doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.02.005

一类一阶差分方程周期边值问题正解连通分支的振荡及无穷多个正解的存在性

苏肖肖
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了一类一阶差分方程周期边值问题 $-\Delta x(t)+q(t)x(t)=\lambda a(t)x(t)+f(t,x(t))x(t), t\in\hat{T}$, $x(0)=x(T)$ 正解连通分支的振荡及无穷多个正解的存在性，其中 $\lambda>0$ 是参数，$T>2$ 是整数，$\hat{T}:=\{0,1,\cdots T-1\}$，$q:\hat{T}\to[0,\infty)$，$a:\hat{T}\to(0,\infty)$，$f:\hat{T}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续，$f(t,0)=0$. 主要结果的证明基于 Rabinowitz 全局分歧定理.

关键词：差分方程；正解；连通分支；振荡；全局分歧定理
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)02-0231-05

Existence of infinite positive solutions and oscillation of connected component of positive solutions for a class of periodic boundary value problems of first order difference equation

SU Xiao-Xiao
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, LanZhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of infinite positive solutions and oscillation of connected component of positive solutions for the periodic boundary value problems of the first order difference equation $-\Delta x(t)+q(t)x(t)=\lambda a(t)x(t)+f(t,x(t))x(t), t\in\hat{T}$, $x(0)=x(T)$, where $\lambda>0$ is a parameter, $T>2$ is a integer, $\hat{T}:=\{0,1,\cdots T-1\}$, $q:\hat{T}\to[0,\infty)$, $a:\hat{T}\to(0,\infty)$, $f:\hat{T}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is continuous and $f(t,0)=0$ satisfies some conditions. The proof of the main results is based on the Rabinowitz global bifurcation theorems.

Keywords: Difference equation; Positive solution; Connected component; Oscillation; Global bifurcation theorem
(2010 MSC 26A33)

1　引　言

近年来，对一阶常微分方程周期边值问题的研究已有诸多结果[1-6]，而对一阶差分方程周期边值问题的研究则相对较少. 比如，Sun[6] 运用锥拉伸与压缩不动点定理获得了一阶差分方程周期边值问题

$$-\Delta x(t)=f(t,x(t+1)), t\in\{0,1,\cdots,T\},$$
$$x(0)=x(T+1)$$

正解的存在性，其中 $T>2$ 是整数，$f:\{0,1,\cdots,T\}\times$

收稿日期：2019-03-30
基金项目：国家自然科学基金(11671322)
作者简介：苏肖肖(1995－)，女，甘肃天水人，硕士生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：suxiaoxiao2856@163.com

$[0,\infty)\to\mathbf{R}$ 连续. 值得注意的是,该文虽然获得了正解的存在性,但没有得到正解集的全局结构.

随着分歧理论的发展,一阶差分方程周期边值问题正解连通分支的走向问题也获得了一些结果,如 Ma 等[7]获得了该类问题从特征值处产生的连通分支是向左或向右分歧的,并给出了连通分支具有简单结构的条件. 但据我们所知,对于一阶差分方程周期边值问题正解连通分支无穷多次振荡的结构性态尚未被研究.

本文的目的是研究一类一阶差分方程周期边值问题

$$-\Delta x(t)+q(t)x(t)=\lambda a(t)x(t)+f(t,x(t))x(t),\quad t\in\hat{T},\ x(0)=x(T) \tag{1}$$

正解连通分支的振荡性及无穷多个正解的存在性,其中 $\lambda>0$ 是参数,$T>2$ 是整数,$\hat{T}:=\{0,1,\cdots T-1\}$. 本文总假定:

(H1) $q:\hat{T}\to[0,\infty)$;

(H2) $a:\hat{T}\to(0,\infty)$;

(H3) $f:\hat{T}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续且 $f(t,0)=0$;

(H4) 存在非负常数 γ^{--},γ^{++} 使得 $-\gamma^{--}\leqslant\frac{f(t,\xi)}{a(t)}\leqslant\gamma^{++},(t,\xi)\in\hat{T}\times\mathbf{R}$;

(H5) 存在非负常数 γ^{-},γ^{+} 及正数 $\xi_j,j=1,2,\cdots$ 的递增序列,使得对任意 j 满足 $\xi_j<\frac{m}{M}\xi_{j+1}$,且对于任意 $t\in\hat{T}$ 满足

$$\gamma^{+}\leqslant\frac{f(t,\xi)}{a(t)},\xi\in\left(\frac{m}{M}\xi_{2j-1},\xi_{2j-1}\right),$$

$$-\gamma^{-}\geqslant\frac{f(t,\xi)}{a(t)},\xi\in\left(\frac{m}{M}\xi_{2j},\xi_{2j}\right),$$

其中 M,m 分别是问题(1)对应齐次方程的格林函数的最大最小值.

