doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.002

一维非稳态半导体漂移扩散模型的弱 Galerkin 有限元法

朱紫陌[1]，李鸿亮[2]，张世全[1]

(1. 四川大学数学学院，成都 610064；
2. 中国工程物理研究院电子工程研究所，绵阳 621900)

摘　要：本文提出了一种求解一维非稳态半导体漂移扩散模型的弱 Galerkin 有限元法. 该模型是一个描述静电势分布的泊松方程和一个刻画电子守恒性的非线性对流扩散方程的耦合系统. 该格式在单元内部用分片 $k(k\geqslant 0)$ 次多项式来逼近静电势 Ψ 和电子浓度 n，用分片 $k+1$ 次多项式来逼近静电势 Ψ 和电子浓度 n 的导数. 本文得到了半离散问题的最优误差估计. 数值实验验证了理论结果.

关键词：非稳态漂移扩散模型；弱 Galerkin 有限元法；半离散；误差估计

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)04-0625-10

A weak Galerkin finite element method for 1D drift-diffusion model of time-dependent semiconductor devices

ZHU Zi-Mo[1], *LI Hong-Liang*[2], *ZHANG Shi-Quan*[1]

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Institute of Electronic Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

Abstract: This paper proposes a weak Galerkin (WG) finite element method for solving the time dependent drift-diffusion problems in one dimension. This drift-diffusion model involves a Poisson equation for electrostatic potential coupled to a nonlinear convection diffusion equation for electron concentration. The weak Galerkin method adopts piecewise polynomials of degree $k(k\geqslant 0)$ for the electrostatic potential Ψ and electron concentration n approximations in the interior of elements, and piecewise polynomials of degree $k+1$ for the derivative of electrostatic potential Ψ and electron concentration n. Optimal error estimates are derived for the semi-discrete problem and numerical experiments are provided to verify the theoretical results.

Keywords: Time-dependent drift-diffusion model; Weak Galerkin finite element method; Semi-discrete; Error estimate
(2010 MSC 65M60)

收稿日期：2019-04-09
基金项目：国家自然科学基金(11401407)
作者简介：朱紫陌(1994－)，男，硕士研究生，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：zzm@stu.scu.edu.cn
通讯作者：张世全. E-mail：shiquanzhang@scu.edu.cn

1 引 言

设 $I=(0,1)$，$J=(0,T]$，$T<\infty$. 考虑下述非稳态漂移扩散模型：求静电势 $\Psi(x,t)$ 和电子浓度 $n(x,t)$ 满足

$$\begin{aligned} &-\frac{\varepsilon}{q}\Psi_{xx}+n=f,\ (x,t)\in I\times J, \\ &n_t-D_n n_{xx}+\mu_n(n\Psi_x)_x=0,\ (x,t)\in I\times J \end{aligned} \tag{1}$$

对应的边值条件和初值条件为

$$\begin{aligned} &\Psi(0,t)=g_{\Psi 0}(t),\Psi(1,t)=g_{\Psi 1}(t),n(0,t) \\ &\quad =g_{n0}(t),n(1,t)=g_{n1}(t),\forall t\in J \end{aligned} \tag{2}$$

$$n(x,0)=n_0(x),\forall x\in I \tag{3}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是半导体的介电常数，q 是电子电荷量，$f(x,t)$ 是掺杂浓度函数，Dn 代表电子的扩散系数，μ_n 代表电子迁移率. 更一般的漂移扩散模型还会考虑空穴电流连续性方程和复合率项，但本文仅考虑简化后的单粒子模型.

针对这类偏微分方程，理论和数值研究已有很长的历史. 对于漂移扩散模型的稳态及非稳态解在一些特定条件下的存在唯一性证明，可以参考文献[1-6]及其引用文献. 另一方面，数值研究开始于二十世纪六十年代. 文献[7]给出了求解一维稳态模型的自洽迭代格式. 在接下来几十年，也有许多离散方法用于求解漂移扩散模型，例如有限差分法[8-11]，有限体积法[12-16]，标准的有限元法[17-19]，以及混合有限元法[20-22].

对于漂移扩散模型，由于半导体器件损伤通常会产生漂移和扩散系数间断现象，因此间断有限元法常被用来离散问题(1)～(3). 在文献[23]中，一种局部间断有限元方法被用来求解一维漂移扩散方程，并得到了半离散和全离散格式的最优误差估计. 在文献[24-25]中，Wang 和 Ye 最早提出用于求解二阶椭圆问题的弱 Galerkin 有限元法. 其主要思想是在广义函数空间上引入一种弱梯度算子，利用弱梯度算子来离散变分问题. 这种方法能够保持局部消除的性质. 此外，弱 Galerkin 有限元法还被广泛应用于求解各种偏微分方程[26-34].

本文考虑用一种弱 Galerkin 有限元法来离散问题(1)～(3)，引入弱函数 $v=\{v^0,v_a,v_b\}$，采用分片 k 次多项式来逼近弱函数的内部 v^0.

本文结构如下：第二节给出基本记号、弱问题以及离散弱导数的定义；第三节引入半离散弱 Galerkin 有限元格式；第四节给出半离散格式的误差估计；第五节给出数值实验结果.

2 预备知识

2.1 基本记号

设 $\widetilde{I}\subset I$ 为子区间，s 为非负整数. 我们用记号 $H^s(\widetilde{I})$ 来表示在 $\widetilde{I}$ 上的 s 阶 Sobolev 空间，内积记为 $(\cdot,\cdot)_{s,\widetilde{I}}$，范数和半范数分别记为 $\|\cdot\|_{s,\widetilde{I}}$ 和 $|\cdot|_{s,\widetilde{I}}$. 特别地，当 $s=0$ 时，$(\cdot,\cdot)_{\widetilde{I}}$ 和 $\|\cdot\|_{\widetilde{I}}$ 分别表示 $L^2(\widetilde{I})$ 上的内积和范数. 当 $\widetilde{I}=I$ 时，我们简记 $\|\cdot\|_s:=\|\cdot\|_{s,I}$，. $|\cdot|_s:=|\cdot|_{s,I}$.

