2020 年 5 月 四川大学学报(自然科学版) May 2020
第 57 卷 第 3 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 57 No. 3

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.03.006

一类非自治三阶常微分方程周期解的存在性

杨虎军，韩晓玲，罗 强
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文研究了一类非自治三阶常微分方程 $x'''-a(t)x+b(t)x^2-c(t)x^3=0$ 正周期解的存在性，其中 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 是连续的 T-周期函数，满足 $0<a\leqslant a(t)\leqslant A$，$0<b\leqslant b(t)\leqslant B$，$0<c\leqslant c(t)\leqslant C$，$a$，$A$，$b$，$B$，$c$，$C$ 是正常数. 运用 Mawhin 延拓定理，本文证明了方程至少存在两个正 T-周期解.

关键词：三阶常微分方程；周期解；重合度

中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2020)03-0450-05

Existence of periodic solutions for a class of nonautonomous third-order ordinary differential equations

YANG Hu-Jun, *HAN Xiao-Ling*, *LUO Qiang*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of positive periodic solutions for a class of nonautonomous third-order ordinary differential equations $x'''-a(t)x+b(t)x^2-c(t)x^3=0$, where $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ are continuous T-periodic functions satisfying $0<a\leqslant a(t)\leqslant A$, $0<b\leqslant b(t)\leqslant B$, $0<c\leqslant c(t)\leqslant C$, a, A, b, B, c, C are positive constants. Using Mawhin′s continuation theorem, we prove that there exist at least two positive T-periodic solutions for this equation.

Keywords: Third order ordinary differential equation; Periodic solution; Coincidence degree theory
(2010 MSC 34B15)

1 引 言

具有周期解的常微分方程在物理学，天文学，生物数学等领域中有广泛应用[1-2]. 最近几十年，许多学者致力于研究常微分方程周期解的存在性并取得了丰富的结果[3-10]. 如 Araujo[7] 讨论了非自治二阶常微分方程

$$x''+a(t)x-b(t)x^2+c(t)x^3=0 \tag{1}$$

正周期解的存在性，其中 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 是连续的 T-周期函数，满足 $0<a\leqslant a(t)\leqslant A$，$0<b\leqslant b(t)\leqslant B$，$0<c\leqslant c(t)\leqslant C$，$a$，$A$，$b$，$B$，$c$，$C$，是正常数. 该方程是文献[8-9]中出现的一类生物数学模型，主要描述 Willis 环动脉瘤内存在的高脉冲率或压力升高的危险，同时表明了降低脉冲频率也可能是危险的. 此外，Grossinho 等[10] 用山路引理证明了(1)式周期解的存在性.

受上述工作的启发，本文将此方程推广到三阶情形，并运用 Mawhin 延拓定理研究了非自治三阶常微分方程

$$x'''-a(t)x+b(t)x^2-c(t)x^3=0 \tag{2}$$

正周期解的存在性，其中 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 是连续的 T-周期函数，满足 $0<a\leqslant a(t)\leqslant A$，$0<b\leqslant b(t)\leqslant$

收稿日期：2019-03-26
基金项目：国家自然科学基金(11561063)；西北师范大学研究生科研资助项目(2019KYZZ012035)
作者简介：杨虎军(1995－)，男，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程及其应用. E-mail：982047468@qq.com
通讯作者：韩晓玲. E-mail：hanxiaolingq@163.com

B，$0<c\leqslant c(t)\leqslant C$，$a,A,b,B,c,C$是正常数. 我们证明了方程(2)至少存在两个正周期解.

2　预备知识

设$C^1([0,T])$为定义在$[0,T]$上的1次连续可微实值函数在范数$\|x\|_{C^1}=\max\{|x|_\infty, |x'|_\infty\}$下的Banach空间，其中$|x|_\infty=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$，$|x'|_\infty=\max\limits_{t\in[0,T]}|x'(t)|$.

设Sobolev空间$H^2(0,T)=W^{2,2}(0,T)$，其范数为$\|x\|_{H^2(0,T)}=\left\{\sum\limits_{i=0}^{2}\|x^{(i)}\|_{L_2}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

定义2.1[11]　设X和Y为实Banach空间，L：$D(L)\subset X\to Y$是一个线性映射. 如果L满足

(i) Im(L)是Y的闭子空间；

(ii) dimKerL=codimIm(L)$<+\infty$，

则称L是一个零指标的Fredholm映射.