记

$$\boldsymbol{I}_1:=\left[\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{++},\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{--}\right],$$

$$\boldsymbol{I}_2:=\left[\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{+},\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{-}\right].$$

$X=\{x\,|\,x:\{0,1,\cdots,T\}\to\mathbf{R}\,|\,x(0)=x(T)\}$ 为在范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in\hat{T}}|x(t)|$ 下构成的 Banach 空间.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 设(H1)~(H4)成立. 则问题(1)的任意正解均在集合 $\boldsymbol{I}_1\times X$ 中. 特别地,$C_1^+\in\boldsymbol{I}_1\times X$,其中 C_1^+ 表示问题(1)的正解连通分支.

定理 1.2 假设(H1)~(H5)成立. 设(λ,x)是问题(1)的任意正解. 若 $\|x\|=\xi_{2j-1},j\geqslant1$,则 $\lambda<\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{+}$;若 $\|x\|=\xi_{2j},j\geqslant1$,则 $\lambda>\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{-}$.

推论 1.3 假设(H1)~(H5)成立. 则连通分支 $C_1^+\in\boldsymbol{I}_1\times X$ 是无界的. 当 C_1^+ 趋于无穷时,C_1^+ 在区间 $\boldsymbol{I}_2$ 上振荡无穷多次,即对每个 $\lambda\in\boldsymbol{I}_2$ 都存在无穷多个正解$(\lambda,x)\in C_1^+$.

2 预备知识

重新记 $\hat{T}:=\{0,1,\cdots T-1\}$,$\widetilde{T}:=\{0,1,\cdots T\}$. 令 $X=\{x\,|\,x:\widetilde{T}\to\mathbf{R}\,|\,x(0)=x(T)\}$ 为在范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in\widetilde{T}}|x(t)|$ 下构成的 Banach 空间. $Y=\{x\,|\,x:\hat{T}\to\mathbf{R}\}$ 为在范数 $\|x\|_Y=\max\limits_{t\in\hat{T}}|x(t)|$ 下构成的 Banach 空间.

引理 2.1 (Krein-Rutman 定理)[8] 设 E 是 Banach 空间,$K\subset E$ 是一个锥且满足 $K^\circ\neq\varnothing$. 设 $F\in L(E)$是一个紧的强正算子. 则 $r(F)>0$,$r(F)$是 F 的一个具有正特征函数 $v\in K^\circ$ 的简单特征值,并且 F 再没有其他正特征值.

引理 2.2 (Rabinowitz 全局分歧定理)[9] 设 E 是 Banach 空间. 考虑方程

$$x=\mu Lx+N(\mu,x),\mu\in\mathbf{R},x\in E \tag{2}$$

假定

(A1) 算子 $L:E\to E$ 为线性紧算子;

(A2) μ_0 为 L 在 E 中的本征值,且其代数重数 $\chi(\mu_0)$为奇数,其中

$$\chi(\mu_0)=\dim\{\bigcup_{m=1}^{\infty}\ker((I-\mu_0L)^m)\};$$

(A3) $N:\mathbf{R}\times E\to E$ 全连续,且

$$\lim_{x\to0}\frac{\|N(\mu,x)\|}{\|x\|}=0.$$

记 $C(\mu_0)$为方程(2)的非平凡解集的闭包中包含点$(\mu_0,0)$的连通分支,则下面两种情形之一出现:

(i) $C(\mu_0)$无界;

(ii) $C(\mu_0)$还连接$(\bar{\mu},0)$,而 $\bar{\mu}$ 为不同于 μ_0 的本征值.

引理 2.3 假设(H1)~(H3)成立. 设 $h\in Y$.