空间 $H^l(0,T;H^s(I))$ 定义为

$$H^1(0,T;H^s(I))=$$
$$\{v\in H^s(I);\int_0^T\sum_{1\leqslant i\leqslant l}\|v^{(i)}(t)\|_s^2\mathrm{d}t<\infty\},$$

其中 $v^{(i)}(t)$ 是 v 关于 t 的 i 阶导数. 相应的范数定义为

$$\|v\|_{H^l(H^s(I))}=\left(\int_0^T\sum_{1\leqslant i\leqslant l}\|v^{(i)}(t)\|_s^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2.1(Gronwall 不等式[35]) 令 $u(t)$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实连续函数，且对任意的 $t\in[a,b]$ 有 $\beta(t)\geqslant 0$. 假设

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\beta(s)u(s)\mathrm{d}s,\forall t\in[a,b],$$

则有

$$u(t)\leqslant\alpha(t)+\int_a^t\alpha(s)\beta(s)\,\mathrm{e}^{\int_s^t\beta(\tau)d\tau}\mathrm{d}s,$$
$$\forall t\in[a,b].$$

2.2 弱问题

首先，我们引入函数集合

$V_1:=\{u\in H^1(0,T;H^1(I)):u(0)=g_{\Psi 0}(t),u(1)=g_{\Psi 1}(t)\}$，

$V_2:=\{u\in H^1(0,T;H^1(I)):u(0)=g_{n0}(t),u(1)=g_{n1}(t)\}$，

$V:=\{u\in H^1(0,T;H^1(I)):u(0)=u(1)=0\}$，

及下列双线性和三线性形式：对任意的 $\Psi\in V_1$，$n\in V_2$ 和 $v,w\in V$，

$$a(\Psi,v):=\frac{\in}{q}(\Psi_x,v_x),b(n,v):=(n,v),$$
$$c(n,w):=D_n(n_x,w_x),\ d(\Psi,n,w):=$$
$$-\mu_n(n\Psi_x,w_x).$$

于是，问题(1)～(3)的变分问题为：求 $(\Psi,n)\in V_1\times V_2$ 满足

$$A(\Psi,n;v)=(f,v),\forall v\in V,$$

$$(n_t, w) + \overline{A}(\Psi, n; w) = 0, \forall w \in V \tag{4}$$

其中

$$A(\Psi, n; v) := a(\Psi, v) + b(n, v),$$

$$\overline{A}(\Psi, n; w) := c(n, w) + d(\Psi, n, w).$$

引理 2.2[34]　$\forall t \in J, f(x,t) \in L^\infty(I)$，初值$n_0(x) \in L^\infty(I)$且在 I 上几乎处处大于 0，边值$g_{n0}(t)$，$g_{n1}(t) > 0$，迁移率μ_n是正常数时，弱问题(4) 存在唯一解.

2.3　离散弱导数

我们引入离散弱导数的概念. 对闭区间$\overline{I}_a = [x_a, x_b]$及其内部$I_a = (x_a, x_b)$. 定义$\overline{I}_a$上的弱函数为$v = \{v^0, v_a, v_b\}$，其中$v^0 = v|_{I_a}$表示 v 在区间$\overline{I}$内部的值，$v_a = v(x_a)$和$v_b = v(x_b)$表示 v 在区间$\overline{I}$两端点上的值. 值得注意的是v_a和v_b没有必要是v^0限制在区间两端点x_a和x_b上的迹. 定义弱函数空间如下：

$$W(I_a) = \{v = \{v^0, v_a, v_b\} : v^0 \in L^2(I_a), |v_a| + |v_b| < \infty\}.$$

对任意非负整数 r，定义$P_r(I_a)$为单元I_a上次数不超过 r 的所有多项式的集合. 为了构造问题(1)～(3)的弱 Galerkin 有限元格式，我们引入离散弱导数算子$d_{w,r}$如下.

定义 2.3　对 $v \in W(I_a)$，其离散弱导数$d_{w,r}v \in P_r(I_a)$的定义由以下方程给出

$$\int_{I_a} d_{w,r}vq\,\mathrm{d}x = -\int_{I_a} v^0 q'\,\mathrm{d}x + v_b q_b - v_a q_a, \quad \forall q \in P_r(I_a) \tag{5}$$

其中 $q_a = q(x_a), q_b = q(x_b)$.

3　半离散弱 Galerkin 有限元格式

令$I_h: 0 = x_1 < x_2 \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ 是区间 $I = (0,1)$的一个剖分，$I_i = (x_i, x_{i+1})$是剖分单元. 单元尺度 $h = \max\limits_i h_i$，其中$h_i = x_{i+1} - x_i, i = 1, 2, \cdots, N-1$. 对任意给定的非负整数 k，关于剖分I_h的弱 Galerkin 有限元空间定义为

$$S_h = \{v = \{v^0, v_L, v_R\} : v^0|_{I_i} \in P_k(I_i), v_L|_{I_i} = v_i, v_R|_{I_i} = v_{i+1}, |v_i| + |v_{i+1}| < \infty, i = 1, 2, \cdots, N-1\}, \tag{6}$$

$$S_h^\Psi = \{v : v \in S_h, v_1 = g_{\Psi 0}, v_N = g_{\Psi 1}\},$$

$$S_h^n = \{v : v \in S_h, v_1 = g_{n0}, v_N = g_{n1}\},$$

$$S_h^0 = \{v : v \in S_h, v_1 = 0, v_N = 0\} \tag{7}$$

定义离散的L^2内积和范数为

$$(u, v)_h = \sum_{i=1}^{N-1} (u, v)_{I_i} = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{I_i} uv\,\mathrm{d}x, \ \|u\|_h^2 = (u, u)_h.$$

对任意的$\Psi_h \in S_h^\Psi, n_h \in S_h^n$，$v_h, w_h \in S_h^0$，定义下列双线性和三线性形式：

$$a_h(\Psi_h, v_h) := \frac{\in}{q}(d_{w,r}\Psi_h, d_{w,r}v_h)_h, b_h(n_h, v_h) := (n_h^0, v_h^0)_h,$$

$$c_h(n_h, w_h) := D_n(d_{w,r}n_h, d_{w,r}w_h)_h, d_h(\Psi_h, n_h, w_h) := -\mu_n(n_h^0 d_{w,r}\Psi_h, d_{w,r}w_h)_h.$$

基于变分形式(4)，我们定义半离散弱 Galerkin 有限元格式为：求$\Psi_h \in S_h^\Psi, n_h \in S_h^n$满足

$$A_h(\Psi_h, n_h; v_h) = (f, v_h^0)_h, \forall v_h \in S_h^0,$$

$$((n_h^0)_t, w_h^0)_h + \overline{A}_h(\Psi_h, n_h; w_h) = 0, \forall w_h \in S_h^0 \tag{8}$$

其中

$$A_h(\Psi_h, n_h; v_h) := a_h(\Psi_h, v_h) + b_h(n_h, v_h),$$

$$\overline{A}_h(\Psi_h, n_h; w_h) := c_h(n_h, w_h) + d_h(\Psi_h, n_h, w_h).$$

引理 3.1　假设 $v \in S_h$ 且 $r = k+1$. 那么$d_{w,r}v = 0$ 当且仅当 $v = \{v^0, v_i, v_{i+1}\}$在闭区间$\overline{I}_i$上是一个常数，即$v^0 = v_i = v_{i+1}$.

