doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.03.005

一类高分数阶微分方程边值问题解的存在性

禾丁予
（天津大学数学学院，天津 300350）

摘　要：本文研究了一类高分数阶微分方程边值问题，其非线性项包含未知函数的导数项. 利用 Leray-Schauder 连续性定理和 Banach 压缩映像原理，本文得到了问题解的存在性，并给出两个例子来说明结果的有效性.

关键词：分数阶微分方程；边值问题；Leray-Schauder 连续性定理；Banach 压缩映像原理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)03-0443-07

Existence of solutions for a class of boundary value problem of high-order fractional differential equations

HE Ding-Yu
(School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: This paper investigates a class of boundary value problem of higher-order fractional differential equations involving the first-order derivative in the nonlinear term. Existence of the solutions for the problem is obtained by using the Leray-Schauder continuation theorem and Banach contraction mapping principle. Two examples are presented to illustrate the validity of the results.

Keywords: Fractional differential equation; Boundary value problem; Leray-Schauder continuation theorem; Banach contraction mapping principle
(2010 MSC 34A08, 34B15)

1　引　言

分数阶微分方程在粘弹性力学、非牛顿流体力学、高分子材料和自动控制理论等领域有着广泛的应用[1-2]. 近年来，国内外学者对分数阶微分方程边值问题解的存在性研究也取得了重大进展[3-10]. 如，文献[8]研究了以下分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}(D+\lambda)u(t)=f(t,u(t)),0<t<1, \\ u^{(i)}(0)=0,0\leqslant i\leqslant n-1, \\ u(1)=\beta u(\sigma),0<\sigma<1 \end{cases}$$

解的存在性，这里${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}$为 Caputo 分数阶导数，$\alpha\in(n-1,n]$，$n\geqslant 2$，$f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$\lambda\in\mathbf{R}^+$，$\beta\in\mathbf{R}$ 为常数. 受上述文献的启发，本文研究如下高分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}(D+\lambda)u(t)=f(t,u(t),u'(t)),0<t<1, \\ u^{(i)}(0)=0,0\leqslant i\leqslant n-1,i\neq m, \\ u(1)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $n-1<\alpha\leqslant n$，$n\geqslant 3$，$m\in\{1,2,\cdots,n-2\}$，${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}$ 为 Caputo 分数阶导数，$f\in C([0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{R})$. $\lambda\in\mathbf{R}^+$. 利用 Leray-Schauder 连续性定理和 Banach 压缩映像原理，本文给出了问题解存在唯一的充分条件.

收稿日期：2019-03-18
基金项目：国家自然科学基金(11601372)
作者简介：禾丁予(1994－)，女，山西太原人，硕士研究生，主要研究方向为泛函分析. E-mail：dingyu_he@126.com

2 预备知识

定义 2.1[1] 函数 $y:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的阶数为 $\alpha>0$ 的 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s,$$

等式右端在$(0,\infty)$上逐点定义.

定义 2.2 函数 $y:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的阶数为 $\alpha>0$ 的 Caputo 分数阶导数定义为

$${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}y^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$

等式右端在$(0,\infty)$上逐点定义. 当 $\alpha\in\mathbf{N}$ 时,$n=\alpha$;当 $\alpha\notin\mathbf{N}$ 时,$n=[\alpha]+1$,$[\alpha]$表示 α 的整数部分.

引理 2.3 令 $\alpha>0$,$y\in C^n(0,1)\cap L(0,1)$. 则分数阶微分方程${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y(t)=0$ 有唯一解

$$y(t)=C_0+C_1t+\cdots+C_{n-1}t^{n-1},$$

其中 $C_i\in\mathbf{R}$,$i=0,1,\cdots,n-1$,n 如定义 2.2 所述.

引理 2.4 设 $y\in C^n(0,1)\cap L(0,1)$有 $\alpha>0$ 阶分数阶导数. 则

$$I_{0^+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y(t)=y(t)+C_0+C_1t+\cdots+C_{n-1}t^{n-1},$$

其中 $C_i\in\mathbf{R}$,$i=0,1,\cdots,n-1$,n 如定义 2.2 所述.

