doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.007

非自治 Kirchhoff 型吊桥方程拉回 D-吸引子的存在性

徐　玲，张娟娟，马巧珍
（西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070）

摘　要：本文运用 Faedo-Galerkin 逼近方法获得了非自治 Kirchhoff 型吊桥方程解的存在唯一性，结合拉回 D-条件讨论了该方程在空间 $H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 中的拉回 D-吸引子的存在性.

关键词：非自治吊桥方程；Kirchhoff 型；拉回 D-条件；拉回 D-吸引子
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)04-0657-06

Existence of pullback D-attractors for non-autonomous suspension bridge equation of Kirchhoff-type

XU Ling, *ZHANG Juan-Juan*, *MA Qiao-Zhen*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we obtain the existence and uniqueness of solution for the non-autonomous suspension bridge equation of Kirchhoff type by using the method of Faedo-Galerkin approximation. Besides, the existence of pullback D-attractors for the equation in $H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ is discussed based on pullback D-condition.

Keywords: Non-autonomous suspension bridge equation; Kirchhoff-type; Pullback D-condition; Pullback D-attractor
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

假设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域. 本文主要讨论带有强阻尼项 $\Delta^2 u_t$ 的非自治 Kirchhoff 型吊桥方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u+\Delta^2 u_t+(p-\|\nabla u\|^2)\Delta u+k^2u^+ + \\ \quad f(u)=g(x,t), x\in[0,L], \\ u(0,t)=u(L,t)=u_x(0,t)=u_x(L,t)=0, t\in\mathbf{R}, \\ u(\tau)=u_0, u_t(\tau)=u_1, \forall x\in[0,L] \end{cases} \tag{1}$$

拉回 D-吸引子的存在性，其中 $u(x,t)$ 表示桥面在垂直方向的运动，$k^2>0$ 表示弹性系数，常数 $p\in\mathbf{R}$ 表示作用在桥面末端的轴向外力，当 $p>0$ 时表示桥被挤压，否则桥被拉伸，

$$u^+=\begin{cases} u, u>0, \\ 0, u\leqslant 0. \end{cases}$$

外力项 $g(x,t)\in L_{loc}^2(\mathbf{R};L^2(0,L))$，非线性项 $f\in C^2(\mathbf{R})$，$f(0)=0$ 满足条件：

(F_1) $\liminf\limits_{|u|\to\infty}\dfrac{F(u)}{u^2}\geqslant 0, \forall u\in\mathbf{R}$;

(F_2) $\liminf\limits_{|u|\to\infty}\dfrac{uf(u)-C_1F(u)}{u^2}\geqslant 0, \forall u\in\mathbf{R}$;

(F_3) $|f(u)|\leqslant C_2(1+|u|^p), \forall p\geqslant 1, \forall u\in\mathbf{R}$,

其中 $C_1>0, C_2>0$ 为常数，$F(u)=\int_0^u f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$.

1990 年，Lazer 和 McKenna[1] 讨论了吊桥方程

$$u_{tt}+\Delta^2 u+\alpha u_t+ku^+=w(x,t)+f(x) \tag{2}$$

收稿日期：2019-05-07
基金项目：国家自然科学基金(11561064)；甘肃省自然科学基金(17JR5RA069)；甘肃省高等学校科研项目(2017B-90)；西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(NWNU-LKQN-16-16，NWNU-LKQN-18-14)
作者简介：徐玲(1983－)，女，副教授，博士研究生，主要研究方向为无穷维动力系统. E-mail：13893414055@163.com

弱解的存在性.随后,诸多学者研究了问题(2)的周期解和数值模拟[2-4].另一方面,鉴于吸引子能够有效地描述非线性发展方程所产生的动力系统的最终状态或长时间的发展行为,很好地反映自然界的许多非线性现象,人们也开始广泛研究非线性发展方程的吸引子及其性质[5-11].特别地,2005 年,文献[5]获得了耦合吊桥方程全局吸引子的存在性.接着,人们对吊桥方程及耦合系统整体强解和吸引子的存在性进行了广泛的研究[6-11].如果考虑到桥梁的轴向拉伸而产生的轴向拉力[12],就得到了 Kirchhoff 型吊桥方程(1).