证明　首先，令$v^0 = v_i = v_{i+1}$. 由(5)式可得

$$\int_{I_i} d_{w,r}vq\,\mathrm{d}x = v^0\left(-\int_{I_i} q'\,\mathrm{d}x + q_{i+1} - q_i\right) = 0, \quad \forall q \in P_r(I_i).$$

这表明$d_{w,r}v = 0$. 接下来令$d_{w,r}v = 0$. 由(5)式可得

$$-\int_{I_i} v^0 q'\,\mathrm{d}x + v_{i+1} q_{i+1} - v_i q_i = 0, \quad \forall q \in P_r(I_i) \tag{9}$$

令 $\overline{v} = \frac{1}{h_i}\int_{I_i} v^0\,\mathrm{d}x$. 考虑以下初值问题

$$\begin{cases} q'(x) = \overline{v} - v^0, x_i < x < x_{i+1}, \\ q(x_i) = v_{i+1} - v_i \end{cases} \tag{10}$$

显然，问题(10)存在唯一解$q_1 \in P_r(I_i)$. 对(10)式积分得到

$$q_{1,i+1} - q_{1,i} = \int_{I_i} (\overline{v} - v^0)\,\mathrm{d}x = 0, q_{1,i+1} = q_{1,i} = v_{i+1} - v_i.$$

因此，在(9)中取 $q = q_1$可得

$$-\int_{I_i} v^0(\overline{v} - v^0)\,\mathrm{d}x + (v_{i+1} - v_i)^2 = \int_{I_i} (\overline{v} - v^0)^2 d\mathrm{x} + (\mathrm{v}_{i+1} - v_i)^2 = 0.$$

上式表明$v^0 = \overline{v}$以及$v_i = v_{i+1}$. 将这两个关系式代入(9)得到

$$(\overline{v} - v^i)(q_{i+1} - q_i) = 0, \forall q \in P_r(I_i).$$

因此$v^0 = v_i = v_{i+1}$. 证毕.

引理 3.1 表明离散弱导数$d_{w,r}v$ 保持了经典导数 v'的重要特征.

引理 3.2 设$v_h=\{v_h^0,v_{h,L},v_{h,R}\}\in S_h^0$且 $r=k+1$. 则有

$$\|v_h^0\|_h\leqslant(1+h)\|d_{w,r}v_h\|_h, v_h\in S_h^0 \tag{11}$$

证明 由$d_{w,r}v_h$ 的定义,在(5)式中取 $q=1$ 得到

$$\int_{I_i} d_{w,r}v_h dx = v_{h,i+1}-v_{h,i} \tag{12}$$

在各单元上求和并利用$v_{h,1}=0$ 可得

$$v_{h,i+1}=\sum_{j=1}^{i}\int_{I_j} d_{w,r}v_h \mathrm{d}x\leqslant \sum_{j=1}^{i} h_j^{\frac{1}{2}}\|d_{w,r}v_h\|_{I_i}\leqslant\|d_{w,r}v_h\|_h \tag{13}$$

令$q_1\in P_r(I_i)$满足以下初值问题

$$\begin{cases} q_1{}'(x)=-v_h^0, x_i<x<x_{i+1}, \\ q_1(x_i)=v_{h,i+1}-v_{h,i} \end{cases} \tag{14}$$

在(5)式中取 $q=q_1$ 可得

$$\int_{I_i}|v_h^0|^2\mathrm{d}x=\int_{I_i} d_{w,r}v_h q_1\mathrm{d}x+ v_{h,i}q_{1,i}-v_{h,i+1}q_{1,i+1} \tag{15}$$

对(14)式积分得到

$$q_1(x)=v_{h,i+1}-v_{h,i}-\int_{x_i}^{x} v_h^0\mathrm{d}x, q_{1,i+1}= v_{h,i+1}-v_{h,i}-\int_{I_i} v_h^0\mathrm{d}x \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式并利用(12)式,得

$$\begin{aligned}\|v_h^0\|_{L_2(I_i)}^2&=\int_{I_i} d_{w,r}v_h\mathrm{d}x(v_{h,i+1}-v_{h,i})-\int_{I_i} d_{w,r}v_h\int_{x_i}^{x} v_h^0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+v_{h,i}(v_{h,i+1}-v_{h,i})-v_{h,i+1}(v_{h,i+1}-v_{h,i}-\int_{I_i} v_h^0 dx)=\\&-\int_{I_i} d_{w,r}v_h\int_{x_i}^{x} v_h^0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+v_{h,i+1}\int_{I_i} v_h^0\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此由 Cauchy-Schwarz 不等式和估计式(13)可以得到

$$\|v_h^0\|_h^2\leqslant h\|d_{w,r}v_h\|_h\|v_h^0\|_h+\|d_{w,r}v_h\|_h\|v_h^0\|_h.$$

证毕.

4 误差估计

本节将给出半离散弱 Galerkin 有限元格式(8)的误差估计.

对任意非负整数 l,令P_h^l表示局部L^2投影算子,$P_h^l: u\in L^2(I_i)\to P_h^l u\in P_l(I_i)$满足

$$(u-P_h^l u, q)_{I_i}=0, \forall q\in P_l(I_i), i=1,2,\cdots,N-1.$$

由 Bramble-Hilbert 引理,易知

$$\|u-P_h^l u\|_{I_i}+h_i\|u-P_h^l u\|_{1,I_i}\leqslant Ch_i^s\|u\|_{s,I_i}, 0\leqslant s\leqslant l+1 \tag{17}$$

定义投影算子$Q_h: u\in H^1(I)\to Q_h u\in S_h$如下:

$$Q_h u|_{\bar{I}_i}=\{P_h^k u, u(x_i), u(x_{i+1})\}, i=1,2,\cdots,N-1.$$

由(17)式可知

$$\|Q_h^0 u-u\|_{I_i}\leqslant Ch_i^s\|u\|_{s,I_i}, 0\leqslant s\leqslant k+1 \tag{18}$$

进一步,利用投影算子Q_h和离散弱导数$d_{w,r}$的定义,有如下交换性质:

$$\int_{I_i} d_{w,r}Q_h uq\mathrm{d}x=-\int_{I_i} P_h^k uq'\mathrm{d}x+u(x_{i+1})q_{i+1}-u(x_i)q_i=-\int_{I_i} uq'\mathrm{d}x+u_{i+1}q_{i+1}-u_i q_i=\int_{I_i} u'q\mathrm{d}x, \forall q\in P_{k+1}(I_i).$$

因此$d_{w,r}Q_h u=P_h^{k+1}u'$,且

$$\|d_{w,r}Q_h u-u'\|_{I_i}\leqslant Ch_i^s\|u\|_{s+1,I_i}, 0\leqslant s\leqslant k+1 \tag{19}$$

为了得到误差估计,我们还需要引入下述投影函数.

