\mu$在$F^p(\phi)$中良定义，其中 $0<p\leqslant\infty$.

证明　由文献[13]，当 $0<p<\infty$时，只需证明$p=\infty$时T_μ在$F^\infty(\phi)$中良定义. 由

$$|T_\mu f(z)|=\left|\int_{\mathbf{C}}K(z,w)f(w)\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w)\right|\leqslant$$
$$C\int_{\mathbf{C}}|K(z,w)||f(w)|\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w)\leqslant$$
$$C\|f\|_{\infty,\phi}\int_{\mathbf{C}}K(z,w)\,\mathrm{e}^{-\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w)<\infty.$$

命题真.

引理 2.6[13]　设 $0<p\leqslant q<\infty$，$\mu\geqslant0$. 下面说法等价：

(i) $T_\mu:F^p(\phi)\to F^q(\phi)$有界；

(ii) 对某个或任意 $t>0$，$\widetilde{\mu_t}\rho^{\frac{2(p-q)}{pq}}\in L^\infty$；

(iii) 对某个或任意 $\delta>0$，$\widehat{\mu_\delta}\rho^{\frac{2(p-q)}{pq}}\in L^\infty$；

(iv) 对某个或任意 r-格 $\{a_k\}_k$，$\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2(p-q)}{pq}}\}_k\in l^\infty$，进而有

$$\|T_\mu\|_{F^p(\phi)\to F^q(\phi)}\simeq\|\widetilde{\mu_t}\rho^{\frac{2(p-q)}{pq}}\|_{L^\infty}\simeq$$
$$\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{\frac{2(p-q)}{pq}}\|_{L^\infty}\simeq\|\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2(p-q)}{pq}}\}_k\|_{l^\infty}.$$

引理 2.7[13]　设 $0<p\leqslant q<\infty$，$\mu\geqslant0$. 下面说法等价：

(i) $T_\mu:F^p(\phi)\to F^q(\phi)$紧；

(ii) 对某个或任意 $t>0$，当 $z\to\infty$时，$\widetilde{\mu_t}(z)\rho(z)^{\frac{2(p-q)}{pq}}\to0$；

(iii) 对某个或任意 $\delta>0$，当 $z\to\infty$时$\widehat{\mu_\delta}(z)\rho(z)^{\frac{2(p-q)}{pq}}\to0$；

(iv) 对某个或任意 r-格$\{a_k\}_k$，当 $k\to\infty$时，$\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2(p-q)}{pq}}\to0$.

引理 2.8[13]　设 $0<q<p<\infty$，$\mu\geqslant0$. 下面说法等价：

(i) $T_\mu:F^p(\phi)\to F^q(\phi)$有界；

(ii) $T_\mu:F^p(\phi)\to F^q(\phi)$紧；

(iii) 对某个或任意 $t>0$，$\widetilde{\mu_t}\in L^{pq/(p-q)}$；

(iv) 对某个或任意 $\delta>0$，$\widehat{\mu_\delta}\in L^{pq/(p-q)}$；

(v) 对某个或任意 r-格 $\{a_k\}_k$，$\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{2(p-q)/pq}\}_k\in l^{pq/(p-q)}$，进而有

$$\|T_\mu\|_{F^p(\phi)\to F^q(\phi)}\simeq\|\widetilde{\mu_t}\|_{L^{pq/p-q}}\simeq\|\widehat{\mu_\delta}\|_{L^{pq/p-q}}\simeq$$
$$\|\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{2(p-q)/pq}\}_k\|_{l^{pq/p-q}}.$$

3　具有正测度符号的 Toeplitz 算子

定理 3.1　设 $0<p<\infty$，$\mu\geqslant0$. 下面说法等价：

(i) $T_\mu:F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)$有界；

(ii) 对某个或任意 $t>0$，$\widetilde{\mu_t}\rho^{-\frac{2}{p}}\in L^\infty$；

(iii) 对某个或任意 $\delta>0$，$\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\in L^\infty$；

(iv) 对某个或任意 r-格 $\{a_k\}_k$，$\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{-\frac{2}{p}}\}_k\in l^\infty$，进而有

$$\|T_\mu\|_{F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)}\simeq\|\widetilde{\mu_t}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}\simeq$$
$$\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}\simeq\|\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{-\frac{2}{p}}\}_k\|_{l^\infty}.$$

