doi：10.3969/j. issn. 0490-6756. 2020. 04. 001

关于 Bergman 空间上复合算子的复对称性

宏俊颖，韩学红
(天津大学数学学院，天津 300354)

摘　要：设 D 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的单位圆盘,σ 是定义在 D 上的解析自映射. 本文给出了当 $\sigma(z)=az+c$ 且非恒等映射时 Bergman 空间上的复合算子 C_σ 复对称的充要条件,进而得到了 Bergman 空间上是复对称而非正规的复合算子的例子.

关键词：复合算子；复对称；Bergman 空间
中图分类号：O117.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)04-0621-04

On complex symmetry of composition operators on Bergman space

HONG Jun-Ying, *HAN Xue-Hong*
(School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300354, China)

Abstract: Let σ be an analytic self-map of the open unit disk D in the complex plane $\mathbf{C}$. In this paper, we discuss the necessary and sufficient conditions for the composition operators on the Bergman space to have complex symmetry when $\sigma(z)=az+c$is not the identity map. As a result, we give examples of complex symmetric composition operators on Bergman space whose symbols are linear-fractional but not normal.

Keywords: Composition operator; Complex symmetry; Bergman space
(2010 MAC 47B33, 47B32, 47B38)

1　引　言

设 $L(H)$ 为可分的复 Hilbert 空间 H 上所有有界线性算子组成的代数. 对任意的 $x,y\in H$,任意复数集 C 中的元素 α,β,若算子 $C:H\to H$ 满足：

(i) $C(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}Cx+\bar{\beta}Cy$；

(ii) $\langle Cx,Cy\rangle=\langle y,x\rangle$；

(iii) C 为对合算子,即 $C^2=I$,这里 I 为恒等算子；

则称算子 C 是 H 上的共轭. 算子 $T\in L(H)$ 称为复对称的是指存在 H 上的共轭 C 使得 $T=CT^*C$ 成立. 此时,称 T 关于共轭 C 是复对称的.

本文主要考虑 Bergman 空间 $A^2(D)$ 上的复合算子的复对称性. $A^2(D)$ 是由在单位圆盘上解析且满足 $\int_D |f(z)|^2\frac{dA(z)}{\pi}<\infty$ 的函数构成的集合,其中 $dA(z)$ 是单位圆盘上的勒贝格面积测度. $\|f\|$ 定义为上述积分的 2 次方根.

设 $f,g\in A^2(D)$ 且有泰勒展开式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$. 在 $A^2(D)$ 上可以定义内积：

$$\langle f,g\rangle=\int_D f(z)\overline{g(z)}\frac{dA(z)}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\bar{b}_n}{n+1}.$$

在此内积下,$A^2(D)$ 成为一个 Hilbert 空间,并且 $\|f\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}$. 由极坐标计算易知 $1,z,z^2,\cdots$ 是 $A^2(D)$ 的一组正交基且 $\|z^j\|^2=\frac{1}{j+1}$.

收稿日期：2019-04-24
基金项目：国家自然科学基金(11301373)
作者简介：宏俊颖(1994－),女,甘肃庆阳人,硕士研究生,主要研究函数空间上的算子理论. E-mail：hjy1172944774@163.com

对任意的 $\alpha\in D$ 和 $z\in D$, $K_\alpha(z)=\dfrac{1}{(1-\bar{\alpha}z)^2}$ 表示 $A^2(D)$ 上的再生核函数. 对任意的 $f\in A^2$, 有 $\langle f,K_\alpha\rangle=f(\alpha)$.

设 D 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的单位圆盘, $H(D)$ 和 $S(D)$ 分别表示单位圆盘上的所有解析函数和所有全纯自映射的集合. 由 $\varphi\in S(D)$ 所诱导的复合算子 C_φ 定义为

$$C_\varphi f(z)=f\circ\varphi(z), f\in H(D), z\in D.$$

给定 $\psi\in H(D)$, 乘积算子 T_ψ 定义为 $T_\psi(f)(z)=\psi(z)\cdot f(z), f\in H(D)$.