在文献[13]中,当外力项 $g\in L^{\infty}(\mathbf{R}^{+};L^{2}(\Omega))$ 和$\partial_t g\in L^2_{loc}(\mathbf{R};H^{-2}(\Omega))$时,作者获得了方程(1)有界吸收集的存在性,并在 g 不显含时间 t 时证明了该问题弱解的全局吸引子的存在性及正则性.然而对于问题(1)拉回吸引子的存在性尚无相关结果.本文运用文[14-15]中的方法研究非线性项满足条件(F_1)~(F_3)时问题(1)拉回 D-吸引子的存在性.

2 预备工作

设 $H=L^2(0,L)$,$V=H^2_0(0,L)$,H 和 V 内积和范数分别定义为

$$(u,v)=\int_\Omega uv\mathrm{d}x,\ \|u\|^2=(u,u),\forall u,v\in H,$$

$$((u,v))=\int_\Omega \Delta u\Delta v\mathrm{d}x,\ \|u\|_2^2=((u,v)),\forall u,v\in V.$$

不失一般性,对$\forall r\in\mathbf{R}$,定义 Hilbert 空间 $H^r=D(A^{\frac{r}{4}})$,其内积和范数为

$$(u,v)_r=(A^{\frac{r}{4}}u,A^{\frac{r}{4}}v),\ \|\cdot\|_r=\|A^{\frac{r}{4}}u\|.$$

特别地,$D(A)=\{u\in H^4(\Omega):u(0,t)=u(L,t)=u_x(0,t)=u_x(L,t)=0\}$,$D(A^0)=H$,$D(A^{\frac12})=V$,其中 $A=\Delta^2$,$A^{\frac12}=-\Delta$.由紧嵌入 $H^{r+1}\to H^r$ 得到广义的 Poincaré 不等式

$$\|u\|^4_{r+1}\geqslant\lambda_1\ \|u\|^4_r,\forall u\in H^{r+1} \tag{3}$$

其中 $\lambda_1>0$ 是 A 的第一个特征值.

下面介绍本文用到的基本概念和抽象结论,参见文献[14-15].

设(E,d)是完备的度量空间,(Q,ρ)为度量空间,也被称为符号空间.我们定义共圈映射 $\varphi:\mathbf{R}\times Q\times E$ 为非自治动力系统,它是由连续的动力系统作用在符号空间 Q 上而获得.特别地,$\theta=\{\theta_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是定义在 Q 上的动力系统,满足以下性质:

(i) $\theta_0(q)=q,\forall q\in Q$;

(ii) $\theta_{t+\tau}(q)=\theta_t(\theta_\tau(q)),\forall q\in Q,\tau,t\in\mathbf{R}$;

(iii) 映射$(t,q)\to\theta_t(q)$连续.

定义 2.1 若 φ 满足

(i) $\varphi(0,q,x)=x,\forall(q,x)\in Q\times E$;

(ii) $\varphi(t+s,q,x)=\varphi(s,\theta_t(q),\varphi(t,q,x)x)$,$\forall s,t\in\mathbf{R}^+,(q,x)\in Q\times E$,

则称映射 $\varphi:\mathbf{R}^+\times Q\times E\to E$ 是由 θ 诱导出的共圈映射.

根据上述定义可知,(θ,φ)构成 $Q\times E$ 上的非自治动力系统.

定义 $P(E)$是集合 E 的非空子集构成的集合,$B(E)$是集合 E 的所有有界子集构成的集合,且 K 是集族 $\hat{D}$ 的类,其中 $\hat{D}=\{D_q\}_{q\in Q}\subset P(E)$,$D\subset K$ 且是非空子类.

定义 2.2 如果对于任意的 $q\in Q,\hat{D}\in D$,存在 $t_0(q,\hat{D})\geqslant 0$ 使得

$$\varphi(t,\theta_{-t}(q),D_{\theta_{-t}(q)})\subset B_q,$$

则称集合族 $\hat{B}=\{B_q\}_{q\in Q}\subset K$ 为拉回 D-吸收集,其中 $t\geqslant t_0(q,\hat{D})$.