若L是一个零指标的Fredholm映射，则存在连续投影算子P：$X\to X$和Q：$Y\to Y$，满足ImP=Ker$L$，Ker$Q$=ImL=Im$(I-Q)$. 记L_p：$D(L)\cap$Ker$P\to$ImL是L在$D(L)\cap$Ker$P$上的限制. 显然L_P是可逆的. 记$K_p=L_p^{-1}$.

定义2.2[12]　设X,Y为赋范空间，映射N：$X\to Y$是一个连续映射，Ω为X的有界开子集. 如果$QN(\overline{\Omega})$有界且$K_P(I-Q)N$：$\overline{\Omega}\to X$是紧映射，则称映射N在$\overline{\Omega}$上是L-紧的.

下面给出本文的主要工具定理Mawhin延拓定理.

定理2.3[13]　设L是零指标的Fredholm映射，N在$\overline{\Omega}$上是L-紧的. 假设下列条件成立：

(i) $Lx\neq\lambda Nx$，$\forall x\in\partial\Omega\cap D(L)$，$\lambda\in(0,1)$；

(ii) $QNx\neq 0$，$\forall x\in$KerL$\cap\partial\Omega$；

(iii) $\deg\{JQN, \Omega\cap \mathrm{Ker}L, 0\}\neq 0$，

其中J：Im$Q\to$KerL为同构映射，则方程$Lx=Nx$在$D(L)\cap\overline{\Omega}$上至少存在一个解.

3　主要结果

定理3.1　设$a(t),b(t),c(t)$是连续的T-周期函数，满足

$$0<a\leqslant a(t)\leqslant A,0<b\leqslant b(t)\leqslant B,\quad 0<c\leqslant c(t)\leqslant C \tag{3}$$

这里a,A,b,B,c,C是正常数，满足

$$b^2-4AC>0,\ \frac{B-\sqrt{b^2-4AC}}{2c}<\frac{b+\sqrt{b^2-4AC}}{2C} \tag{4}$$

周期T满足

$$0<T\leqslant\frac{1}{\gamma^2(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2+2)} \tag{5}$$

这里γ是$H^2(0,T)$嵌入到$C^1([0,T])$中的嵌入常数，且$J_{1/2}:=\dfrac{B+\sqrt{B^2-4ac}}{2c}+1/2$. 则方程(2)至少存在两个正$T$-周期解.

证明　考虑Banach空间$X=Y=\{x\mid x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}), x(t+T)=x(t), \forall t\in\mathbf{R}\}$，其范数为$\|x\|_Y=|x|_\infty$，这里$|x|_\infty=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$. 定义线性算子$L$：$D(L)\subset X\to Y$

$$Lx=x''',\ x\in D(L) \tag{6}$$

其中$D(L)=\{x\mid x^{(i)}(0)=x^{(i)}(T),\ i=0,1,2,\ x'''\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\}$.

定义非线性算子N：$Y\to Y$如下：

$$Nx=a(t)x-b(t)x^2+c(t)x^3 \tag{7}$$

不难验证Ker$L=\mathbf{R}$，且

$$\mathrm{Im}L=\left\{x\mid x\in Y,\int_0^T x(s)\mathrm{d}s=0\right\}.$$

因此算子L是一个零指标的Fredholm映射.