证明　由引理 2.3，(iii)⇒(iv)成立，且

$$\|\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{-\frac{2}{p}}\}_k\|_{l^\infty}\leqslant\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}.$$

定引理 2.1(v)中的r_0. 由$\widehat{\mu_{r_0}}(z)\leqslant C\widetilde{\mu_t}(z)$知(ii)⇒(iii)成立. 注意到对于固定的 δ，$r>0$ 有$\|\widehat{\mu_\delta}\|_{L^\infty}\simeq\|\widehat{\mu_r}\|_{L^\infty}$，则

$$\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}\simeq\|\widehat{\mu_{r_0}}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}\leqslant C\|\widetilde{\mu_t}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}.$$

由引理 2.6 知

$$\|\widetilde{\mu_t}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}\leqslant C\|\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{-\frac{2}{p}}\}_k\|_{l^\infty}.$$

(iv)⇒(ii)成立.

(i)⇒(ii). 由$T_\mu:F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)$有界，即对于$f\in F^p(\phi)$有$\|T_\mu f\|_{\infty,\phi}\leqslant C\|f\|_{p,\phi}$，我们有

$$\widetilde{\mu_2}(z)\,\rho(z)^{-\frac{2}{p}}=$$
$$\int_{\mathbf{C}}|k_{2,z}(w)|^2\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\,\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\mathrm{d}\mu(w)\leqslant$$
$$C\int_{\mathbf{C}}\mathrm{e}^{-\phi(z)}\,k_{p,z}(w)K(z,w)\,\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w)=$$
$$C\,\mathrm{e}^{-\phi(z)}\,T_\mu k_{p,z}(z)\leqslant C\|T_\mu k_{p,z}(z)\|_{\infty,\phi}\leqslant$$
$$C\|T_\mu\|_{F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)}.$$

再由(ii)⇔(iii)可知$\widetilde{\mu_2}$与$\widetilde{\mu_t}$等价，其中任意 $t>0$.

(iii)⇒(i). 由$\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}<\infty$及引理 2.5 可知，$T_\mu$在$F^p(\phi)$中良定义，且

$$|f(z)|e^{-\phi(z)}\leqslant C\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\|f\|_{p,\phi}.$$

则

$$|T_\mu f(z)|e^{-\phi(z)}\leqslant C\int_{\mathbf{C}}|K(w,z)||f(w)|e^{-2\phi(w)}\widehat{\mu_\delta}(w)dA(w)e^{-\phi(z)}\leqslant$$
$$C\int_{\mathbf{C}}\|f\|_{p,\phi}\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}|K(w,z)|e^{-\phi(w)}\widehat{\mu_\delta}(w)dA(w)e^{-\phi(z)}=$$
$$C\|f\|_{p,\phi}\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}\int_{\mathbf{C}}|K(w,z)|e^{-\phi(w)}dA(w)e^{-\phi(z)}\leqslant C\|f\|_{p,\phi}\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}<\infty,$$

且有$\|T_\mu\|_{F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)}\leqslant C\|\widehat{\mu_\delta}\rho^{-\frac{2}{p}}\|_{L^\infty}$,命题得证.

定理 3.2 设 $0<p<\infty$,$\mu\geqslant 0$. 下面说法等价:

(i) $T_\mu:F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)$紧;

(ii) 对某个或任意 $t>0$,当 $z\to\infty$时,$\widetilde{\mu_t}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\to 0$;

(iii) 对某个或任意 $\delta>0$,当 $z\to\infty$时,$\widehat{\mu_\delta}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\to 0$;

(iv) 对某个或任意 r-格$\{a_k\}_k$,当 $k\to\infty$时,$\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{-\frac{2}{p}}\to 0$.

证明 由定理 3.1,(iii)⇒(iv)和(ii)⇒(iii)显然成立. 由引理 2.7 可知(iv)⇒(ii)成立.