则问题

$$-\Delta x(t)+q(t)x(t)=h(t),t\in\hat{T},\ x(0)=x(T) \tag{3}$$

存在唯一解 $x(t)$，

$$x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)h(s),t\in\hat{T} \tag{4}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{\prod_{i=s+1}^{t+T-1}(1+q(i))}{\prod_{i=t}^{t+T-1}(1+q(i))-1},t\leqslant s\leqslant t+T-1 \tag{5}$$

证明　显然，由(3)式可知 $x(t+1)=(1+q(t))x(t)-h(t)$. 令 $\widetilde{q}(t)=1+q(t)$. 则 $x(t+1)=\widetilde{q}(t)x(t)-h(t)$. 因

$$\prod_{i=-\infty}^{t}\widetilde{q}^{-1}(i)x(t+1)=\prod_{i=-\infty}^{t-1}\widetilde{q}^{-1}(i)x(t)-\prod_{i=-\infty}^{t}\widetilde{q}^{-1}(i)h(t),$$

故

$$\Delta\left(\prod_{i=-\infty}^{t-1}\widetilde{q}^{-1}(i)x(t)\right)=-\prod_{i=-\infty}^{t}\widetilde{q}^{-1}(i)h(t).$$

简单化简可得

$$\prod_{i=-\infty}^{t+T-1}\widetilde{q}^{-1}(i)x(t+T)-\prod_{i=-\infty}^{t-1}\widetilde{q}^{-1}(i)x(t)=-\sum_{s=t}^{t+T-1}\prod_{i=-\infty}^{s}\widetilde{q}^{-1}(i)h(s),$$

即

$$x(t)\left(1-\prod_{i=t}^{t+T-1}\widetilde{q}(i)\right)=-\sum_{s=t}^{t+T-1}\prod_{i=s+1}^{t+T-1}\widetilde{q}(i)h(s).$$

因而 $x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)h(s),t\in\hat{T}$. 证毕.

定义锥 $P\subset X$ 为 $P=\{x\in X\,|\,x(t)\geqslant 0,x(t)\geqslant\frac{m}{M}\|x\|,t\in\widetilde{T}\}$. 定义映射 $A_\lambda:P\to X$ 为

$$A_\lambda x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)],t\in\hat{T}.$$

引理 2.4　假设(H1)~(H3)成立. 则 $A_\lambda(P)\subset P$ 且 $A_\lambda:P\to P$ 是全连续的.

证明　由 P 的定义，若 $x\in P$，则

$$\|A_\lambda x\|=\max_{t\in\hat{T}}|A_\lambda x(t)|=\max_{t\in\hat{T}}\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]\leqslant M\sum_{s=t}^{t+T-1}[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)].$$

$$A_\lambda x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]\geqslant m\sum_{s=t}^{t+T-1}[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]=\frac{m}{M}M\sum_{s=t}^{t+T-1}[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]\geqslant\frac{m}{M}\|A_\lambda x\|.$$

故 $A_\lambda(P)\in P$. 此外，由 X 是有限维空间易证 $A_\lambda:P\to P$是一个全连续算子.

令 λ_1 是线性特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta x(t)+q(t)x(t)=\lambda a(t)x(t),t\in\hat{T},\\ x(0)=x(T)\end{cases} \tag{6}$$

的一个主特征值，φ_1 是 λ_1 对应的非负特征函数.

引理 2.5　假设(H1)~(H2)成立. 则线性特征值问题(6)存在一个简单主特征值 $\lambda_1>0$，其对应的特征函数 $\varphi_1\in X$ 同样为正.

证明　定义锥 $P_0=\{x\in X\,|\,x(t)\geqslant 0,t\in\widetilde{T}\}$，则 P_0 是一个正规锥并且其内部是非空的. 显然，$X=P_0-P_0$，即 P_0 是一个完全锥. 因为 $G(t,s)>0$，$t\leqslant s\leqslant t+T-1$，则

$$Fx(t)=\lambda\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)a(s)x(s),t\in\hat{T}$$

是一个强正算子，即 $Fx\in\mathrm{int}P_0,x\in P_0\backslash\{0\}$. 由引理 2.1，谱半径 $r(F)>0$ 且存在 $\varphi_1\in X,\varphi_1>0$ 使得 $F\varphi_1=r(F)\varphi_1$. 因而 $\lambda_1=(r(F))^{-1}$是线性特征值问题(6)的具有正特征函数的正特征值.