2006 年, Garcia 和 Putinar[1] 将复对称矩阵的概念推广到 Hilbert 空间, 引入了复对称算子的概念. 此后算子的复对称性被广泛研究. 首先是 Garcia[2] 指出了所有正规算子都是复对称的. 紧接着, Garcia 和 Hammond[3] 研究了加权 Hardy 空间上(加权)复合算子的复对称性. 其后, Jung 等人[4] 在文献[3]的基础上进一步研究了加权 Hardy 空间上(加权)复合算子的复对称性. 其中, 作者给出了一些非正规的复对称算子的例子. Bourdon 和 Noor[5] 指出 Hardy 空间上复合算子 C_φ 是复对称算子的必要条件是 φ 在 D 内有 Denjoy-Wolff 点或 φ 是椭圆自同构, 同时指出阶数大于 3 的椭圆自同构诱导的复合算子不是复对称的. 最近, Gao 和 Zhou[6] 指出 Hardy 空间上阶数等于 3 的椭圆自同构诱导的复合算子也不是复对称的, 并且他们也完整地刻画了由分式线性变换诱导的复合算子的复对称性. 此外, Narayan 等人在文献[7]中还给出了 Hardy 空间上由非自同构的线性分式映射所诱导的复合算子是复对称而非正规算子的例子.

相比 Hardy 空间, Bergman 空间上复合算子的复对称的研究结果较少. 除了在文献[3]中有所涉及(因为加权 Hardy 空间包含 Bergman 空间的情形)外, 只有 Eklund 等人[8] 最近将文献[5]中的结果推广到 Bergman 空间得到类似的结果: Bergman 空间上的复合算子 C_φ 是复对称算子的必要条件是 φ 在 D 内有 Denjoy-Wolff 点或 φ 是椭圆自同构, 且阶数大于 5 的椭圆自同构诱导的复合算子不是复对称的.

本文在文献[8]的基础上将文献[7]的结果部分推广到 Bergman 空间上, 给出了 Bergman 空间上由非自同构的线性分式映射所诱导的复合算子是复对称而非正规的例子. 由于 Hardy 空间与 Bergman 空间核函数的不同导致 Cowen 自伴公式(本文的引理 2.1)也有所差异, 本文的证明思路与文献[7]基本一致, 但是在 Bergman 空间上对函数 ζ,ψ 的选取和一些细节的计算却与 Hardy 空间不同. 本文主要结论如下:

定理 1.1 设 $\sigma(z)=az+c\in S(D)$ 且非恒等映射, 则 C_σ 在 $A^2(D)$ 上是复对称的当且仅当 σ 在 D 内有 Denjoy-Wolff 点并且无边界不动点.

注 由文献[9]中定理 8.2 知, C_φ 是 $A^2(D)$ 上的正规算子当且仅当 $\varphi(z)=az$ 且 $|a|\leqslant 1$, 故由定理 1.1 知, 当 $c\neq 0$ 且 $\sigma(z)$ 满足定理 1.1 的条件时, C_σ 是复对称算子, 但不是正规算子.

2 预备知识

线性分式映射

$$\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}(a,b,c,d\in\mathbf{C}, ad-bc\neq 0)$$

是黎曼面 $\hat{C}$ 的自同构且在 $\hat{C}$ 上有至少一个至多两个不动点. 线性分式映射所诱导的复合算子是最简单的复合算子, 这里 φ 满足 $\varphi(D)\subset D$.

下面的引理给出了线性分式映射 $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 所诱导的复合算子的伴随算子的表示, 此引理在本文主要结论的证明中起着关键作用.

引理 2.1(Cowen 自伴公式)[10] 若 $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 是 D 到 D 的线性分式映射, C_φ 是 $A^2(D)$ 上复合算子, 则有 $C_\varphi^*=T_gC_\sigma T_h^*$, 其中 $g(z)=\dfrac{1}{(-\bar{b}z+\bar{d})^2}$, $\sigma(z)=\dfrac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}$, $h(z)=(cz+d)^2$.