定义连续投影算子P：$X\to$Ker$L$，Q：$Y\to Y$满足$Px(t)=x(0)$和$Qx(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(s)\mathrm{d}s$. 因此，Im$P$=Ker$L$，Ker$Q$=Im$L$. 设$K_p$：Im$L\to D(L)\cap$Ker$P$是$L$在$D(L)\cap$KerP上限制的逆. 于是

$$K_py(t)=\int_0^T G(s,t)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(s,t)=\begin{cases}\dfrac{t^2s-s^2t-Tts+s^2T}{2T}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\\ \dfrac{Tts-s^2t-Tt^2+st^2}{2T}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant T.\end{cases}$$

则算子QN：$X\to Y$和$K_P(I-Q)N$：$X\to X$为

$$QNx=\frac{1}{T}\int_0^T a(s)x(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{T}\int_0^T b(s)x^2(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{T}\int_0^T c(s)x^3(s)\mathrm{d}s,$$

$$K_P(I-Q)Nx=\int_0^T G(s,t)a(s)x(s)\mathrm{d}s-\int_0^T G(s,t)b(s)x^2(s)\mathrm{d}s+\int_0^T G(s,t)c(s)x^3(s)\mathrm{d}s-QNx\left(\frac{T^2t-3Tt^2+2t^3}{12}\right).$$

显然算子QN和$K_P(I-Q)N$是连续的. 由Arzela-Ascoli定理可知，对任意的有界开集$\Omega\subset Y$，算子$K_P(I-Q)N(\overline{\Omega})$是紧的，且$QN(\overline{\Omega})$有界. 所以对任意的有界开集$\Omega\subset Y$，$N$在$\overline{\Omega}$是$L$-紧的.

记

$$\Omega_{1/2}:=\{x\in Y \mid S<x(t)<J_{1/2}\} \tag{8}$$

是 Y 中的开集,这里

$$J_{1/2}:=J+1/2,\ J:=\frac{B+\sqrt{B^2-4ac}}{2c}>0 \tag{9}$$

S 是 $\frac{B-\sqrt{b^2-4AC}}{2c}$ 和 $\frac{b+\sqrt{b^2-4AC}}{2C}$ 的算术平均值,即

$$S:=\frac{B-\sqrt{b^2-4AC}}{4c}+\frac{b+\sqrt{b^2-4AC}}{4C} \tag{10}$$

由(4)式可知,J 和 S 的定义是合适的. 由(3),(4)式可知,对任意 $t\in[0,T]$,有

$$S<\frac{b+\sqrt{b^2-4AC}}{2C}\leqslant \frac{b(t)+\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\leqslant \frac{B+\sqrt{B^2-4ac}}{2c}<J_{1/2} \tag{11}$$

$$0<\frac{2ac}{C(B+\sqrt{B^2-4ac})}\leqslant \frac{b(t)-\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\leqslant \frac{B-\sqrt{b^2-4AC}}{2c}<S \tag{12}$$

由(3),(11),(12)式可知

$$a(t)-b(t)J_{1/2}+c(t)J_{1/2}^2= c(t)\left(J_{1/2}-\frac{b(t)+\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\right)\cdot \left(J_{1/2}-\frac{b(t)-\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\right)\geqslant c(t)\left(J_{1/2}-\frac{b(t)-\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\right)\frac{1}{2}\geqslant \frac{1}{4}c>0,$$

即

$$a(t)-b(t)J_{1/2}+c(t)J_{1/2}^2>0 \tag{13}$$

由(3),(11),(12)式可知

$$a(t)-b(t)S+c(t)S^2= c(t)\left(S-\frac{b(t)+\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\right)\cdot \left(S-\frac{b(t)-\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\right)<0,$$

即

$$a(t)-b(t)S+c(t)S^2<0 \tag{14}$$

设 $0<\lambda<1$ 且存在 x 使得

$$x'''-\lambda a(t)x+\lambda b(t)x^2-\lambda c(t)x^3=0 \tag{15}$$

将(15)式两边同时乘以 x' 并且在 $[0,T]$ 上积分得

$$\int_0^T[x'''x'-\lambda a(t)xx'+\lambda b(t)x^2x'-\lambda c(t)x^3x']\mathrm{d}t=0 \tag{16}$$

由分部积分法得

$$\int_0^T x'''x'\mathrm{d}t=-\int_0^T(x'')^2\mathrm{d}t \tag{17}$$

将(17)式代入(16)式得

$$\int_0^T[(x'')^2+\lambda a(t)xx'-\lambda b(t)x^2x'+\lambda c(t)x^3x']\mathrm{d}t=0.$$