定义 2.3 设 E 是 Banach 空间,(θ,φ)是定义在 $Q\times E$ 上的非自治动力系统.如果对于任意的 $q\in Q,\hat{C}\subset D,\varepsilon>0$,存在 $t_0=t_0(q,\hat{C},\varepsilon)\geqslant 0$ 和 E 的一个有限维子空间 E_1,使得

(i) $P(\cup_{t\geqslant t_0}\varphi(t,\theta_{-t}(q),D_{\theta_{-t}(q)}))$有界;

(ii) $\|(I-P)(\cup_{t\geqslant t_0}\varphi(t,\theta_{-t}(q),D_{\theta_{-t}(q)}))\|_E\leqslant\varepsilon$,

则称(θ,φ)为拉回 D-条件(C),其中 $P:E\to E_1$ 是有界投影算子.

定理 2.4 设(θ,φ)是定义在 $Q\times E$ 上的非自治动力系统.如果

(i) (θ,φ)在 E 中存在拉回 D-吸收集 $\hat{B}=\{B_q\}_{q\in Q}\subset D$;

(ii) (θ,φ)满足拉回 D-条件(C),则称(θ,φ)存在一个拉回 D-吸引子 $\hat{A}=\{A_q\}_{q\in Q}$,其中

$$A_q=\Lambda(\hat{D},q)=\cap_{s\geqslant 0}\overline{\cup_{t\geqslant s}\varphi(t,\theta_{-t}(q),D_{\theta_{-t}(q)})}.$$

3 主要结果

问题(1)的解的适定性以及解对初值的连续依赖性可由 Faedo-Galerkin 逼近方法获得,这里不再陈述,我们直接给出下面的结果.

定理 3.1[7,9]　假设(F_1)～(F_3)成立. 对于任意给定的 $u_0\in V, u_1\in H, g\in L^2_{loc}(\mathbf{R};H)$，问题(1)存在唯一解

$$u_t\in C(\mathbf{R}_\tau;V), u_t(t)\in C(\mathbf{R}_\tau;H) \tag{4}$$

其中 $\mathbf{R}_\tau=[\tau,+\infty)$.

为方便起见，记 $y(t)=(u(t),u_t(t))$，$y_0=(u_0,u_1)$，$E_0=V\times H$. 我们在 E_0 上定义范数 $\|y\|_{E_0}=\{\|u\|_2^2+\|u_t\|^2\}^{\frac{1}{2}}$，等价于 $\|y\|^2_{E_0}=\|u\|_2^2+\|u_t+\varepsilon u\|^2$. 在空间 E_0 上构造由方程(1)生成的非自治动力系统. 设 $Q=\mathbf{R}$，$\theta_\tau t=t+\tau$，$\forall t,\tau\in\mathbf{R}$，定义

$$\varphi(t,\tau,y_{\tau_0})=y(t+\tau,\tau,y_0)=(u(t+\tau),u_t(t+\tau)),\tau\in\mathbf{R},t\geqslant 0,y_0\in E_0$$

且

$$\varphi(t+s,\tau,y_0)=\varphi(t,s+\tau,\varphi(s,\tau,y_0)),\quad \tau\in\mathbf{R},s\geqslant 0,t\geqslant 0.$$

由上述定义可知，映射 $\varphi:E_0\to E_0$ 是连续共圈映射.

本文假设 $g\in L^2_{loc}(\mathbf{R};H)$满足

$$\int_{-\infty}^t e^{\delta s}\|g(x,s)\|^2 ds<\infty, \forall t\in\mathbf{R} \tag{5}$$

设 R_δ 是由全体泛函 $r:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$构成的集合，存在常数 $\delta>0$，使得

$$\lim_{t\to-\infty}e^{\delta t}r^2(t)=0 \tag{6}$$

记 $D_{\delta,E}$为集族 $\hat{D}=\{D(t);t\in\mathbf{R}\}\subset P(E_0)$的集，且当 $r_{\hat{D}}(t)\in R_\delta$ 时，$D(t)\subset\bar{B}(0,r_{\hat{D}}(t))$，其中 $\bar{B}(0,r_{\hat{D}}(t))$是 E 中的闭包.