定理 4.1 对任意的 $u\in H^1(I)$,存在$\pi_h u\in H^1(I)$,使得$\pi_h u|_{I_i}\in P_{k+1}(I_i)$并且满足

$$((\pi_h u)', q)_{I_i}=(u', q)_{I_i}, \forall q\in P_k(I_i), i=1,\cdots,N-1 \tag{20}$$

$$\pi_h u(x_i)=u(x_i), i=1,\cdots,N \tag{21}$$

进一步,对 $0\leqslant s\leqslant k+1$,有

$$\|u-\pi_h u\|_{I_i}+h_i\|u-\pi_h u\|_{1,I_i}\leqslant Ch_i^{s+1}\|u\|_{s+1,I_i}, 0\leqslant s\leqslant k+1 \tag{22}$$

证明 设 $u\in H^1(I)$. 对任意给定的单元I_i,令$\pi_h^{(i)}u\in P_{k+1}(I_i)$是以下初值问题的唯一解:

$$\begin{cases}(\pi_h^{(i)}u)'(x)=P_h^k u', x_i<x<x_{i+1}, \\ \pi_h^{(i)}u(x_i)=u(x_i)\end{cases} \tag{23}$$

于是由投影算子P_h^k的性质可以得到

$$((\pi_h^{(i)}u)', q)_{I_i}=(u', q)_{I_i}, \forall q\in P_k(I_i) \tag{24}$$

$$\|u'-(\pi_h^{(i)}u)'\|_{I_i}\leqslant Ch_i^s\|u\|_{s+1,I_i}, 0\leqslant s\leqslant k+1 \tag{25}$$

因为

$$(\pi_h^{(i)}u-u)(x)=\int_{x_i}^{x}(\pi_h^{(i)}u-u)'(t)\mathrm{d}t, x\in I_i,$$

所以由(24)式以及 Cauchy-Schwarz 不等式可以

得到

$$\pi_h^{(i)}u(x_{i+1})=u(x_{i+1}) \tag{26}$$

$$\| u-\pi_h^{(i)}u \|_{I_i}\leqslant h_i \| u'-(\pi_h^{(i)}u)' \|_{I_i} \tag{27}$$

现在对任意的 $1\leqslant i\leqslant N-1$，令 $\pi_h u|_{I_i}=\pi_h^{(i)}u$，于是(20)～(22)式可以由(24)～(27)式得到. 进一步，$\pi_h^{(i)}u(x_{i+1})=u(x_{i+1})=\pi_h^{(i+1)}u(x_{i+1})$表明$\pi_h u$ 在穿过节点x_{i+1}时是连续的. 所以 $\pi_h u\in H^1(I)$ 成立. 证毕.

引理 4.2　若 $\Psi,n\in H^1(0,T;H^2(I))$是问题(1)～(3)的解，则

$$\frac{\varepsilon}{q}(\pi_h\Psi_x,d_{w,r}v_h)_h+(n,v_h^0)_h=(f,v_h^0)_h,\quad \forall v_h\in S_h^0, t\in J,\ (n_t,w_h^0)_h+D_n(\pi_h n_x,d_{w,r}w_h)_h-\mu_n(\pi_h(n\Psi_x),d_{w,r}w_h)_h=0,\quad \forall w_h\in S_h^0,t\in J \tag{28}$$

证明　对(1)式中的两个方程分别乘上v_h^0和w_h^0并积分，得到

$$-\frac{\varepsilon}{q}(\Psi_{xx},v_h^0)_h+(n,v_h^0)_h=(f,v_h^0)_h,\quad \forall v_h\in S_h^0,t\in J,\ (n_t,w_h^0)_h-D_n(n_{xx},w_h^0)_h+\mu_n((n\Psi_x)_x,w_h^0)_h=0,\ \forall w_h\in S_h^0,t\in J \tag{29}$$

由(20)式可知

$$\mu_n((n\Psi_x)_x,w_h^0)_h=\mu_n((\pi_h(n\Psi_x))_x,w_h^0)_h \tag{30}$$

由离散弱导数算子$d_{w,r}$的定义，有

$$\mu_n((\pi_h(n\Psi_x))_x,w_h^0)_{I_i}=-\mu_n(\pi_h(n\Psi_x),d_{w,r}w_h)_{I_i}+\mu_n(\pi_h(n\Psi_x))_{i+1}w_{h,i+1}-\mu_n(\pi_h(n\Psi_x))_i w_{h,i},\ \forall v_h\in S_h^0.$$

在各单元上求和并且注意到$w_{h,1}=0$ 和$w_{h,N}=0$，有

$$\mu_n((n\Psi_x)_x,w_h^0)_h=-\mu_n(\pi_h(n\Psi_x),d_{w,r}w_h)_h \tag{31}$$

类似地，由(20)式以及离散弱导数算子$d_{w,r}$的定义，对任意的 $v,w\in S_h^0$，有

$$-\frac{\varepsilon}{q}(\Psi_{xx},v_h^0)_h=-\frac{\varepsilon}{q}((\pi_h\Psi_x)_x,v_h^0)_h=\frac{\varepsilon}{q}(\pi_h\Psi_x,d_{w,r}v_h)_h \tag{32}$$

$$-D_n(n_{xx},w_h^0)_h=-D_n((\pi_h n_x)_x,w_h^0)_h=D_n(\pi_h n_x,d_{w,r}w_h)_h \tag{33}$$

将(31)～(33)式代入(29)式即得(28)式. 证毕.