由(8)式可知,若 $x\in\partial\Omega_{1/2}$,则有 $S\leqslant|x|_\infty\leqslant J_{1/2}$. 由(3),(11),(12)式可知,$A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2>0$. 于是

$$\begin{aligned}0&=\int_0^T(x'')^2\mathrm{d}t+\int_0^T[\lambda a(t)xx'-\lambda b(t)x^2x'+\lambda c(t)x^3x']\mathrm{d}t>\\&\int_0^T(x'')^2\mathrm{d}t-\lambda\int_0^T[a(t)x\mid x'\mid+b(t)x^2\mid x'\mid+c(t)x^3\mid x'\mid]\mathrm{d}t>\\&\int_0^T(x'')^2\mathrm{d}t-\int_0^T[a(t)x\mid x'\mid+b(t)x^2\mid x'\mid+c(t)x^3\mid x'\mid]\mathrm{d}t=\\&\int_0^T[x^2+(x')^2+(x'')^2]\mathrm{d}t-\int_0^T[a(t)x\mid x'\mid+b(t)x^2\mid x'\mid+c(t)x^3\mid x'\mid]\mathrm{d}t-\int_0^T[x^2+(x')^2]\mathrm{d}t\geqslant\\&\|x\|_{H^2(0,T)}^2-\int_0^T x\mid x'\mid(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2)\mathrm{d}t-\int_0^T[x^2+(x')^2]\mathrm{d}t\geqslant\\&\frac{1}{\gamma^2}\|x\|_{C^1}^2-T\|x\|_{C^1}^2(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2)-2T\|x\|_{C^1}^2=\\&\left[\frac{1}{\gamma^2}-T(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2+2)\right]\|x\|_{C^1}^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

这里 γ 是 $H^2(0,T)$ 嵌入到 $C^1([0,T])$ 中的嵌入常数. 矛盾. 从而对 $\Omega=\Omega_{1/2}$，定理 2.3 的条件(i)成立.

取 $x\in\partial\Omega_{1/2}\cap\mathrm{Ker}L$. 则 $x=S$ 或 $x=J_{1/2}$. 由(13)，(14)式可知，$\forall x\in\partial\Omega_{1/2}\cap\mathrm{Ker}L$，有

$$QNx=\frac{1}{T}\int_0^T[x(a(t)-b(t)x+c(t)x^2)]\mathrm{d}t\neq 0 \tag{18}$$

因此，对 $\Omega=\Omega_{1/2}$，定理 2.3 的条件(ii)成立.

考虑 $\frac{S+J_{1/2}}{2}$，即 S 和 $J_{1/2}$ 的算术平均值. 定义连续函数

$$H(x,\mu)=(1-\mu)\left(x-\frac{S+J_{1/2}}{2}\right)+\mu\frac{1}{T}\int_0^T[x(a(t)-b(t)x+c(t)x^2)]\mathrm{d}t,\mu\in[0,1].$$

由(18)式可知

$$H(x,\mu)\neq 0,\ \forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega_{1/2}.$$

由拓扑度的同伦不变性有

$$\begin{aligned}&\deg(QN,\mathrm{Ker}L\cap\Omega_{1/2},0)=\\&\quad\deg\left(\frac{1}{T}\int_0^T[x(a(t)-b(t)x+c(t)x^2)]\mathrm{d}t,\right.\\&\left.\mathrm{Ker}L\cap\Omega_{1/2},0\right)=\\&\deg\left(x-\frac{S+J_{1/2}}{2},\Omega_{1/2}\cap\mathrm{Ker}L,0\right)=1\neq 0,\end{aligned}$$

即对 $\Omega=\Omega_{1/2}$，定理 2.3 的条件(iii)成立. 故方程(2)在 $\overline{\Omega}_{1/2}\cap D(L)$ 中至少存在一个正的 T-周期解.