引理 3.2[7,9]　假设 $f\in C^2(\mathbf{R})$，$f(0)=0$ 且满足(F_3)，则 $f:V\to H$ 紧连续.

引理 3.3[7,9]　设集合族$\{w_i\}_{i\in\mathbf{N}}$是 V 中的正交基. $g\in L^2_{loc}(\mathbf{R};H)$且满足条件(5)，则

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\infty}^t e^{\delta s}\|(I-P_m)g(x,s)\|^2 ds=0,\quad \forall t\in\mathbf{R},$$

其中 $\delta>0$ 是常数，$P_m:V\to\mathrm{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$是正交算子.

定理 3.4　假设(F_1)～(F_3)成立，$g(x,t)\in L^2_{loc}(\mathbf{R};H)$. 则与问题(1)对应的非自治动力系统 $\varphi(t,\tau,y_{\tau_0})$在 E 中存在拉回 $D_{\delta,E}$-吸收集.

证明　取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. 用 $\psi=u_t+\varepsilon u$ 与(1)式在 H 中作内积，可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((1-\varepsilon)\|u\|_2^2+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}(\|u\|_1^2-p)^2\right)+\varepsilon(1-\varepsilon)\|u\|_2^2+\|\psi\|_2^2-\varepsilon\|\psi\|^2+\varepsilon^2(u,\psi)+\varepsilon(\|u\|_1^2-p)^2+p\varepsilon(\|u\|_1^2-p)+k^2(u^+,\psi)=(g(t),\psi)-(f(u),\psi) \tag{7}$$

由 Young 不等式和 Hölder 不等式可得

$$(g(t),\psi)\leqslant\frac{\lambda_1}{4}\|\psi\|^2+\frac{1}{\lambda_1}\|g(t)\|^2 \tag{8}$$

$$k^2(u^+,\psi)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}k^2\|u^+\|^2+\varepsilon k^2\|u^+\|^2 \tag{9}$$

根据条件(F_2)可得，存在常数 $K_1>0$，使得

$$\int_0^L uf(u(x))dx-C_1\int_0^L F(u(x))dx+\frac{1-\varepsilon}{4}\|u\|^2\geqslant -K_1, \forall u\in V \tag{10}$$

由 (10) 式可得

$$(f(u),\psi)=\frac{d}{dt}\int_0^L F(u(x))dx+\varepsilon(u,f(u))\geqslant\frac{d}{dt}\int_0^L F(u(x))dx+\varepsilon C_1\int_0^L F(u(x))dx-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{4}\|u\|_2^2-\varepsilon K_1 \tag{11}$$

由于

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\|u\|_2^2+\|\psi\|_2^2-\varepsilon\|\psi\|^2+\varepsilon^2(u,\psi)+\varepsilon(\|u\|_1^2-p)^2+p\varepsilon(\|u\|_1^2-p)\geqslant\frac{3\varepsilon(1-\varepsilon)}{4}\|u\|_2^2+\left(\lambda_1-\frac{\varepsilon^2}{\lambda_1^2}-\varepsilon\right)\|\psi\|^2+\frac{\varepsilon}{2}(\|u\|_1^2-p)^2-\frac{\varepsilon p^2}{2} \tag{12}$$

将(8)～(12)式代入 (7) 式，取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 $\lambda_1-\frac{\varepsilon^2}{\lambda_1^2}-\varepsilon>\frac{\lambda_1}{2}$，从而有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((1-\varepsilon)\|u\|_2^2+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}(\|u\|_1^2-p)^2+k^2\|u^+\|^2+2\int_0^L F(u(x))dx\Big)+\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\|u\|_2^2+\frac{\lambda_1}{4}\|\psi\|^2+\frac{\varepsilon}{2}(\|u\|_1^2-p)^2+\varepsilon k^2\|u^+\|^2+\varepsilon C_1\int_0^L F(u(x))dx\leqslant\varepsilon K_1+\frac{1}{\lambda_1}\|g(t)\|^2+\frac{\varepsilon p^2}{2} \tag{13}$$