(i)⇒(ii). 设$T_\mu:F^p(\phi)\to F^\infty(\phi)$紧. 由引理 2.1(v)知$\{k_{p,z}:z\in\mathbf{C}\}$在$F^p(\phi)$有界,且在任意紧子集上一致收敛于 0. 则

$$\widetilde{\mu_2}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}=$$
$$\int_{\mathbf{C}}|k_{2,z}(w)|^2e^{-2\phi(w)}\rho(z)^{-\frac{2}{p}}d\mu(w)\leqslant$$
$$C\int_{\mathbf{C}}e^{-\phi(z)}k_{p,z}(w)K(z,w)e^{-2\phi(w)}d\mu(w)\leqslant$$
$$Ce^{-\phi(z)}|T_\mu k_{p,z}(z)|\leqslant C\|T_\mu k_{p,z}(z)\|_{\infty,\phi}.$$

所以$\lim\limits_{z\to\infty}\widetilde{\mu_2}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}=0$. 再由(ii)⇔(iii)可知$\widetilde{\mu_2}$与$\widetilde{\mu_t}$等价,其中任意 $t>0$.

(ii)⇒(i). 设$\{f_j\}_{j=1}^\infty$为$F^p(\phi)$中满足$\sup_j\|f_j\|_{p,\phi}<\infty$的序列,且当 $j\to\infty$时f_j在$\mathbf{C}$上任意紧子集上一致收敛到 0. 注意到

$$|T_\mu f_j(z)|e^{-\phi(z)}=|\int_{\mathrm{C}}K(z,w)f_j(w)e^{-2\phi(w)}d\mu(w)|e^{-\phi(z)}\leqslant$$
$$C\|f_j(w)\|_{p,\phi}\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\int_{\mathbf{C}}|K(z,w)|e^{-\phi(w)}d\mu(w)e^{-\phi(z)}\leqslant$$
$$C\|f_j(w)\|_{p,\phi}\widetilde{\mu_1}(z)\rho(z)^{-\frac{2}{p}}\to 0,$$

对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得当$|z|\geqslant N$时有$|T_\mu f_j|e^{-\phi}<\varepsilon$. 若$|z|\leqslant N$,则当 $w\to\infty$时$|k_{p,z}(w)|e^{-\phi(w)}\to 0$. 注意到$f_j$为在$\mathbf{C}$上任意紧子集上一致收敛到 0 的序列,由 Lebesgue 控制收敛定理知$\|T_\mu f_j\|_{\infty,\phi}\to 0$,$j\to\infty$. 证毕.

定理 3.3 设 $0<q<\infty$,$\mu\geqslant 0$. 下面说法等价:

(i) $T_\mu:F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)$有界;

(ii) $T_\mu:F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)$紧;

(iii) 对某个或任意 $t>0$,$\widetilde{\mu_t}\in L^q$;

(iv) 对某个或任意 $\delta>0$,$\widehat{\mu_\delta}\in L^q$

(v) 对某个或任意 r-格 $\{a_k\}_k$,$\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2}{q}}\}_k\in l^q$,进而有

$$\|T_\mu\|_{F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)}\simeq\|\widetilde{\mu_t}\|_{L^q}\simeq\|\widehat{\mu_\delta}\|_{L^q}\simeq$$
$$\|\{\widehat{\mu_r}(a_k)\rho(a_k)^{\frac{2}{q}}\}_k\|_{l^q}.$$

证明 由定理 3.1,(iii)⇔(iv)⇔(v),(ii)⇒(i)成立. 下证(i)⇒(v),(iv)⇒(i)及(iv)⇒(ii).

(i)⇒(v). 对任意一 r-格$\{a_k\}_k$,$\{\lambda_k\}_k\in l^\infty$,令

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k k_{2,a_k}(z)\rho(a_k).$$

由引理 2.4,

$$f\in F^\infty(\phi),\|f\|_{\infty,\phi}\leqslant C\|\{\lambda_k\}_k\|_{l^\infty}.$$

则

$$T_\mu f(z)=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k T_\mu(k_{2,a_k}(z))\rho(a_k)\in F^q(\phi).$$

由 Khinchine 不等式和T_μ的有界性有

$$\int_{\mathbf{C}}\Big(\sum_{k=1}^\infty|\lambda_k T_\mu(k_{2,a_k}(z))\rho(a_k)|^2\Big)^{\frac{q}{2}}e^{-\phi(z)}dA(z)\leqslant$$
$$C\|T_\mu\|^q_{F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)}\|\{\lambda_k\}_k\|^q_{l^\infty}.$$