定理 4.3　设 $\Psi(x,t),n(x,t)\in H^1(0,T;H^{k+2}(I))$和$(\Psi_h(x,t),n_h(x,t))\in S_h^{\Psi}\times S_h^n$分别是问题(1)～(3)和半离散弱 Galerkin 有限元格式(8)的解，且 $r=k+1$. 那么对所有的 $t\in[0,T]$存在正常数 C 满足

$$\| \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \|_h+\| \Psi-\Psi_h^0 \|_h+\| n-n_h^0 \|_h\leqslant Ch^{k+1} \tag{34}$$

$$\left(\int_0^T \| n_x-d_{w,r}n_h \|_h^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant Ch^{k+1} \tag{35}$$

其中正常数 C 与 Ψ 和 n 在每个时刻的H^2范数和H^{k+2}范数有关.

证明　将(8)式和(28)式相减，并利用$(Q_h^0 n_t,w_h^0)_h=(n_t,w_h^0)_h$可得以下误差方程

$$\frac{\varepsilon}{q}(d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h),d_{w,r}v_h)_h=\frac{\varepsilon}{q}(d_{w,r}Q_h\Psi,d_{w,r}v_h)_h-\frac{\varepsilon}{q}(\pi_h\Psi_x,d_{w,r}v_h)_h-(Q_h^0 n,v_h^0)_h+(n_h^0,v_h^0)_h \tag{36}$$

和

$$(Q_h^0 n_t-(n_h^0)_t,w_h^0)_h+D_n(d_{w,r}(Q_h n-n_h),d_{w,r}w_h)_h=D_n(d_{w,r}Q_h n,d_{w,r}w_h)_h-D_n(\pi_h n_x,d_{w,r}w_h)_h+\mu_n(\pi_h(n\Psi_x),d_{w,r}w_h)_h-\mu_n(n_h^0 d_{w,r}\Psi_h,d_{w,r}w_h)_h \tag{37}$$

在(36)式中令 $v_h=Q_h\Psi-\Psi_h$ 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式，引理 4.1 和引理 3.2，可以得到

$$\frac{\varepsilon}{q}\| d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h)\|_h^2=\frac{\varepsilon}{q}(d_{w,r}Q_h\Psi-\Psi_x,d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h))_h-\frac{\varepsilon}{q}(\pi_h\Psi_x-\Psi_x,d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h))_h-(Q_h^0 n-n_h^0,Q_h^0\Psi-\Psi_h^0)_h\leqslant Ch^{k+1}\| \Psi \|_{k+2}\| d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h)\|_h+(1+h)\| d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h)\|_h\| Q_h^0 n-n_h^0 \|_h \tag{38}$$

于是

$$\| d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h)\|_h\leqslant Ch^{k+1}\| \Psi \|_{k+2}+\frac{q}{\varepsilon}(1+h)\| Q_h^0 n-n_h^0 \|_h \tag{39}$$

下面估计$Q_h^0 n-n_h^0$. 在(37)式中令$w_h=Q_h n-n_h$得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| Q_h^0 n-n_h^0 \|_h^2+D_n\| d_{w,r}(Q_h n-n_h)\|_h^2=(D_n(d_{w,r}Q_h n-n_x,d_{w,r}(Q_h n-n_h))_h-D_n(\pi_h n_x-n_x,d_{w,r}(Q_h n-n_h))_h)+(\mu_n(\pi_h(n\Psi_x)-n\Psi_x,d_{w,r}(Q_h n-n_h))_h+\mu_n(n(\Psi_x-d_{w,r}Q_h\Psi),d_{w,r}(Q_h n-n_h))_h)+\mu_n((n-Q_h^0 n)d_{w,r}Q_h\Psi,d_{w,r}(Q_h n-n_h))_h+\mu_n((Q_h^0 n-n_h^0)d_{w,r}Q_h\Psi,d_{w,r}(Q_h n-n_h))_h+$$

$$\mu_n(n_h^0 d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h),d_{w,r}(Q_hn-n_h))_h:=R_1+R_2+R_3+R_4+R_5 \tag{40}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,投影性质,引理 4.1 和 Young 不等式,可得

$$R_1\leqslant Ch^{k+1}\|n\|_{k+2}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h\leqslant Ch^{2k+2}\|n\|_{k+2}^2+\frac{D_n}{8}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2 \tag{41}$$

$$R_2\leqslant Ch^{k+1}\|n\|_2\|\Psi\|_{k+2}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h\leqslant Ch^{2k+2}\|n\|_2^2\|\Psi\|_{k+2}^2+\frac{D_n}{8}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2 \tag{42}$$

$$R_3\leqslant Ch^{k+1}\|\Psi\|_2\|n\|_{k+2}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h\leqslant Ch^{2k+2}\|\Psi\|_2^2\|n\|_{k+2}^2+\frac{D_n}{8}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2 \tag{43}$$

$$R_4\leqslant\mu_n\|\Psi\|_2\|Q_h^0n-n_h^0\|_h\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h\leqslant C\|\Psi\|_2^2\|Q_h^0n-n_h^0\|_h^2+\frac{D_n}{8}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2 \tag{44}$$

为了估计R_5,我们先假设

$$\|n-n_h^0\|_h\leqslant h^{\frac{1}{2}} \tag{45}$$

此假设表明 $\|n_h^0\|_\infty\leqslant C$(我们之后将验证这个假设). 由此有

$$R_5\leqslant C\mu_n\|d_{w,r}(Q_h\Psi-\Psi_h)\|_h\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h.$$

由(39)式和 Young 不等式可得

$$R_5\leqslant(Ch^{k+1}\|\Psi\|_{k+2}+(1+h)\|Q_h^0n-n_h^0\|_h)\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h\leqslant Ch^{2k+2}\|\Psi\|_{k+2}^2+\frac{D_n}{8}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2+C\|Q_h^0n-n_h^0\|_h^2+\frac{D_n}{8}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2 \tag{46}$$

将(41)~(44)式,(46)式代入(40)式,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|Q_h^0n-n_h^0\|_h^2+\frac{D_n}{4}\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2\leqslant C_1h^{2k+2}+C_2\|Q_h^0n-n_h^0\|_h^2 \tag{47}$$

其中C_1与 Ψ 和 n 在每个时刻的H^2范数以及H^{k+2}范数有关. 关于时间 t 对(47)式积分(注意到$Q_h^0n(x,0)-n_h^0(x,0)=0$), 再利用 Gronwall 不等式,可以得到

$$\|Q_h^0n-n_h^0\|_h^2+\frac{D_n}{2}\int_0^t\|d_{w,r}(Q_hn-n_h)\|_h^2\mathrm{d}s\leqslant Ch^{2k+2} \tag{48}$$

于是我们由(39)式,引理 3.2,三角不等式和投影性质得到误差估计(34)式和(35)式.