记

$$P_h(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}s^h\mathrm{d}s=\sum_{i=0}^{h}\frac{(-1)^i\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+1-i)\lambda^{i+1}}\cdot t^{h-i}-\frac{(-1)^h\Gamma(h+1)}{\lambda^{h+1}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\tag{2}$$

其中 $h=0,1,\cdots,n-1$. 选取适当的 λ,使得

$$mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)\neq 0\tag{3}$$

引理 2.5 设 $y\in C[0,1]$,$n-1<\alpha\leqslant n$,$n\geqslant 3$,$\lambda\in\mathbf{R}^+$,$m\in\{1,2,\cdots,n-2\}$. 若(3)式成立,则边值问题

$$\begin{cases}{}^{C}D_{0^+}^{\alpha}(D+\lambda)u(t)=y(t),0<t<1 & (4)\\ u^{(i)}(0)=0,0\leqslant i\leqslant n-1,i\neq m & (5)\\ u(1)=u'(1)=0 & (6)\end{cases}$$

有唯一解

$$u(t)=\frac{\lambda t^m}{m}\int_0^1\mathrm{e}^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s-\frac{t^m}{m}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s+\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\left[\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s-(\lambda+m)\int_0^1\mathrm{e}^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right]+\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\tag{7}$$

证明 设 u 为方程(4)的解. 由引理 2.4 知

$$(D+\lambda)u(t)=I_{0^+}^{\alpha}y(t)+C_0+C_1t+\cdots+C_{n-1}t^{n-1},C_i\in\mathbf{R},0\leqslant i\leqslant n-1\tag{8}$$

(8)式可以变形为

$$D(\mathrm{e}^{\lambda t}u(t))=[I_{0^+}^{\alpha}y(t)+C_0+C_1t+\cdots+C_{n-1}t^{n-1}]\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

上式两边在 0 到 t 上积分可得

$$u(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_kP_k(t)+\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\tag{9}$$

由(5)式可得

$$C_i=0,i=0,1,2,\cdots,m-2,m+1,\cdots,n-2,$$

且 $\lambda C_{m-1}-mC_m=0$. 将上式代入(9)式可得

$$u(t)=C_{m-1}\left[P_{m-1}(t)+\frac{\lambda}{m}P_m(t)\right]+C_{n-1}P_{n-1}(t)+\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

由$P_h(t)$的表达式(2)计算得

$$P_{m-1}(t)+\frac{\lambda}{m}P_m(t)=\frac{t^m}{m}.$$

所以

$$u(t)=C_{m-1}\frac{t^m}{m}+C_{n-1}P_{n-1}(t)+\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\tag{10}$$

由边值条件(6)可得

$$C_{n-1}=\frac{\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}-\frac{(\lambda+m)\int_0^1\mathrm{e}^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))},$$

$$C_{m-1}=\lambda\int_0^1\mathrm{e}^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s-\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)\mathrm{d}s-C_{n-1}P'_{n-1}(1).$$

因此

$$u(t)=\frac{\lambda t^m}{m}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)d\tau\right)ds-\frac{t^m}{m}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds+\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\cdot\left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds-(\lambda+m)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\cdot\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)d\tau\right)ds\right]+\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)d\tau\right)ds.$$

证毕.

引理 2.6　设 $y\in C[0,1]$，$M=\max\limits_{t\in[0,1]}|y(t)|$. 则有

(i) $$\left|\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(s)ds\right|\leqslant\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)};$$

(ii) $$\left|\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)d\tau\right)ds\right|\leqslant\frac{M}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}(1-e^{-\lambda}).$$

证明　仅证(ii).

$$\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}d\tau=-\frac{(s-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\bigg|_0^s=\frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\left|\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}y(\tau)d\tau\right)ds\right|\leqslant\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}ds\leqslant\frac{M}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}(1-e^{-\lambda}).$$

证毕.

引理 2.7（Leray-Schauder 连续性定理[9]）设 X 是一个 Banach 空间，$T:X\to X$ 为全连续算子. 若集合 $V(T):=\{u\in X:u=\mu Tu$，对某个 $\mu\in[0,1]\}$有界，则算子 T 至少有一个不动点.

引理 2.8(Banach 压缩映像原理[10])　设$(X,\|\cdot\|)$是一个 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 是一个非空闭集，且 $T:\Omega\to\Omega$. 若存在 $\alpha\in[0,1)$使得对任意的 x，$y\in\Omega$，有 $\|Tx-Ty\|\leqslant\alpha\|x-y\|$，则有唯一的$x^*\in\Omega$，使得 $Tx^*=x^*$，即 x^* 是算子 T 的唯一不动点.

3　主要结果

令 $E=C^1[0,1]$. 取范数

$$\|u\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|+\max_{t\in[0,1]}|u'(t)|.$$

则$(E,\|\cdot\|)$为 Banach 空间. 定义

$$Tu(t)=\frac{\lambda t^m}{m}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds-\frac{t^m}{m}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds+\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds-(\lambda+m)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right]+\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds,$$

$$(Tu)'(t)=\lambda t^{m-1}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds-t^{m-1}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds+\frac{P'_{n-1}(t)-t^{m-1}P'_{n-1}(1)}{mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)}\left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds-(\lambda+m)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right]-\lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds+\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds.$$

令

$$M_1=\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\right|,$$

$$M_2=\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{P'_{n-1}(t)-t^{m-1}P'_{n-1}(1)}{mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)}\right|.$$

引理 3.1 算子 $T:E\to E$ 为全连续算子.