令 $\delta=\min\left\{\varepsilon C_1,\frac{\lambda_1}{2},\varepsilon\right\}$. 则

$$\frac{d}{dt}\Big((1-\varepsilon)\|u\|_2^2+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}(\|u\|_1^2-p)^2+k^2\|u^+\|^2+$$

$$2\int_0^L F(u(x))\mathrm{d}x)+\delta((1-\varepsilon)\ \|u\|_2^2+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}(\|u\|_1^2-p)^2+k^2\ \|u^+\ \|^2+2\int_0^L F(u(x))\mathrm{d}x)\leqslant 2K_1\varepsilon+\frac{2}{\lambda_1}\ \|g(t)\|^2+\varepsilon p^2 \tag{14}$$

由条件(F_1)可得,存在常数 $K_2>0$,使得

$$\int_0^L F(u(x))\mathrm{d}x+\frac{1-\varepsilon}{4}\ \|u\|_2^2\geqslant -K_2,\quad \forall u\in V \tag{15}$$

定义

$$W(t)=(1-\varepsilon)\ \|u\|_2^2+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}(\|u\|_1^2-p)^2+k^2\ \|u^+\ \|^2+2\int_0^L F(u(x))\mathrm{d}x+2K_2.$$

根据 (15) 式有 $W(t)\geqslant 0$ 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t)+\delta W(t)\leqslant 2K_1\varepsilon+2K_2\delta+\frac{2}{\lambda_1}\|g(t)\|^2+\varepsilon p^2 \tag{16}$$

两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\delta t}$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\delta t}W(t))\leqslant \mathrm{e}^{\delta t}(2K_1\varepsilon+2K_2\delta+\frac{2}{\lambda_1}\|g(t)\|^2+\varepsilon p^2).$$

在$[t-\tau,t]$上对上式取积分,可得

$$W(t)\leqslant \mathrm{e}^{-\delta\tau}W(t-\tau)+\frac{2K_1\varepsilon+2K_2\delta+\varepsilon p^2}{\delta}+\frac{2}{\lambda_1}\mathrm{e}^{-\delta t}\int_{t-\tau}^t \mathrm{e}^{\delta s}\ \|g(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant \mathrm{e}^{-\delta\tau}W(t-\tau)+\frac{2K_1\varepsilon+2K_2\delta+\varepsilon p^2}{\delta}+\frac{2}{\lambda_1}\mathrm{e}^{-\delta t}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\delta s}\ \|g(s)\|^2\ \mathrm{d}s \tag{17}$$

对任意 $\hat{D}\in D_{\delta,E_0}$,$y_0\in D(t-\tau)$,由条件($F_2$)可知 $\int_0^L F(u_0)\mathrm{d}x$ 有界. 因此

$$\sup_{y_0\in D(t-\tau)}W(t-\tau)=\sup_{y_0\in D(t-\tau)}\{(1-\varepsilon)\ \|u_0\|_2^2+\|u_1+\varepsilon u_0\|^2+\frac{1}{2}(\|u_0\|_1^2-p)^2+k^2\ \|u_0^+\|^2+2\int_0^L F(u_0)\mathrm{d}x\}<\infty \tag{18}$$

从而由(15)式可得到

$$W(t)=(1-\varepsilon)\ \|u\|_2^2+\|\psi\|^2+\frac{1}{2}(\|u\|_1^2-p)^2+k^2\ \|u^+\ \|^2+2\int_0^L F(u(x))\mathrm{d}x+2K_2\geqslant \frac{1-\varepsilon}{2}(\|u\|_1^2+\|\psi\|^2) \tag{19}$$

因此我们有

$$\|\varphi(\tau,t-\tau,y_0)\|_{E_0}^2\leqslant\frac{2}{1-\varepsilon}W(t)\leqslant\frac{2}{1-\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{-\delta\tau}W(t-\tau)+\frac{2K_1\varepsilon+2K_2\delta+\varepsilon p^2}{\delta}+\frac{2}{\lambda_1}\mathrm{e}^{-\delta t}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\delta s}\ \|g(s)\|^2\mathrm{d}s\right) \tag{20}$$

即对所有的 $y_0\in D(t-\tau)$, $t\in\mathbf{R}$, $\tau>0$, $\|\varphi(\tau,t-\tau,y_0)\|_{E_0}^2$ 有界.