下证方程(2)存在第二个解. 记

$$\Omega_\varepsilon:=\{x\in Y\ |\ J_\varepsilon<x(t)<S\} \tag{19}$$

是 Y 中的开集. 由(12)式可知，存在足够小的 ε，使得对 $t\in[0,T]$ 有

$$\begin{aligned}0<J_\varepsilon:=&\frac{2ac}{C(B+\sqrt{B^2-4ac})}-\varepsilon<\\&\frac{b(t)-\sqrt{b(t)^2-4a(t)c(t)}}{2c(t)}\leqslant\\&\frac{B-\sqrt{b^2-4AC}}{2c}<S\end{aligned} \tag{20}$$

于是

$$a(t)-b(t)J_\varepsilon+c(t)J_\varepsilon^2>0 \tag{21}$$

由(14)式可知

$$a(t)-b(t)S+c(t)S^2<0 \tag{22}$$

设 $0<\lambda<1$ 且存在 x 使得

$$x'''-\lambda a(t)x+\lambda b(t)x^2-\lambda c(t)x^3=0 \tag{23}$$

将(23)式两边同时乘以 x' 并且在 $[0,T]$ 上积分得

$$\int_0^T[x'''x'-\lambda a(t)xx'+\lambda b(t)x^2x'-\lambda c(t)x^3x']\mathrm{d}t=0 \tag{24}$$

将(17)式代入(24)式得

$$\int_0^T[(x'')^2+\lambda a(t)xx'-\lambda b(t)x^2x'+\lambda c(t)x^3x']\mathrm{d}t=0.$$

由(19)式知，若 $x\in\partial\Omega_\varepsilon$，则有 $J_\varepsilon\leqslant|x|_\infty\leqslant S$. 由(3)，(20)式可知，$A+BS+CS^2>0$. 于是

$$\begin{aligned}0=&\int_0^T(x'')^2\mathrm{d}t+\int_0^T[\lambda a(t)xx'-\lambda b(t)x^2x'+\lambda c(t)x^3x']\mathrm{d}t>\\&\int_0^T(x'')^2\mathrm{d}t-\lambda\int_0^T[a(t)x\,|x'|+b(t)x^2\,|x'|+c(t)x^3\,|x'|]\mathrm{d}t>\\&\int_0^T(x'')^2dt-\int_0^T[a(t)x\,|x'|+b(t)x^2\,|x'|+c(t)x^3\,|x'|]\mathrm{d}t=\\&\int_0^T[x^2+(x')^2+(x'')^2]\mathrm{d}t-\int_0^T[a(t)x\,|x'|+b(t)x^2\,|x'|+c(t)x^3\,|x'|]\mathrm{d}t-\int_0^T[x^2+(x')^2]\mathrm{d}t\geqslant\\&\|x\|_{H^2(0,T)}^2-\int_0^T[x\,|x'|\,(A+BS+CS^2)]\mathrm{d}t-\int_0^T[x^2+(x')^2]\mathrm{d}t>\\&\|x\|_{H^2(0,T)}^2-\int_0^T[x\,|x'|\,(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2)]\mathrm{d}t-\int_0^T[x^2+(x')^2]\mathrm{d}t\geqslant\\&\frac{1}{\gamma^2}\|x\|_{C^1}^2-T\|x\|_{C^1}^2(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2)-2T\|x\|_{C^1}^2=\\&\left[\frac{1}{\gamma^2}-T(A+BJ_{1/2}+CJ_{1/2}^2+2)\right]\|x\|_{C^1}^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

这里 γ 是 $H^2(0,T)$ 嵌入到 $C^1([0,T])$ 中的嵌入常数. 矛盾. 因而对 $\Omega=\Omega_\varepsilon$，定理 2.3 的条件(i)成立.

取 $x\in\partial\Omega_\varepsilon\cap\mathrm{Ker}L$. 则有 $x=S$ 或 $x=J_\varepsilon$. 由(21)，(22)式可知，$\forall x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega_\varepsilon$，有

$$QNx=\frac{1}{T}\int_0^T[x(a(t)-b(t)x+c(t)x^2)]\mathrm{d}t\neq 0$$

$$(25)$$

因此对 $\Omega=\Omega_\varepsilon$,定理 2.3 的条件(ii)成立.