为了完成证明,下面验证假设(45)式. 对任意 $k\geqslant0$,我们考虑 h 足够小以致满足 $Ch^{k+1}<\frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}$,其中 C 是(34)式和(35)式中由最终时刻 T 所确定的常数.

假设$t^*=\sup\{t:\|n(t)-n_h^0(t)\|_h\leqslant h^{\frac{1}{2}}\}$且$t^*<T$. 如果(45)式不成立,那么存在 t'使得

$$\|n(t')-n_h^0(t')\|_h>h^{\frac{1}{2}},$$

我们由连续性应得到

$$\|n(t^*)-n_h^0(t^*)\|_h=h^{\frac{1}{2}}.$$

另一方面,我们的证明表明(34)式和(35)式对任意的 $t\leqslant t^*$ 成立. 特别地

$$\|n(t^*)-n_h^0(t^*)\|_h\leqslant Ch^{k+1}<\frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}.$$

这与$t^*<T$ 矛盾. 因此$t^*\geqslant T$ 并且假设(45)式是正确的. 证毕.

5 数值算例

本节将给出两个数值算例. 时间离散我们都采用向后欧拉差分格式:

$$\partial_t(n_h^0)^m=\frac{(n_h^0)^m-(n_h^0)^{m-1}}{\Delta t},m=1,2,\cdots.$$

由于弱 Galerkin 格式(8)是非线性的,我们采用下列 Oseen 迭代格式来计算并假设初值$n_h^0=0$: 对 $m=1,2,\cdots,r=1,2,\cdots$,以及任意的$v_h,w_h\in S_h^0$满足

$$\begin{cases}a_h(\Psi_h^{m,r},v_h)+b_h(n_h^{m,r-1},v_h)=(f,v_h^0)_h,\\(\partial_t(n_h^0)^{m,r},w_h^0)_h+c_h(n_h^{m,r},w_h)+\\\qquad d_h(\Psi_h^{m,r},n_h^{m,r},w_h)=0\end{cases} \tag{49}$$

其中指标(m,r)分别代表时间迭代和非线性迭代的步数.

空间离散我们选择多项式次数为 $k=0$ 或 $k=1$. 当 $k=0$ 时,时间步长选择为 $\Delta t=h$;当 $k=1$ 时,时间步长选择为 $\Delta t=h^2$. 计算时我们采用均匀加密的网格,我们将给出在最终时刻 $T=1$ 时的误差.

例 5.1 令 $I=[0,1]$, $J=[0,1]$,问题(1)~(3)的真解为

$$\Psi=\sin(t)\cos(x),\ (x,t)\in I\times J,$$
$$n=\cos(t)\sin(x),\ (x,t)\in I\times J.$$

取参数$\frac{\varepsilon}{q}=1$, $\mu_n=1$.

表 1　$D_n=1, k=0$ 时例 5.1 的数值结果

Tab. 1　Results for Example 5.1 with $D_n=1, k=0$

h	$\frac{\Vert \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \Vert_h}{\Vert \Psi_x \Vert_h}$		$\frac{\Vert \Psi-\Psi_h^0 \Vert_h}{\Vert \Psi \Vert_h}$		$\frac{\Vert n_x-d_{w,r}n_h \Vert_h}{\Vert n_x \Vert_h}$		$\frac{\Vert n-n_h^0 \Vert_h}{\Vert n \Vert_h}$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2^{-2}	2.4097E−03	—	4.3988E−02	—	3.9616E−02	—	1.1869E−01	—
2^{-3}	9.1251E−04	1.40	2.2070E−02	1.00	1.8888E−02	1.07	5.9287E−02	1.00
2^{-4}	5.0136E−04	0.86	1.1044E−02	1.00	9.2143E−03	1.04	2.9630E−02	1.00
2^{-5}	2.7461E−04	0.87	5.5234E−03	1.00	4.5498E−03	1.02	1.4812E−02	1.00
2^{-6}	1.4441E−04	0.93	2.7619E−03	1.00	2.2606E−03	1.01	7.4051E−03	1.00
2^{-7}	7.4093E−05	0.96	1.3810E−03	1.00	1.1267E−03	1.00	3.7024E−03	1.00

表 2　$D_n=1, k=1$ 时例 5.1 的数值结果

Tab. 2　Results for Example 5.1 with $D_n=1, k=1$

h	$\frac{\Vert \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \Vert_h}{\Vert \Psi_x \Vert_h}$		$\frac{\Vert \Psi-\Psi_h^0 \Vert_h}{\Vert \Psi \Vert_h}$		$\frac{\Vert n_x-d_{w,r}n_h \Vert_h}{\Vert n_x \Vert_h}$		$\frac{\Vert n-n_h^0 \Vert_h}{\Vert n \Vert_h}$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2^{-2}	1.2444E−03	—	2.3437E−03	—	1.2065E−02	—	6.6168E−03	—
2^{-3}	3.0618E−04	2.02	5.8547E−04	2.00	2.9356E−03	2.04	1.6154E−03	2.03
2^{-4}	7.6175E−05	2.00	1.4634E−04	2.00	7.2843E−04	2.01	4.0120E−04	2.00
2^{-5}	1.9020E−05	2.00	3.6583E−05	2.00	1.8176E−04	2.00	1.0013E−04	2.00
2^{-6}	4.7535E−06	2.00	9.1456E−06	2.00	4.5418E−05	2.00	2.5022E−05	2.00
2^{-7}	1.1883E−06	2.00	2.2864E−06	2.00	1.1353E−05	2.00	6.2548E−06	2.00

表 1 和表 2 分别给出了$D_n=1$ 时用分段常数和间断分段线性多项式求解算例 5.1 的数值结果，得到的误差收敛阶与理论一致.