另一方面,由$\{a_k\}_k$的r-格性质知

$$\int_{\mathbf{C}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k T_\mu(k_{2,a_k}(z))\rho(a_k)|^2\Big)^{\frac{q}{2}}\mathrm{e}^{-\phi(z)}\mathrm{d}A(z)\geqslant C\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^q\rho(a_j)^{2+2q}\Big|\int_{D^{r_0}(a_j)}|K(w,a_j)|^2\mathrm{e}^{-\phi(w)}\mathrm{d}\mu(w)\Big|^q\mathrm{e}^{-2\phi(a_j)}\geqslant C\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^q\rho(a_j)^2\widehat{\mu_{r_0}}(a_j)^q\mathrm{e}^{-2\phi(a_j)}.$$

令$\beta_j=|\lambda_j|^q$. 则$\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}\in l^{\infty}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\widehat{\mu_{r_0}}(a_j)^q\rho(a_j)^2\leqslant C\|T_\mu\|^q_{F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)}\|\{\lambda_j\}_j\|^q_{l^\infty}=C\|T_\mu\|^q_{F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)}\|\{\beta_j\}_j\|_{l^\infty}.$$

由对偶性知$\{\widehat{\mu_{r_0}}(a_j)^q\rho(a_j)^2\}_j\in l^1$,

$$\|\{\widehat{\mu_{r_0}}(a_j)^q\rho(a_j)^2\}_j\|_{l^1}\leqslant C\|T_\mu\|^q_{F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)}.$$

所以对任意 r-格$\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$有

$$\|\{\widehat{\mu_{r_0}}(\beta_j)\rho(\beta_j)^{\frac{2}{q}}\}_j\|_{l^q}\leqslant C\|T_\mu\|_{F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)}.$$

其次，设$\widehat{\mu_\delta}\in L^q$. 由引理 2.4，$T_\mu$在$F^\infty(\phi)$中良定义，且对于 $f\in F^\infty(\phi)$有

$$\|T_\mu f\|^q_{q,\phi}\leqslant C\int_{\mathbf{C}}|f(w)|^q\mathrm{e}^{-q\phi(w)}\widehat{\mu_\delta}(w)^q\mathrm{d}A(w)=C\int_{\mathbf{C}}|f(w)e^{-\phi(w)}|^q\widehat{\mu_\delta}(w)^q\mathrm{d}A(w)\leqslant C\|f\|^q_{\infty,\phi}\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_\delta}(w)^q\mathrm{d}A(w).$$

则

$$\|T_\mu f\|^q_{q,\phi}\leqslant C\|f\|^q_{\infty,\phi}\|\widehat{\mu_\delta}(w)\|^q_{L^q}.$$

故 T_μ：$F^\infty(\phi)\to F^q(\phi)$ 有界且 $\|T_\mu\|_{q,\phi}\leqslant C\|\widehat{\mu_\delta}(w)\|_{L^q}$.

(iv)⇒(ii). 若 $0<q\leqslant1$，则对满足$\|f_k\|_{\infty,\phi}\leqslant M$(其中 M 与 k 无关)，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subset F^\infty(\phi)$且当 $k\to\infty$时，f_k在 $\mathbf{C}$ 上任意紧子集上一致收敛到 0 的序列，下式成立：

$$\|T_\mu f_k\|^q_{q,\phi}\leqslant C\int\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_{3r}}(w)^q|f_k(w)K(z,w)\mathrm{e}^{-2\phi(w)}|^q\mathrm{e}^{-q\phi(z)}\mathrm{d}A(w)\mathrm{d}A(z)\leqslant C\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_{3r}}(w)^q|f_k(w)|^q\mathrm{e}^{-q\phi(w)}\mathrm{d}A(w)\int_{\mathbf{C}}|K(z,w)\mathrm{e}^{-\phi(w)}|^q\mathrm{e}^{-q\phi(z)}\mathrm{d}A(z)\leqslant C\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_{3r}}(w)^q|f_k(w)|^q\mathrm{e}^{-q\phi(w)}\mathrm{d}A(w)\leqslant C\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_{3r}}(w)^q|f_k(w)|^q\mathrm{e}^{-q\phi(w)}\mathrm{d}A(w).$$

由$\widehat{\mu_{3r}}(w)\in L^q$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$ 使得

$$\int_{|w|\geqslant R}\widehat{\mu_{3r}}(w)^q|f_k(w)|^q\mathrm{e}^{-q\phi(w)}\mathrm{d}A(w)<\varepsilon.$$