考虑$\frac{S+J_\varepsilon}{2}$,即 S 和 J_ε 的算术平均值. 定义连续函数

$$H(x,\mu)=-(1-\mu)\left(x-\frac{S+J_\varepsilon}{2}\right)+\mu\frac{1}{T}\int_0^T[x(a(t)-b(t)x+c(t)x^2)]\mathrm{d}t,\mu\in[0,1].$$

由(25)式可知

$$H(x,\mu)\neq 0,\ \forall x\in \mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega_\varepsilon.$$

由拓扑度的同伦不变性，有

$$\deg(QN,\Omega_\varepsilon\cap \mathrm{Ker}L,0)=\deg\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T[x(a(t)-b(t)x+c(t)x^2)]\mathrm{d}t,\Omega_\varepsilon\cap\mathrm{Ker}L,0\right)=\deg\left(-\left(x-\frac{S+J_\varepsilon}{2}\right),\Omega_\varepsilon\cap\mathrm{Ker}L,0\right)=-1\neq 0,$$

即对 $\Omega=\Omega_\varepsilon$,定理 2.3 的条件(iii)成立. 方程故(2)在 $\overline{\Omega}_\varepsilon\cap D(L)$中至少存在一个正的 T-周期解.

既然 $\overline{\Omega}_{1/2}\cap\overline{\Omega}_\varepsilon=\{x=S\}$,由(21)式可知,$S$ 不满足方程(2). 故定理 3.1 成立. 证毕.

例 3.2 在方程(2)中取 $a(t)=\cos(\frac{2\pi t}{T})+3$, $b(t)=\sin(\frac{2\pi t}{T})+11$, $c(t)=|\cos(\frac{2\pi t}{T})|+4$. 令 $a=2,A=4,b=10,B=12,c=4,C=5$. 于是

$$b^2-4AC=100-80=20>0,$$

$$\frac{B-\sqrt{b^2-4AC}}{2c}=\frac{12-\sqrt{20}}{8}<\frac{10+\sqrt{20}}{10}=\frac{b+\sqrt{b^2-4AC}}{2C}.$$

若周期 T 满足

$$0<T<\frac{4}{\gamma^2(235+64\sqrt{7})},$$

则定理 3.1 保证了方程

$$x'''-\left(\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)+3\right)x+\left(\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)+11\right)x^2-\left(\left|\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right|+4\right)x^3=0$$

至少有两个正的 T-周期解.

参考文献:

[1] Nieto J J, Torres A. A nonlinear biomathematical model for the study of intracranial aneurysms [J]. J Neurol Sci, 2000, 177: 18.

[2] Alliera C H D, Amster P. Systems of delay differential equations: analysis of a model with feedback [J]. Commun Nonlinear Sci, 2018, 65: 299.

[3] Feltrin G, Zanolin F. Multiplicity of positive periodic solutions in the superlinear indefinite case via coincidence degree [J]. J Differ Equ, 2017, 262: 4255.

[4] 文乾，李永祥. 单边增长条件下的 $2n$ 阶常微分方程的奇周期解[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 1167.

[5] 马满堂. 一类非线性二阶常微分方程周期问题正解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2018, 55: 693.

[6] Makhlouf A, Debbabi D. Periodic solutions of some classes of continuous third-order differential equations [J]. Chaos Solitons Fract, 2017, 94: 112.

[7] Araujo A L A. Periodic solutions for a nonautonomous ordinary differential equation [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2012, 75: 2897.

[8] Cronin J. Biomathematical model of aneurysm of the circle of Willis: a quantitative analysis of the differential equation of Austin [J]. Math Biosci, 1973, 16: 209.

[9] Austin G. Biomathematical model of aneurysm of the circle of Willis I: the Duffing equation and some approximate solutions [J]. Math Biosci, 1971, 11: 163.

[10] Grossinho M R, Sanchez L. A note on periodic solutions of some nonautonomous differential equations [J]. B Aust Math Soc, 1986, 34: 253.

[11] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[12] Nieto J J, José M. Pulse positive periodic solutions for some classes of singular nonlinearities [J]. Appl Math Lett, 2018, 86: 134.

[13] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer, 1997.

引用本文格式:

中 文: 杨虎军，韩晓玲，罗强. 一类非自治三阶常微分方程周期解的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 450.

英 文: Yang H J, Han X L, Luo Q. Existence of periodic solutions for a class of nonautonomous third-order ordinary differential equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 450.