定理 2.2[9] 若 $\varphi\in S(D)$, 且 φ 既非恒等映射也非椭圆自同构, 则存在 $\bar{D}$ 上的一点 ω, 使得 φ 的迭代 $\varphi^n=\underbrace{\varphi\circ\varphi\circ\cdots\circ\varphi}_{n}$ 在 D 上内闭一致收敛于 ω.

定理中的 ω 称为 φ 的 Denjoy-Wolff 点. 值得一提的是, C_φ 的性质与 Denjoy-Wolff 点密切相关.

3 复对称复合算子的例子

本节我们将给出定理 1.1 的证明. 首先, 我们给出共轭算子的一些基本性质.

引理 3.1(文献[7], 命题 2.1) 设 J_1 和 J_2 是可交换的等距算子且均为对合, 且其中之一为线性而另一个为共轭线性, 则 J_1J_2 是一个共轭.

定义算子 J 为: $Jf(z)=\overline{f(\bar{z})}$, 显然 J 是一个共轭.

引理 3.2　设 $b\in(-1,1)$，$\tau(z)=\dfrac{b-z}{1-bz}$，$\zeta(z)=\dfrac{1-b^2}{(1-bz)^2}$，则 $T_\zeta C_\tau$ 是 $A^2(D)$ 上的酉算子且是自伴的，故 $T_\zeta C_\tau$ 是等距算子且为对合，进而 $JT_\zeta C_\tau$ 是一个共轭.

证明　经过简单的计算易得 $\tau^{-1}=\tau$ 和 $\dfrac{1}{\zeta\circ\tau^{-1}}=\dfrac{1}{\zeta\circ\tau}=\zeta$，故

$$(T_\zeta C_\tau)^{-1}=T_{\frac{1}{\zeta\circ\tau^{-1}}}C_{\tau^{-1}}=T_\zeta C_\tau \tag{1}$$

由引理 2.1 知，$C_\tau^*=T_gC_\varphi T_h^*$，这里

$$\tau(z)=\frac{b-z}{1-bz},$$

$$g(z)=\frac{1}{(1-bz)^2}=\frac{\zeta(z)}{1-b^2},$$

$$\varphi(z)=\frac{b-z}{1-bz}=\tau(z),$$

$$h(z)=(1-bz)^2.$$

又因为 $T_h^*T_\zeta^*=(T_\zeta T_h)^*=T_{\zeta\cdot h}^*=T_{1-b^2}^*$，故

$$(T_\zeta C_\tau)^*=C_\tau^*T_\zeta^*=T_gC_\varphi T_h^*T_\zeta^*=T_gC_\tau T_{1-b^2}^*=T_\zeta C_\tau.$$

这表明 $T_\zeta C_\tau$ 是自伴的. 再由(1)式，$T_\zeta C_\tau$ 是酉算子. 由 $b\in\mathbf{R}$，易知 J 和 $T_\zeta C_\tau$ 是可交换的. 因此，由引理 3.1，$JT_\zeta C_\tau$ 是一个共轭. 证毕.

下面的引理容易由引理 2.1 直接得到，我们略去证明.

引理 3.3　给定 $a,c\in D$ 且 $|a|+|c|\leqslant 1$. 设 $\sigma(z)=az+c$，$\varphi(z)=\dfrac{\bar{a}z}{1-\bar{c}z}$ 及 $\psi(z)=\dfrac{1}{(1-\bar{c}z)^2}$，$C_\sigma$ 是 $A^2(D)$ 上复合算子，则有 $C_\sigma^*=T_\psi C_\varphi$.

接下来，我们讨论当 $\sigma(z)=az+c$ 时 C_σ 的形式.

引理 3.4　给定 $a,c\in D$ 且有 $|a|+|c|\leqslant 1$，$b=\dfrac{c}{1-a}\in(-1,1)$. 设 $\sigma(z)=az+c$，$\varphi(z)=\dfrac{\bar{a}z}{1-\bar{c}z}$，$\psi(z)=\dfrac{1}{(1-\bar{c}z)^2}$，$\tau(z)=\dfrac{b-z}{1-bz}$ 和 $\zeta(z)=\dfrac{1-b^2}{(1-bz)^2}$. 则对任意的 $f\in A^2(D)$ 有下列关系式成立：$C_\sigma f(z)=JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi JT_\zeta C_\tau f(z)$.