证明 由函数 f 的连续性可知,算子 T 连续.

设 $\Omega\subset E$ 为有界集,则存在常数 $N>0$,使得对任意的 $u\in\Omega$,有 $\|u\|\leqslant N$. 记

$$L=\max\{|f(t,u,v)|,(t,u,v)\in[0,1]\times[0,N]\times[0,N]\}.$$

由引理 2.6,对任意的 $u\in\Omega$,有

$$\begin{aligned}|Tu(t)|\leqslant&\left|\frac{\lambda t^m}{m}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right|+\left|\frac{t^m}{m}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds\right|+\\&\left|\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\left[\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds-\right.\right.\\&\left.\left.(\lambda+m)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right]\right|+\\&\left|\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right|\leqslant\\&\frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{\lambda}+M_1\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)\right](1-e^{-\lambda})+\frac{1}{m}+M_1\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(Tu)'(t)|\leqslant&\left|\lambda t^{m-1}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right|+\\&\left|t^{m-1}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds\right|+\\&\left|\frac{P'_{n-1}(t)-t^{m-1}P'_{n-1}(1)}{mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)}\left[\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds-\right.\right.\\&\left.\left.(\lambda+m)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right]\right|+\\&\left|\lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(\tau,u(\tau),u'(\tau))d\tau\right)ds\right|+\left|\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,u(s),u'(s))ds\right|\leqslant\\&\frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\left[2+M_2\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)\right](1-e^{-\lambda})+2+M_2\right\}.\end{aligned}$$

所以 $T(\Omega)$一致有界.

另一方面,设 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$. 对任意的 $u\in\Omega$,有

$$\begin{aligned}|Tu(t_2)-Tu(t_1)|\leqslant&L\left|(t_2{}^m-t_1{}^m)\left\{\frac{2-e^{-\lambda}}{m\Gamma(\alpha+1)}+\frac{P'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\lambda+m)(1-e^{-\lambda})}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}\right]\right\}\right|+\\&L\left|\frac{P_{n-1}(t_2)-P_{n-1}(t_1)}{mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\lambda+m)(1-e^{-\lambda})}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}\right]\right|+L\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(P_\alpha(t_2)-P_\alpha(t_1))\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(Tu)'(t_2)-(Tu)'(t_1)|\leqslant&L\left|(t_2{}^{m-1}-t_1{}^{m-1})\left\{\frac{2-e^{-\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{P'_{n-1}(1)}{mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\lambda+m)(1-e^{-\lambda})}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}\right]\right\}\right|+\\&L\left|\frac{P'_{n-1}(t_2)-P'_{n-1}(t_1)}{mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1)}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(\lambda+m)(1-e^{-\lambda})}{\lambda\Gamma(\alpha+1)}\right]\right|+L\left|\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+1)}(P_\alpha(t_2)-P_\alpha(t_1))\right|+\\&L\left|\frac{t_2{}^\alpha-t_1{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right|.\end{aligned}$$

所以 $T(\Omega)$ 等度连续. 由 Arzela-Ascoli 定理知，算子 T 全连续. 证毕.

记

$$A_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{\lambda}+M_1\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)\right](1-\mathrm{e}^{-\lambda})+\frac{1}{m}+M_1\right\},$$

$$A_2=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\left[2+M_2\left(1+\frac{m}{\lambda}\right)\right](1-\mathrm{e}^{-\lambda})+2+M_2\right\}.$$

定理 3.2　设 $f:(0,1)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数，且存在非负连续函数 ρ_0,ρ_1,ρ_2 使得

$$|f(t,u,v)|\leqslant\rho_0(t)+\rho_1(t)|u|+\rho_2(t)|v|,\quad t\in[0,1],u,v\in\mathbf{R},$$

且满足

$$\max\{\max_{t\in[0,1]}\rho_1(t),\max_{t\in[0,1]}\rho_2(t)\}(A_1+A_2)<1,$$

则边值问题(1) 至少存在一个解.