因$f_k(w)$在$|w|\leqslant R$ 上一致收敛于 0，由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $k\to\infty$时，$\|T_\mu f_k\|^q_{q,\phi}\to0$. 若 $1<q<\infty$，则有

$$\|T_\mu f_k\|^q_{q,\phi}\leqslant C\int_{\mathbf{C}}\Big(\int_{\mathbf{C}}|f_k(w)K(z,w)|\widehat{\mu_\delta}(w)\mathrm{e}^{-2\phi(w)}\mathrm{e}^{-\phi(z)}\mathrm{d}A(z)\Big)^q\mathrm{d}A(w)\leqslant C\|f_k\|^q_{\infty,\phi}\int_{\mathbf{C}}\Big(\int_{\mathbf{C}}|K(z,w)|\widehat{\mu_\delta}(w)\mathrm{e}^{-\phi(w)}\mathrm{e}^{-\phi(z)}\mathrm{d}A(z)\Big)^q\mathrm{d}A(w)\leqslant C\|f_k\|^q_{\infty,\phi}\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_\delta}(w)^q\mathrm{d}A(w)\Big(\int_{\mathbf{C}}\mathrm{e}^{-q'\left(\frac{|z-w|}{\rho(z)}\right)^\varepsilon}\mathrm{d}A(z)\Big)^{\frac{q}{q'}}\leqslant C\|f_k\|^q_{\infty,\phi}\int_{\mathbf{C}}\widehat{\mu_\delta}(w)^q\mathrm{d}A(w).$$

其中$\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$. 由$\widehat{\mu_\delta}(w)\in L^q$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R>0$ 使得$\|f\|^q_{\infty,\phi}\int_{|w|\geqslant R}\widehat{\mu_\delta}(w)^q\mathrm{d}A(w)<\varepsilon$. 因$f_k(w)$在$|w|\leqslant R$ 上一致收敛于 0，由 Lebesgue 控制收敛定理，当 $k\to\infty$时，$\|T_\mu f_k\|^q_{q,\phi}\to0$. 证毕.

参考文献:

[1] 何忠华，邓懿. 单位球上 Bloch-Orlicz 空间上的复合算子[J]. 四川大学学报: 自然科学版，2018，55: 237.

[2] Hu Z，Lv X. Toeplitz operators from one Fock space to another [J]. Integr Equat Oper Th，2011，70: 541.

[3] Schenider G，Schenider K. Generalized Hankel operators on the Fock space [J]. Math Nachr，2009，12: 1811.

[4] Schenider G，Schenider K. Generalized Hankel operators on the Fock space II [J]. Math Nachr，2011，14-15: 1967.

[5] Cho H R，Isralowitz J，Joo J C. Toeplitz operators on Fock-Sobolev type spaces [J]. Integr Equat Oper Th，2015，82: 1.

[6] Zhu K. Analysis on Fock spaces [M]. New York: Springer，2012.

[7] Isralowitz J，Zhu K. Toeplitz operators on the Fock space [J]. Integr Equat Oper Th，2010，66: 593.

[8] Schuster A，Varolin D. Toeplitz operators and Carleson measures on generalized Bargmann-Fock spaces [J]. Integr Equat Oper Th，2012，72: 363.

[9] Hu Z，Lv X. Toeplitz operators on Fock spaces $F^p(\phi)$ [J]. Integr Equat Oper Th，2014，80: 33.

[10] Mengestic T. On Toeplitz operators between Fock spaces [J]. Integr Equat Oper Th，2014，78: 213.

[11] Wang X，Cao G，Zhu K. BMO and Hankel operators on Fock-type spaces [J]. J Geom Anal，2015，25: 1650.

[12] Oliver R，Pascusa D. Toeplitz operators on doubling Fock spaces [J]. J Math Anal Appl，2016，435: 1426.

[13] Hu Z，Lv X. Positive Toeplitz operators between different Doubling Fock spaces [J]. Tan J Math，2017，21: 467.

引用本文格式:

中　文: 简舒曼，王晓峰，夏锦. Doubling Fock 空间之间的正 Toeplitz 算子[J]. 四川大学学报: 自然科学版，2020，57: 225.

英　文: Jian S M，Wang X F，Xia J. Positive Toeplitz operators between doubling Fock spaces [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed，2020，57: 225.