证明　这一结论可通过简单的计算得到，本文只给出大概过程.

首先，对任意的 $f\in A^2(D)$ 有

$$\begin{aligned}&JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi JT_\zeta C_\tau f(z)=JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi JT_\zeta f(\tau(z))=\\&\quad JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi\overline{\zeta(\bar{z})f(\tau(\bar{z}))}=\\&JT_\zeta C_\tau T_\psi\overline{\zeta(\overline{\varphi(z)})f(\tau(\overline{\varphi(z)}))}=\\&JT_\zeta\psi(\tau(z))\overline{\zeta(\overline{\varphi(\tau(z))})f(\tau(\overline{\varphi(\tau(z))}))}=\\&\overline{\zeta(\bar{z})\psi(\tau(\bar{z}))}\zeta(\overline{\varphi(\tau(\bar{z}))})f(\tau(\overline{\varphi(\tau(\bar{z}))}))\end{aligned} \tag{2}$$

因为 $b\in\mathbf{R}$，$c=b(1-a)$，所以 $\tau(\bar{z})=\dfrac{b-\bar{z}}{1-b\bar{z}}$，$\overline{\zeta(\bar{z})}=\dfrac{1-b^2}{(1-bz)^2}$. 进一步有

$$\overline{\varphi(\tau(\bar{z}))}=\frac{a\dfrac{b-z}{1-bz}}{1-c\dfrac{b-z}{1-bz}}=\frac{a(b-z)}{1-b^2+ab^2-abz} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\tau(\overline{\varphi(\tau(\bar{z}))})&=\frac{b-\dfrac{a(b-z)}{1-b^2+ab^2-abz}}{1-b\dfrac{a(b-z)}{1-b^2+ab^2-abz}}=\\&\frac{b(1-b^2+ab^2-abz)-a(b-z)}{1-b^2+ab^2-abz-ab(b-z)}=\\&\frac{b(1-b^2+ab^2-abz)-a(b-z)}{1-b^2}=\\&az+b(1-a)=\sigma(z)\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\zeta(\overline{\varphi(\tau(\bar{z}))})&=\frac{1-b^2}{\left(1-b\dfrac{a(b-z)}{1-b^2+ab^2-abz}\right)^2}=\\&\frac{(1-b^2)(1-b^2+ab^2-abz)^2}{(1-b^2+ab^2-abz-ab^2+abz)^2}=\\&\frac{(1-b^2+ab^2-abz)^2}{1-b^2}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\overline{\psi(\tau(\bar{z}))}=\frac{1}{\left(1-c\dfrac{b-z}{1-bz}\right)^2}=\frac{(1-bz)^2}{(1-b^2+ab^2-abz)^2} \tag{6}$$

结合(2)～(6)式有

$$\begin{aligned}&JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi JT_\zeta C_\tau f(z)=\frac{1-b^2}{(1-bz)^2}\cdot\\&\frac{(1-bz)^2}{(1-b^2+ab^2-abz)^2}\frac{(1-b^2+ab^2-abz)^2}{1-b^2}\cdot\\&f(\sigma(z))=f(\sigma(z))=C_\sigma f(z).\end{aligned}$$

因而 $C_\sigma f(z)=JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi JT_\zeta C_\tau f(z)$ 对任意的 $f\in A^2(D)$ 均成立. 证毕.

下面我们来证明 C_σ 是复对称算子. 首先假设 $b=\dfrac{c}{1-a}$ 是实数，然后证明去掉该假设时结论依然成立.

命题 3.5　给定 $a,c\in D$ 满足 $|a|+|c|\leqslant 1$，$b=\dfrac{c}{1-a}\in(-1,1)$. 设 $\sigma(z)=az+c$. 则 C_σ 在 $A^2(D)$ 上是复对称算子.

证明 由引理3.3,$C_\sigma^* = T_\psi C_\varphi$. 再由引理3.4有

$$C_\sigma = JT_\zeta C_\tau T_\psi C_\varphi JT_\zeta C_\tau = JT_\zeta C_\tau C_\sigma^* JT_\zeta C_\tau.$$

由引理3.2知这里的$JT_\zeta C_\tau$是一个共轭,故C_σ关于共轭$JT_\zeta C_\tau$是复对称的. 证毕.