证明　由引理 3.1 知算子 $T:E\to E$ 为全连续算子. 下证集合 $V=\{u\in E:u=\mu Tu,0\leqslant\mu\leqslant1\}$ 有界. 对任意的 $u\in V,t\in[0,1]$，有

$$u(t)=\mu Tu(t),u'(t)=\mu(Tu)'(t).$$

放缩得

$$|u(t)|\leqslant|Tu(t)|\leqslant A_1\max_{t\in[0,1]}(\rho_0(t)+\rho_1(t)|u(t)|+\rho_2(t)|u'(t)|),$$

$$|u'(t)|\leqslant|(Tu)'(t)|\leqslant A_2\max_{t\in[0,1]}(\rho_0(t)+\rho_1(t)|u(t)|+\rho_2(t)|u'(t)|).$$

因此，

$$\|u\|\leqslant\frac{\max_{t\in[0,1]}\rho_0(t)(A_1+A_2)}{1-\max\{\max_{t\in[0,1]}\rho_1(t),\max_{t\in[0,1]}\rho_2(t)\}(A_1+A_2)}.$$

所以集合 V 是有界的. 由引理 2.7，算子 T 至少有一个不动点，即边值问题(1)至少存在一个解. 证毕.

定理 3.3　设 $f:(0,1)\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数，且存在非负连续函数 γ_1,γ_2，使得

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)|\leqslant\gamma_1(t)|u_1-u_2|+\gamma_2(t)|v_1-v_2|,\quad t\in[0,1],u_i,v_i\in\mathbf{R},i=1,2.$$

且满足

$$\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}(A_1+A_2)<1,$$

则边值问题(1)有唯一解.

证明　记 $\max_{t\in[0,1]}|f(t,0,0)|=N<\infty$. 令

$$B_r=\{u\in E:\|u\|\leqslant r\},$$

其中

$$r\geqslant\frac{N(A_1+A_2)}{1-\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}(A_1+A_2)}.$$

先证 $T(B_r)\subset B_r$. 对任意的 $u\in B_r$，有

$$\begin{aligned}|Tu(t)|\leqslant{}&\frac{\lambda t^m}{m}\int_0^1\mathrm{e}^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[|f(\tau,u(\tau),u'(\tau))-f(\tau,0,0)|+|f(\tau,0,0)|]\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s+\\&\frac{t^m}{m}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[|f(s,u(s),u'(s))-f(s,0,0)|+|f(s,0,0)|]\mathrm{d}s+\\&\left|\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\right[\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[|f(s,u(s),u'(s))-f(s,0,0)|+|f(s,0,0)|]\mathrm{d}s-\\&(\lambda+m)\int_0^1\mathrm{e}^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[|f(\tau,u(\tau),u'(\tau))-f(\tau,0,0)|+|f(\tau,0,0)|]\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\left]\right|+\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[|f(\tau,u(\tau),u'(\tau))-f(\tau,0,0)|+|f(\tau,0,0)|]\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant\\&A_1(\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t)\max_{t\in[0,1]}|u(t)|+\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\max_{t\in[0,1]}|u'(t)|+N)\leqslant\\&A_1(\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}r+N).\end{aligned}$$

同理

$$|(Tu)'(t)|\leqslant A_2(\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}r+N).$$

因此 $\|Tu\|\leqslant r$.

另一方面，对任意的 $u,v\in B_r,t\in[0,1]$，有

$$|Tu(t)-Tv(t)| \leqslant \frac{\lambda t^m}{m}\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\tau,u(\tau),u'(\tau))-f(\tau,v(\tau),v'(\tau))|d\tau\right)ds +$$

$$\frac{t^m}{m}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))|ds +$$

$$\left|\frac{mP_{n-1}(t)-t^mP'_{n-1}(1)}{m(mP_{n-1}(1)-P'_{n-1}(1))}\left[\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))|ds -\right.\right.$$

$$\left.\left.(\lambda+m)\int_0^1 e^{-\lambda(1-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\tau,u(\tau),u'(\tau))-f(\tau,v(\tau),v'(\tau))|d\tau\right)ds\right]\right| +$$

$$\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(\tau,u(\tau),u'(\tau))-f(\tau,v(\tau),v'(\tau))|d\tau\right)ds \leqslant$$

$$A_1(\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t)\max_{t\in[0,1]}|u(t)-v(t)|+\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\max_{t\in[0,1]}|u'(t)-v'(t)|)\leqslant$$

$$A_1(\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}\|u-v\|).$$

同理

$$|(Tu)'(t)-(Tv)'(t)|\leqslant A_2(\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}\|u-v\|).$$

则

$$\|Tu-Tv\|\leqslant(A_1+A_2)(\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}\|u-v\|).$$

由 $\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}(A_1+A_2)<1$，$T$ 为一个压缩算子，再由引理 2.8，算子 T 有唯一的不动点，即边值问题(1) 存在唯一解. 证毕.