3　主要结果的证明

定义 $L:X\to Y,Lx:=-\Delta x(t)+q(t)x(t),x\in X$. 因 X 是有限维空间，则 $L^{-1}:X\to X$ 是紧的. 以下从非平凡解 $x\equiv 0$ 处考虑分歧问题

$$Lx-\lambda a(t)x=f(t,x)x \tag{7}$$

方程(7)等价于

$$x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]:=(\lambda L^{-1}[a(\cdot)x(\cdot)]+L^{-1}[f(\cdot,x(\cdot))x(\cdot)])(t).$$

记

$$Nx:=L^{-1}[f(\cdot,x(\cdot))x(\cdot)](t)=$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} G(t,s)f(t,x(s))x(s),$$

其全连续的证明同引理 2.4. 则

$$\frac{\|Nx\|}{\|x\|}=\frac{\max\limits_{t\in\hat{T}}\left|\sum\limits_{s=t}^{t+T-1} G(t,s)f(t,x(s))x(s)\right|}{\|x\|}\leqslant$$

$$C\max_{t\in\hat{T}}\sum_{s=t}^{t+T-1}|f(t,x(s))|,$$

其中 C 是一个常数. 结合条件(H3)中 $f(t,0)=0$, $t\in\hat{T}$ 知,当 x 在 X 中趋于 0 时, $\|L^{-1}[f(\cdot,x(\cdot))x(\cdot)](t)\|=o(\|x\|)$.

下文将在 $\mathbf{R}\times X$ 中讨论问题(1)正解解集的全局结构. 由 Rabinowitz 全局分歧定理及引理 2.5 知,存在从 $(\lambda_1,0)$ 处分歧产生的问题(1)的正解无界连通分支 $C_1^+\subset\mathbf{R}\times X$, 且 C_1^+ 的闭包是 $(\lambda_1,0)\cup C_1^+$.

定理 1.1 的证明 因为

$$x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1} G(t,s)[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]=$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} G(t,s)[\lambda+\frac{f(s,x(s))}{a(s)}]a(s)x(s)\geqslant$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} m(\lambda-\gamma^{--})a(s)x(s)\geqslant$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} m(\lambda-\gamma^{--})a(s)\frac{m}{M}\|x(s)\|,$$

$$\|x(t)\|\geqslant x(t)\geqslant$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} m(\lambda-\gamma^{--})a(s)\frac{m}{M}\|x(s)\|,$$

所以

$$1\geqslant\frac{m^2}{M}(\lambda-\gamma^{--})\sum_{s=t}^{t+T-1}a(s),$$

即

$$\lambda\leqslant\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{--} \tag{8}$$

同理,

$$\frac{m}{M}\|x(t)\|\leqslant x(t)\leqslant$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} M(\lambda+\gamma^{++})a(s)\|x(s)\|,$$

$$\frac{m}{M}\leqslant M(\lambda+\gamma^{++})\sum_{s=t}^{t+T-1}a(s),$$

$$\lambda\geqslant\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{++} \tag{9}$$

因为

$$-\Delta\varphi_1(t)+q(t)\varphi_1(t)=\lambda_1 a(t)\varphi_1(t),t\in\hat{T}$$
$$\varphi_1(0)=\varphi_1(T)$$

等价于和分方程

$$\varphi_1(t)=\lambda_1\sum_{s=t}^{t+T-1}G(t,s)a(s)\varphi_1(s),t\in\hat{T},$$

而

$$\|\varphi_1(t)\|\geqslant\varphi_1(t)\geqslant\lambda_1\sum_{s=t}^{t+T-1}\frac{m^2}{M}a(s)\|\varphi_1(s)\|,$$

所以

$$\lambda_1\leqslant\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}\leqslant\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{--} \tag{10}$$

同理,

$$\frac{m}{M}\|\varphi_1(t)\|\leqslant\varphi_1(t)\leqslant M\lambda_1\sum_{s=t}^{t+T-1}a(s)\|\varphi_1(s)\|,$$

即

$$\lambda_1\geqslant\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}\geqslant\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{++} \tag{11}$$

由(8)和(9)式可得

$$\lambda\in[\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{++},\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{--}].$$

由(10)和(11)式可得

$$\lambda_1\in[\frac{m}{M^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}-\gamma^{++},\frac{M}{m^2\sum\limits_{s=t}^{t+T-1}a(s)}+\gamma^{--}].$$

综上, $C_1^+\in\boldsymbol{I}_1\times X$. 证毕.

定理 1.2 的证明 设 (λ,x) 是问题(1)的任意正解且对某个整数 $j\geqslant1$ 有 $\|x\|=\xi_{2j-1}$. 由 $\|x(t)\|\geqslant x(t)\geqslant\frac{m}{M}\|x(t)\|$ 可知 $\frac{m}{M}\xi_{2j-1}\leqslant x(t)\leqslant\xi_{2j-1}$.