令

$$(R_\delta(t))^2=\frac{4}{1-\varepsilon}(e^{-\delta\tau}W(t-\tau)+\frac{2K_1\varepsilon+2K_2\delta+\varepsilon p^2}{\delta}+\frac{2}{\lambda_1}\mathrm{e}^{-\delta t}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{\delta s}\ \|g(s)\|^2\mathrm{d}s).$$

集合族 $\hat{B}_{\delta,E_0}$ 是由 E_0 中的集合 $B_\delta(t)$ 的闭包构成的集合族,其中

$$B_\delta(t)=\{y\in E_0;\|y\|_{E_0}^2\leqslant(R_\delta(t))^2\} \tag{21}$$

由(5)式可知,$\hat{B}_{\delta,E_0}$ 是共圈映射 φ 的拉回 D_{δ,E_0}-吸收集. 证毕.

我们要得到问题 (1) 在 E_0 中存在拉回 $D_{\delta,E}$-吸引子,由定理 2.4 知,我们只需验证拉回 D_{δ,E_0}-条件(C).

定理 3.5 假设(F_1)~(F_3)成立,$g(x,t)\in L_{loc}^2(\mathbf{R};H)$,$p<(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda_1}$. 则问题(1)对应的非自治动力系统$(\theta,\varphi)$在 E_0 中存在拉回 D_{δ,E_0}-吸引子.

证明 设序列$\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$是由 A 组成的 H 的标准正交基,他们所对应的特征值为 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\leqslant\cdots$. 当 $j\to\infty$时,$\lambda_j\to+\infty$,则$\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$也是空间 V 的标准正交基,且 $A\omega_j=\lambda_j\omega_j$, $\forall j\in\mathbf{N}$. 记 $V_m=\mathrm{span}\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$,$P_m:V\to V_m$ 是正交算子. 对任意的 $u\in H_0^2(\Omega)$,记

$$u=P_m u+(I-P_m)u\overset{\Delta}{=}u_1+u_2.$$

在 H 中用 $\psi_2=u_{2t}+\varepsilon u_2$ 和方程(1)作内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|^2)+\varepsilon(1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|_2^2-\varepsilon\ \|\psi_2\|^2+\varepsilon^2(u_2,\psi_2)+k^2(u_2^+,\psi_2)-(p-\|u\|_1^2)(A^{\frac{1}{2}}u_2,\psi_2)=(g(t),\psi_2)-(f(u),\psi_2) \tag{22}$$

由于

$$k^2(u_2^+,\psi_2)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}k^2\|u_2^+\|^2+\varepsilon k^2\|u_2^+\|^2 \tag{23}$$

$$(\|u\|_1^2-p)(A^{\frac{1}{2}}u_2,\psi_2)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2)+\varepsilon(\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2) \tag{24}$$

由 Poincaré 不等式，Young 不等式和 Hölder 不等式得

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|_2^2-\varepsilon\|\psi_2\|^2+\varepsilon^2(u_2,\psi_2)\geqslant\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\|u_2\|_2^2+\left(\lambda_1-\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_1}-\varepsilon\right)\|\psi_2\|^2 \tag{25}$$

由于

$$|f(u),\psi_2|\leqslant|((I-P_m)f(u),\psi_2)|\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|(I-P_m)f(u)\|^2+\frac{\lambda_1}{4}\|\psi_2\|^2 \tag{26}$$

$$|g(t),\psi_2|\leqslant|((I-P_m)g(t),\psi_2)|\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|(I-P_m)g(t)\|^2+\frac{\lambda_1}{4}\|\psi_2\|^2 \tag{27}$$

将(23)～(27)式代入(22)式，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|^2+\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2+k^2\|u_2^+\|^2)+\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\|u_2\|_2^2+\left(\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_1}-\varepsilon\right)\|\psi_2\|^2+\varepsilon(\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2)+\varepsilon k^2\|u_2^+\|^2=\frac{1}{\lambda_1}\|(I-P_m)g(t)\|^2+\frac{1}{\lambda_1}\|(I-P_m)f(u)\|^2 \tag{28}$$