4 例 子

例 4.1 考虑边值问题

$$\begin{cases} {}^CD_{0^+}^{\frac{5}{2}}(D+2)u(t)=k_1(t)\sin u(t)+ \\ \quad k_2(t)\sin u'(t)+g(t),0<t<1, \\ u(0)=u''(0)=0,u(1)=u'(1)=0, \end{cases}$$

其中$k_1(t)$，$k_2(t)$，$g(t)$为$[0,1]$上的连续函数，$\alpha=\frac{5}{2}$，$n=3$，$m=1$，$\lambda=2$，且

$$f(t,u,u')=k_1(t)\sin u+k_2(t)\sin u'+g(t).$$

计算可得

$$P_2(t)=\frac{\lambda^2t^2-2\lambda t+2-2e^{-\lambda t}}{\lambda^3},$$

$$P'_2(t)=\frac{2\lambda^2t-2\lambda+2\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda^3},$$

$M_1=1$，$M_2=1.6150$，

$A_1=1.3823$，$A_2=2.2384$.

又因为

$$|f(t,u,u')|\leqslant|k_1(t)||u|+|k_2(t)||u'|+|g(t)|,$$

由定理 3.2，只要

$$\max\{\max_{t\in[0,1]}|k_1(t)|,\max_{t\in[0,1]}|k_2(t)|\}<\frac{1}{A_1+A_2}=0.2762,$$

该边值问题就至少存在一个解.

例 4.2 考虑边值问题

$$\begin{cases} {}^CD_{0^+}^{\frac{7}{2}}(D+1)u(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}\sin u(t)+ \\ \quad \frac{1}{4}u'(t)+g(t),\ 0<t<1, \\ u(0)=u''(0)=u'''(0)=0,u(1)=u'(1)=0, \end{cases}$$

其中 $g(t)$为$[0,1]$上的连续函数，这里 $\alpha=\frac{7}{2}$，$n=4$，$m=1$，$\lambda=1$，且

$$f(t,u,u')=\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}\sin u+\frac{1}{4}u'+g(t).$$

计算可得

$$P_3(t)=\frac{\lambda^3t^3-3\lambda^2t^2+6\lambda t-6+6e^{-\lambda t}}{\lambda^4},$$

$$P'_3(t)=\frac{3\lambda^3t^2-6\lambda^2t+6\lambda-6\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda^4},$$

$M_1=1$，$M_2=1.3540$.

$A_1=0.3893$，$A_2=0.5442$.

另外，我们有

$$|f(t,u,u')-f(t,v,v')|\leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}|u-v|+\frac{1}{4}|u'-v'|.$$

取

$$\gamma_1(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+2}},\gamma_2(t)=\frac{1}{4}.$$

则有

$$\max\{\max_{t\in[0,1]}\gamma_1(t),\max_{t\in[0,1]}\gamma_2(t)\}(A_1+A_2)=0.6601<1.$$

由定理 3.3,该边值问题有唯一解.

参考文献：

[1] Kilbas A A, Srivastave H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: North Holland, 2006.

[2] 白占兵.分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京：中国科学技术出版社，2012.

[3] Ahmad B, Nieto J J. Sequential fractional differential equations with three-point boundary conditions [J]. Comput Math Appl, 2012, 64: 3046.

[4] 张海燕，李耀红.一类高分数阶微分方程的积分边值问题的正解[J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：512.

[5] Alsaedi A, Ntouyas S K, Agarwal R P, *et al*. On Caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions [J]. Adv Differ Equ, 2015, 2015: 33.

[6] Ahmad B, Ntouyas S K. Existence results for a coupled system of Caputo type sequential fractional differential equations with nonlocal integral boundary conditions [J]. Appl Math Comput, 2015, 266: 615.

[7] 张立新，杨玉洁，贾文敬.一类 Caputo 分数阶微分方程积分边值问题的正解[J].四川大学学报：自然科学版，2017，54：1169.

[8] Ahmad B, Ntouyas S K. A higher-order nonlocal three-point boundary value problem for sequential fractional differential equations[J]. Miskolc Math Notes, 2014, 15: 265.

[9] Kosmatov N. A singular boundary value problem for nonlinear differertial equations of fractional order [J]. Appl Math Comput, 2009, 19: 125.

[10] 苏新卫. Banach 压缩映像原理应用分析[J].高师理科学刊，2016，36：14.

引用本文格式：

中　文：禾丁予. 一类高分数阶微分方程边值问题解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：443.

英　文：He D Y. Existence of solutions for a class of boundary value problem of high-order fractional differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 443.