命题3.6 给定$a,c\in D$满足$|a|+|c|\leqslant 1$及$b=\frac{c}{1-a}\in D$,设$\sigma(z)=az+c$,则C_σ在$A^2(D)$上是复对称算子.

证明 由命题3.5知C_{σ_1}是复对称的,这里$\sigma_1(z)=az+c_1$,$b=\frac{c_1}{1-a}\in(-1,1)$,$c_1\in D$且$|a|+|c_1|\leqslant 1$. 对$\theta\in\mathbf{R}$,算子$U_\theta$: $A^2(D)\to A^2(D)$定义为$U_\theta f(z)=f(e^{i\theta}z)$. 易知$U_\theta$是酉算子且有逆算子为$U_{-\theta}$. 于是

$$U_{-\theta}C_{\sigma_1}U_\theta f(z)=U_{-\theta}C_{\sigma_1}f(e^{i\theta}z)=$$
$$U_{-\theta}f(e^{i\theta}\sigma_1(z))=f(e^{i\theta}\sigma_1(e^{-i\theta}z))=$$
$$f(\sigma(z))=C_\sigma f(z),$$

这里$\sigma(z)=az+c$,$c=c_1e^{i\theta}$. 这表明C_{σ_1}和C_σ是酉等价的. 因此,由$\theta\in\mathbf{R}$的任意性知,对所有满足条件的σ,C_σ也是复对称的. 证毕.

定理1.1的证明 若$c=0$,且σ不是恒等映射,则σ有唯一不动点为原点且没有边界不动点. 另外,根据文献[9]的定理8.2得C_σ是$A^2(D)$上的正规算子,C_σ一定是复对称的. 定理显然成立.

若$c\neq 0$,给定$a,c\in D$满足$|a|+|c|\leqslant 1$,则σ只有唯一不动点$b=\frac{c}{1-a}$. 充分性:$b=\frac{c}{1-a}$恰好是σ的Denjoy-Wolff点且$b\in D$,由命题3.6得C_σ是复对称的. 必要性:文献[8]的定理2表明如果C_σ是复对称算子则σ的Denjoy-Wolff点b一定在D内. 证毕.

参考文献:

[1] Garcia S R, Putinar M. Complex symmetric operators and applications[J]. Trans Amer Math Soc, 2006, 358: 1285.

[2] Garcia S R, Putinar M. Complex symmetric operators and applications Ⅱ[J]. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 3913.

[3] Garcia S R, Hammond C. Which weighted composition operators are complex symmetric? [J]. Oper Theory Adv Appl, 2014, 236: 171.

[4] Jung S, Kim Y, Ko E, *et al*. Complex symmetric weighted composition operators on $H^2(D)$[J]. J Funct Anal, 2014, 267: 323.

[5] Bourdon P S, Noor S W. Complex symmetry of invertible composition operators [J]. J Math Anal Appl, 2015, 429: 105.

[6] Gao Y X, Zhou Z H. Complex symmetric composition operators induced by linear fractional maps [J]. Indiana Univ Math J, in press.

[7] Narayan S K, Sievewright D, Thompson D. Complex symmetric composition operators on H^2[J]. J Math Anal Appl, 2016, 443: 625.

[8] Eklund T, Lindström M, Mleczko P. A note on complex symmetric composition operators on the Bergman space $A^2(D)$[J]. Funct Approx Comment Math, 2018, 59: 129.

[9] Cowen C C, MacCluer B D. Composition operators on spaces of analytic functions[M]. New York: CRC Press, 1995.

[10] Hurst P R. Relating composition operators on different weighted Hardy spaces [J]. J Arch Math, 1997, 68: 503.

引用本文格式:

中 文:宏俊颖,韩学红. 关于Bergman空间上复合算子的复对称性[J]. 四川大学学报:自然科学版,2020,57:621.

英 文:Hong J Y, Han X H. On complex symmetry of composition operators on Bergman space [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 621.