表 3　$D_n=10^{-3}, k=0$ 时例 5.1 的数值结果

Tab. 3　Results for Example 5.1 with $D_n=10^{-3}, k=0$

h	$\frac{\Vert \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \Vert_h}{\Vert \Psi_x \Vert_h}$		$\frac{\Vert \Psi-\Psi_h^0 \Vert_h}{\Vert \Psi \Vert_h}$		$\frac{\Vert n_x-d_{w,r}n_h \Vert_h}{\Vert n_x \Vert_h}$		$\frac{\Vert n-n_h^0 \Vert_h}{\Vert n \Vert_h}$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2^{-3}	3.5556E−02	—	2.3005E−02	—	7.9322E+00	—	2.5666E−01	—
2^{-4}	1.6839E−02	1.08	1.1466E−02	1.00	5.5475E+00	0.52	1.2251E−01	1.07
2^{-5}	6.7127E−03	1.33	5.6654E−03	1.02	3.3029E+00	0.75	4.4192E−02	1.47
2^{-6}	2.6660E−03	1.33	2.8090E−03	1.01	1.7146E+00	0.95	1.6156E−02	1.45
2^{-7}	1.1613E−03	1.20	1.3992E−03	1.01	8.6126E−01	0.99	6.8969E−03	1.23
2^{-8}	5.4083E−04	1.10	6.9844E−04	1.00	4.3026E−01	1.00	3.2387E−03	1.09
2^{-9}	2.6104E−04	1.05	3.4895E−04	1.00	2.1487E−01	1.00	1.5807E−03	1.03
2^{-10}	1.2826E−04	1.03	1.7441E−04	1.00	1.0735E−01	1.00	7.8260E−04	1.01

表 4 $D_n=10^{-3}$,$k=1$ 时例 5.1 的数值结果

Tab. 4 Results for Example 5.1 with $D_n=10^{-3}$, $k=1$

h	$\frac{\lVert \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \rVert_h}{\lVert \Psi_x \rVert_h}$		$\frac{\lVert \Psi-\Psi_h^0 \rVert_h}{\lVert \Psi \rVert_h}$		$\frac{\lVert n_x-d_{w,r}n_h \rVert_h}{\lVert n_x \rVert_h}$		$\frac{\lVert n-n_h^0 \rVert_h}{\lVert n \rVert_h}$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2^{-3}	3.1190E−03	—	7.4010E−04	—	5.3954E−01	—	3.6477E−02	—
2^{-4}	7.8965E−04	1.98	1.9857E−04	1.90	1.7983E−01	1.59	6.8707E−03	2.41
2^{-5}	2.2787E−04	1.79	5.6881E−05	1.80	3.1604E−02	2.51	1.2513E−03	2.46
2^{-6}	6.1324E−05	1.89	1.4986E−05	1.92	5.0418E−03	2.65	3.0870E−04	2.02
2^{-7}	1.5648E−05	1.97	3.7995E−06	1.98	9.4789E−04	2.41	7.7829E−05	1.99
2^{-8}	3.9325E−06	1.99	9.5328E−07	1.99	2.1182E−04	2.16	1.9514E−05	2.00

表 3 和表 4 分别给出了$D_n=10^{-3}$时用分段常数和间断分段线性多项式求解算例 5.1 的数值结果. 可以看到,在用低次元求解小参数问题时,在粗网格下$\lVert n_x-d_{w,r}n_h \rVert_h$的相对误差较大,但随着网格的加密,得到的误差收敛阶与理论一致.

例 5.2 考虑带间断系数的算例. 令 $I=[0,1]$,$J=[0,1]$. 问题(1)~(3)的真解为

$$\Psi=\sin(t)x(x-1)^2,\ x\in I,$$
$$n=\cos(t)x(1-x),\ x\in I.$$

参数$\frac{\varepsilon}{q}=1$,$\mu_n=1$ 和间断系数

$$D_n=\begin{cases}0.026,\ x\in[0,0.5],\\ 0.1,\ x\in[0.5,1].\end{cases}$$

表 5 $k=0$ 时例 5.2 的数值结果

Tab. 5 Results for Example 5.2 with $k=0$

h	$\frac{\lVert \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \rVert_h}{\lVert \Psi_x \rVert_h}$		$\frac{\lVert \Psi-\Psi_h^0 \rVert_h}{\lVert \Psi \rVert_h}$		$\frac{\lVert n_x-d_{w,r}n_h \rVert_h}{\lVert n_x \rVert_h}$		$\frac{\lVert n-n_h^0 \rVert_h}{\lVert n \rVert_h}$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2^{-2}	5.5770E−02	—	2.5577E−01	—	2.1920E+00	—	8.2068E−01	—
2^{-3}	1.2654E−02	2.14	1.3302E−01	0.94	7.6271E−01	1.52	2.2858E−01	1.84
2^{-4}	3.2778E−03	1.94	6.7272E−02	0.98	2.9870E−01	1.35	7.4041E−02	1.62
2^{-5}	1.5646E−03	1.07	3.3763E−02	0.99	1.3856E−01	1.10	3.3482E−02	1.14
2^{-6}	8.7972E−04	0.83	1.6904E−02	1.00	6.8159E−02	1.02	1.6893E−02	0.98
2^{-7}	4.7440E−04	0.89	8.4565E−03	1.00	3.4009E−02	1.00	8.6087E−03	0.97

表 6 $k=1$ 时例 5.2 的数值结果

Tab. 6 Results for Example 5.2 with $k=1$

h	$\frac{\lVert \Psi_x-d_{w,r}\Psi_h \rVert_h}{\lVert \Psi_x \rVert_h}$		$\frac{\lVert \Psi-\Psi_h^0 \rVert_h}{\lVert \Psi \rVert_h}$		$\frac{\lVert n_x-d_{w,r}n_h \rVert_h}{\lVert n_x \rVert_h}$		$\frac{\lVert n-n_h^0 \rVert_h}{\lVert n \rVert_h}$	
	误差	阶	误差	阶	误差	阶	误差	阶
2^{-2}	6.0215E−03	—	4.7129E−02	—	2.5697E−01	—	8.0260E−02	—
2^{-3}	1.9039E−03	1.66	1.2076E−02	1.96	4.0582E−02	2.66	2.0607E−02	1.96
2^{-4}	5.0393E−04	1.92	3.0381E−03	1.99	8.9205E−03	2.18	5.3770E−03	1.94
2^{-5}	1.2782E−04	1.98	7.6073E−04	2.00	2.1527E−03	2.05	1.3616E−03	1.98
2^{-6}	3.2071E−05	1.99	1.9026E−04	2.00	5.3328E−04	2.01	3.4155E−04	2.00
2^{-7}	8.0251E−06	2.00	4.7570E−05	2.00	1.3301E−04	2.00	8.5459E−05	2.00

表 5 和表 6 分别给出了用分段常数和间断分段线性多项式求解算例 5.2 的数值结果，得到的误差收敛阶与理论一致.