取适当 ε 使得 $\frac{\lambda_1}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_1}-\varepsilon>\frac{\lambda_1}{4}$，可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|^2+\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2+k^2\|u_2^+\|^2)+\varepsilon(1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\frac{\lambda_1}{2}\|\psi_2\|^2+2\varepsilon(\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2)+2\varepsilon k^2\|u_2^+\|^2=\frac{2}{\lambda_1}\|(I-P_m)g(t)\|^2+\frac{2}{\lambda_1}\|(I-P_m)f(u)\|^2 \tag{29}$$

记

$$\chi(t)=(1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|^2+\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2+k^2\|u_2^+\|^2.$$

由(4)式可知

$$\chi(t)\geqslant C(p)(\|u_2\|_2^2+\|\psi_2\|^2)>0 \tag{30}$$

其中

$$C(p)=\begin{cases}1-\varepsilon, p\leqslant 0,\\ 1-\varepsilon-\dfrac{p}{\sqrt{\lambda_1}}, 0<p<\dfrac{(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda_1}}{3}.\end{cases}$$

取 $\eta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{\lambda_1}{2}\right\}$. 从而有

$$\varepsilon(1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2+\frac{\lambda_1}{2}\|\psi_2\|^2+2\varepsilon(\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2-p\|u_2\|_1^2)+2\varepsilon k^2\|u_2^+\|^2\geqslant\frac{\varepsilon}{2}((1-\varepsilon)\|u_2\|_2^2-p\|u_2\|_1^2)+\frac{\lambda_1}{2}\|\psi_2\|^2+2\varepsilon\|u\|_1^2\|u_2\|_1^2+2\varepsilon k^2\|u_2^+\|^2\geqslant\eta\chi(t).$$

则由(29)式可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi(t)+\eta\chi(t)\leqslant\frac{2}{\lambda_1}\|(I-P_m)g(t)\|^2+\frac{2}{\lambda_1}\|(I-P_m)f(u)\|^2 \tag{31}$$

上式两边同乘 $\mathrm{e}^{\eta t}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\eta t}\chi(t))\leqslant\mathrm{e}^{\eta t}\left(\frac{2}{\lambda_1}\|(I-P_m)g(t)\|^2+\frac{2}{\lambda_1}\|(I-P_m)f(u)\|^2\right) \tag{32}$$

利用 Gronwall 引理，对上式在 $[t-\tau,t]$ 上积分可得

$$\chi(t)\leqslant\chi(t-\tau)\mathrm{e}^{-\eta\tau}+\frac{2}{\lambda_1}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)g(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{2}{\lambda_1}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)f(u)\|^2\mathrm{d}s \tag{33}$$

由于

$$\|\varphi_2(\tau,t-\tau,y_0)\|_{E_0}^2\leqslant\frac{1}{C(p)}\chi(t)\leqslant\frac{1}{C(p)}\left(\chi(t-\tau)\mathrm{e}^{-\eta\tau}+\frac{2}{\lambda_1}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)g(s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{2}{\lambda_1}\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)f(u)\|^2\mathrm{d}s\right),$$

对 $\forall t\in\mathbf{R}$，$\varepsilon_1>0$，存在 $t_1\in(t-\tau,t)$，$\tau_1>0$ 使得 $u(s)=u(s,t-\tau,y_0)\in B_\delta$. 因此对任意 $\tau\geqslant\tau_1$，$s\in[t-\tau,\tau_1]$，$y_0\in D(t-\tau)$ 有

$$\int_{t-\tau}^{t_1}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)f(u)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{C(p)\lambda_1\varepsilon_1}{6} \tag{34}$$

其次,令 $\hat{R}=\max_{s\in[t_1,t]}R_\delta(s)<\infty$. 则

$$\|u(s)\|_2=\|u(s,t-\tau,y_0)\|_2\leqslant\hat{R},\quad \forall s\in[t_1,t],y_0\in D(t-\tau).$$

由引理 3.2 可知,$\forall\varepsilon_1>0,m\geqslant m_1,\tau\geqslant\tau_1$,可得

$$\int_{t_1}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)f(u)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{C(p)\lambda_1\varepsilon_1}{6}\tag{35}$$