由条件(H5)得 $\frac{f(t,x(t))}{a(t)}\geqslant\gamma^+,t\in\hat{T}$. 则

$$x(t)=\sum_{s=t}^{t+T-1} G(t,s)[\lambda a(s)x(s)+f(s,x(s))x(s)]\geqslant$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1} m[\lambda+\frac{f(s,x(s))}{a(s)}]a(s)x(s)\geqslant$$

$$\sum_{s=t}^{t+T-1}\frac{m^2}{M}(\lambda+\gamma^+)a(s)\|x(s)\|.$$

因为

$$\|x(t)\|\geqslant x(t)\geqslant\sum_{s=t}^{t+T-1}\frac{m^2}{M}(\lambda+$$
$$\gamma^+)a(s)\|x(s)\|,$$

所以

$$\lambda \leqslant \frac{M}{m^2 \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s)} - \gamma^+ \tag{12}$$

同理，若(λ, x)是问题(1)的任意正解，对某个整数 $j \geqslant 1$，$\| x \| = \xi_{2j}$有

$$\frac{m}{M} \| x(t) \| \leqslant x(t) \leqslant \sum_{s=t}^{t+T-1} M(\lambda - \gamma^-) a(s) \| x(s) \|,$$

$$\frac{m}{M} \leqslant M(\lambda - \gamma^-) \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s),$$

$$\lambda > \frac{m}{M^2 \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s)} + \gamma^- \tag{13}$$

结合(10)式和(11)式即得

$$\lambda_1 \in \left[\frac{m}{M^2 \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s)} - \gamma^+, \frac{M}{m^2 \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s)} + \gamma^-\right].$$

从而由(12)式可得，若 $\| x \| = \xi_{2j-1}$，$j \geqslant 1$，则 $\lambda < \frac{M}{m^2 \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s)} - \gamma^+$．由(13)式可得，若 $\| x \| = \xi_{2j}$，$j \geqslant 1$，则 $\lambda > \frac{m}{M^2 \sum_{s=t}^{t+T-1} a(s)} + \gamma^-$．证毕.

推论 1.3 的证明　由定理 1.1，对每个整数 $j \geqslant 2$，我们可以选取一个解$(\lambda_j, x_j) \in C_1^+$ 满足 $\| x_j \| = \xi_j$．因为 C_1^+ 连接(λ_j, x_j)和$(\lambda_j, 0)$，由定理 1.2，对每个 $\lambda_j \in I_2$，一定存在一个解$(\lambda, x) \in C_1^+$ 满足 $\xi_{j-1} \leqslant \| x_j \| \leqslant \xi_j$．因此一定存在无穷多个解$(\lambda, x) \in C_1^+$．证毕.

参考文献：

[1] Wang H Y. Positive solutions of functional differential equations [J]. J Differ Equations, 2004, 202: 354.

[2] Jin Z, Wang H Y. A note on positive periodic solutions of delayed differential equations [J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 581.

[3] Ma R Y, Chen R P, Chen T L. Existence positive periodic solutions of nonlinear first order delayed differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2011, 384: 527.

[4] Graef J R, Kong L J. Existence of multiple periodic solutions of first order functional differential equations [J]. Math Compt, 2011, 54: 2962.

[5] Hai D D, Qian C. On positive periodic solutions for nonlinear delayed differential equations [J]. Mediterr J Math, 2016, 13: 1641.

[6] Sun J P. Positive solutions for first-order discrete periodic boundary value problem [J]. Appl Math Lett, 2006, 19: 1244.

[7] Ma R Y, Gao C H, Xu J. Existence of positive solutions for first order discrete periodic boundary value problems with delay [J]. Nonlinear Anal Theor, 2011, 74: 4186.

[8] Deimling K. Nonlinear functional analysis [M]. New York: Spring-Verlag, 1985.

[9] Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications [M]. New York: Spring-Verlag, 1986.

[10] Ma R Y, Thompson B. Nodal solutions for nonlinear eigenvalue problems [J]. Nonlinear Anal Theor, 2004, 59: 707.

[11] 闫东亮，马如云. 带导数项 Neumann 问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：1136.

[12] 魏丽萍. 一类三阶周期边值共振问题解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：260.

[13] 叶芙梅. 非线性二阶周期边值问题正解的全局结构[J]. 四川大学学报：自然科学版，2018，55：452.

[14] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京：科学出版社，2004.

引用本文格式：

中　文：苏肖肖. 一类一阶差分方程周期边值问题正解连通分支的振荡及无穷多个正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：231.

英　文：Su X X. Existence of infinite positive solutions and oscillation of connected component of positive solutions for a class of periodic boundary value problems of first order difference equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 231.