6 结　论

本文研究了一维非稳态半导体漂移扩散模型的弱 Galerkin 有限元法，通过恰当的空间匹配，我们得到了关于静电势 Ψ 和电子浓度 n 的最优误差估计，同时该方法还能处理间断系数问题.

参考文献：

[1] Biler P，Dolbeault J. Long time behavior of solutions of Nernest-Planck and Debye-Hückel drift-diffusion systems [J]. Ann Henri Poincaré，2000，1：461.

[2] Biler P，Hebisch W，Nadzieja T. The Debye system：existence and large time behavior of solutions [J]. Nonlinear Anal-Theor，1994，23：1189.

[3] Gajewski H. On existence，uniqueness and asymptotic behavior of solutions of the basic equations for carrier transport in semiconductors [J]. Z Angew Math Mech，1985，65：101.

[4] Gajewski H，Gröger K. On the basic equations for carrier transport in semiconductors [J]. J Math Anal Appl，1986，113：12.

[5] Jerome J W. Analysis of charge transport [M]. Berlin：Springer-Verlag，1996.

[6] Mock M S. An initial value problem from semiconductor device theory [J]. Siam J Math Anal，1974，5：597.

[7] Gummel H K. A self-consistent iterative scheme for one-dimensional steady state transistor calculations [J]. IEEE Trans Electron Devices，1964，11：455.

[8] Flavell A，Machen M，Eisenberg B，*et al*. A conservative fnite difference scheme for Poisson-Nernst-Planck equations [J]. J Comput Electron，2014，13：235.

[9] He D，Pan K. An energy preserving fnite difference scheme for the Poisson-Nernst-Planck system [J]. Appl Math Comput，2016，287/288：214.

[10] Liu H，Wang Z. A free energy satisfying fnite difference method for Poisson-Nernst-Planck equations [J]. J Comput Phys，2014，268：363.

[11] Mirzadeh M，Gibou F. A conservative discretization of the Poisson-Nernst-Planck equations on adaptive Cartesian grids [J]. J Comput Phys，2014，274：633.

[12] Bessemoulin-Chatard M，Chainais-Hillairet C，Vignal M H. Study of a fnite volume scheme for the drift-diffusion system. Asymptotic behavior in the quasi-neutral limit [J]. Siam J Numer Anal，2014，52：1666.

[13] Bessemoulin-Chatard M. A fnite volume scheme for convection-diffusion equations with nonlinear diffusion derived from the Scharfetter-Gummel scheme [J]. Numer Math，2012，121：637.

[14] Chainais-Hillairet C，Liu J，Peng Y. Finite volume scheme for multi-dimensional drift-diffusion equations and convergence analysis [J]. Math Model Numer Anal，2003，37：319.

[15] Chainais-Hillairet C，Peng Y. Convergence of a fnite-volume scheme for the drift-diffusion equations in 1D [J]. IMA J Numer Anal，2003，23：81.

[16] Chainais-Hillairet C，Peng Y. Finite volume approximation for degenerate drift-diffusion system in several space dimensions [J]. Math Models Methods Appl Sci，2004，14：461.

[17] Gao H，He D. Linearized conservative fnite element methods for the Nernst-Planck-Poisson equations [J]. J Sci Comput，2017，72：1269.

[18] Lu B，Holst M J，McCammon J A，*et al*. Poisson-Nernst Planck equations for simulating biomolecular diffusion-reaction processes I：fnite element solutions [J]. J Comput Phys，2010，229：6979.

[19] Sun Y，Sun P，Zheng B，*et al*. Error analysis of fnite element method for Poisson-Nernst-Planck equations [J]. J Comput Appl Math，2016，301：28.

[20] Gao H，Sun P. A linearized local conservative mixed finite element method for Poisson-Nernst-Planck equations [J]. J Sci Comput，2018，77：818.

[21] He M，Sun P. Error analysis of mixed fnite element method for Poisson-Nernst-Planck system [J]. Numer Meth Part D E，2017，33：1924.

[22] Yang Q，Yuan Y. An Approximation of three-dimensional semiconductor devices by mixed finite element method and characteristics-mixed finite element method [J]. NM-TMA，2015，8 ：356.

[23] Liu Y，Shu C W. Analysis of the local discontinuous Galerkin method for the drift-diffusion model of semiconductor devices [J]. Sci China Math，2016，59：115.

[24] Wang J，Ye X. A weak Galerkin finite element method for second-order elliptic problems [J]. J Comput Appl Math ，2013，241：103.

[25] Wang J, Ye X. A weak Galerkin mixed finite element method for second order elliptic problems [J]. Math Comput, 2014, 83: 2101.

[26] Chen Y, Zhang T. A weak Galerkin finite element for Burgers' equation [J]. J Comput Appl Math, 2019, 348: 103.

[27] Li B, Xie X. A two-level algorithm for the weak Galerkin discretization of diffusion problems [J]. J Comput Appl Math, 2015, 287: 179.

[28] Li B, Xie X. BPX preconditioner for nonstandard finite element methods for diffusion problems [J]. Siam J Numer Aanl, 2016, 54: 1147.

[29] Li B, Xie X, Zhang S. BPS preconditioners for a weak galerkin finite element method for 2d diffusion problems with strongly discontinuous coefficients [J]. Comput Math Appl, 2018.

[30] Chen G, Feng M, Xie X. Robust globally divergence-free weak galerkin methods for stokes equations [J]. J Comput Math, 2016, 34: 549.

[31] Chen G, Feng M, Xie X. A robust WG finite element method for convection - diffusion - reaction equations [J]. J Comput Appl Math, 2017, 315: 107.

[32] Chen G, Xie X. A robust weak Galerkin finite element method for linear elasticity with strong symmetric stresses [J]. Comput Methods Appl Math, 2016, 15: 389.

[33] Han Y, Xie X. Robust globally divergence-free weak Galerkin finite element methods for natural convection problems [J]. Commun Comput Phys, accepted, 2019, arXiv:1903.09506.

[34] Fang W, Itoi K. On the time-dependent drift-diffusion model for semiconductors [J]. J Differ Equations, 1995, 117: 245.

[35] Teschl G. Ordinary differential equations and dynamical systems [M]. Providence: AMS, 2012.

引用本文格式：

中　文：朱紫陌，李鸿亮，张世全. 一维非稳态半导体漂移扩散模型的弱 Galerkin 有限元法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：625.

英　文：Zhu Z M, Li H L, Zhang S Q. A weak Galerkin finite element method for 1D drift-diffusion model of time-dependent semiconductor devices [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 625.