再次,由引理 3.3,取足够大的 m,使得

$$\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\|(I-P_m)g(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{C(p)\lambda_1\varepsilon_1}{6}\tag{36}$$

最后,由(6)式可知,存在 $\tau_2\geqslant0$,使得

$$\frac{\chi(t-\tau)\mathrm{e}^{-\eta\tau}}{C(p)}\leqslant\frac{\varepsilon_1}{3},\forall\tau\geqslant\tau_2,y_0\in D(t-\tau)\tag{37}$$

取 $\tau_0=\max\{\tau_1,\tau_2\}$,由(34)~(37)式即得

$$\|\varphi_2(\tau,t-\tau,y_0)\|_{E_0}^2\leqslant\varepsilon_1,\forall\tau\geqslant\tau_0,\quad y_0\in D(t-\tau).$$

从而由定理 2.4 可得到,问题(1)对应的非自治动力系统 (θ,φ) 在 E_0 中存在拉回 D_{δ,E_0}-吸引子. 证毕.

注 设条件(F_1)~(F_3)成立,$g\in L_{loc}^2(\mathbf{R},H)$满足方程(1). 分别用 $\Delta^2u+\varepsilon\Delta^2u_t$ 及 $\Delta^2u_2+\varepsilon\Delta^2u_{2t}$ 与方程(1)在 H 中作内积,利用与上面类似的估计及方法,我们可得到方程(1)在 $D(A)\times V$ 中存在拉回 D_{δ,E_1}-吸引子.

参考文献:

[1] Lazer A C, McKenna P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connection with nonlinear analysis [J]. SIAM Rev, 1990, 32: 537.

[2] Ahmed N U, Harbi H. Mathematical analysis of dynamical models of suspension bridges [J]. SIAM J Appl Math, 1998, 58: 853.

[3] Humphreys L D. Numercial mountain pass solutions of a suspension bridge equation [J]. Nonlinear Anal-Theor, 1997, 28: 1811.

[4] McKenna P J, Walter W. Nonlinear oscillation in a suspension bridges [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2000, 39: 731.

[5] Ma Q Z, Zhong C K. Existence of global attractors for the coupled suspension bridge equations [J]. J Math Anal Appl, 2005, 308: 365.

[6] Zhong C K, Ma Q Z, Sun C Y. Existence of strong solutions and global attractors for the suspension bridge equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 67: 442.

[7] Yong H X, Ma Q Z, Chang Y Y. Existence of pullback attractors for non-autonomous suspension bridge equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2015, 52: 255.

[8] Park J Y, Kang J R. Pullback *D*-attractors for non-autonomous suspension bridge equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 4618.

[9] Ma Q Z, Zhong C K. Existence of global attractors for the suspension bridge equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2006, 43: 272.

[10] Ma Q Z, Zhong C K. Existence of strong solutions and global attractors for the coupled suspension bridge equations [J]. J Differ Equ, 2009, 246: 3755.

[11] Ma Q Z, Wang S P, Chen X B. Uniform attractors for the coupled suspension bridge equations [J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 6604.

[12] Woinowsky-Krieger S. The effect of an axial force on the vibration of hinged bars [J]. J Appl Mechanics, 1950, 17: 35.

[13] Bochicchio I, Giorgi C, Vuk E. Long-term damped dynamics of the extensible suspension bridge [J]. Int J Differ Equ, 2010: 1.

[14] Wang Y H, Zhong C K. Pullback *D*-attractors for non-autonomous sine-Gordon equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 67: 2137.

[15] Caraballo T, Lukaszewicz G, Real J. Pullback attractors for asymptotically compact nonautonomous dynamical systems [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2006, 64: 484.

引用本文格式:

中 文: 徐玲, 张娟娟, 马巧珍. 非自治 Kirchhoff 型吊桥方程拉回 *D*-吸引子的存在性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 657.

英 文: Xu L, Zhang J J, Ma Q Z. Existence of pullback *D*-attractors for non-autonomous suspension bridge equation of Kirchhoff-type [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 657.