doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.004

一类二阶离散左定 Sturm-Liouville 问题的谱

王雅丽，高承华
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文考虑二阶离散左定 Sturm-Liouville (S-L)问题

$$\begin{cases} -\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\ t\in[1,T]_{\mathbf{Z}} \\ (a\lambda+b)y(0)=(c\lambda+d)\Delta y(0),\ y(T+1)=0 \end{cases}$$

的谱，这里$[1,T]_{\mathbf{Z}}=\{1,2,\cdots,T\}$，$\lambda$ 是谱参数，$r(t)$在$[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上变号. 本文得到了该问题特征值的存在性，交错性以及对应特征函数的振荡性.

关键词：离散左定 Sturm-Liouville 问题；边界条件依赖特征参数；谱；交错；振荡
中图分类号：O175.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)04-0642-05

Spectra of second order discrete left-definite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions

WANG Ya-Li, *GAO Cheng-Hua*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, we consider the spectra of the discrete second-order left definite Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} -\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\ t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}, \\ (a\lambda+b)y(0)=(c\lambda+d)\Delta y(0),\ y(T+1)=0 \end{cases}$$

where $[1,T]_{\mathbf{Z}}=\{1,2,\cdots,T\}$, λ is a spectral parameter, $r(t)$ changes its sign on $[1,T]_{\mathbf{Z}}$. We obtain the existence, interlacing properties and oscillation of the eigenvalues of the problem.

Keywords: Discrete left-definite Sturm-Liouville problem; Eigenparameter-dependent boundary condition; Spectra; Interlace; Oscillation
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

近年来，在许多物理问题中出现了边界条件依赖特征参数的 S-L 问题，引起了诸多学者的广泛关注并获得了许多深刻结果[1-4]. 如文献[2]利用 Prüfer 变换研究了边界条件依赖特征参数的特征值问题的 S-L 理论，得到了特征值的存在性，交错性以及特征值对应特征函数的振荡性. 文献[4]得到了连续情形下问题的渐近公式及特征值的交错性，对应特征函数的振荡性等性质.

对边界条件依赖于特征参数的离散右定 S-L 问题的谱的研究也已经取得了丰富的结果[5-9]. 如 2016 年，文献[7]研究了如下边界条件依赖线性特征参数的离散右定 S-L 问题：

收稿日期：2019-07-23
基金项目：甘肃省自然科学基金重点项目(18JR3RA084)
作者简介：王雅丽(1995－)，女，甘肃武威人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程与动力系统. E-mail：18209319069@163.com
通讯作者：高承华. E-mail：gaokuguo@163.com

$$\begin{cases}-\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t)=\\ \quad\lambda m(t)y(t),t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\ (a_0\lambda+b_0)y(0)=(c_0\lambda+d_0)\Delta y(0),\\ \quad(a_1\lambda+b_1)y(T)=(c_1\lambda+d_1)\nabla y(T+1)\end{cases}$$

的谱，其中 $m(t)>0$，$t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$，即 $m(t)$ 在 $[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上不变号. 对于边界条件依赖特征参数的离散左定 S-L 问题的谱研究相对少见. 2017 年，文献[10]研究了边界条件依赖线性特征参数的离散左定 S-L 问题

$$\begin{cases}-\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\\ \quad t\in[1,T]_{\mathbf{Z}},\\ b_0y(0)=d_0\Delta y(0),\ (a_1\lambda+b_1)y(T)=\\ \quad(c_1\lambda+d_1)\nabla y(T+1)\end{cases}$$

的谱. 其中，$r(t)$在$[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上变号. 受以上文献的启发，本文研究如下二阶离散左定 S-L 问题

$$\begin{cases}-\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\\ \quad t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}, & (1)\\ (a\lambda+b)y(0)=(c\lambda+d)\Delta y(0),\ y(T+1)=0 & (2)\end{cases}$$

的谱，这里 Δ 是前差分算子，满足 $\Delta u(t)=u(t+1)-u(t)$,∇是后差分算子，满足$\nabla u(t)=u(t)-u(t-1)$,λ 是谱参数，p:$[0,T]_{\mathbf{Z}}\to(0,+\infty)$，$q$:$[1,T]_{\mathbf{Z}}\to(0,+\infty)$，$r(t)\neq0$ 且在$[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上变号. 进一步推广了文献[10]的结果.

2　预备知识

本文总假定：

(A1) 对所有的 $t\in[0,T]_{\mathbf{Z}}$ 有 $p(t)>0$，对所有的 $t\in[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 有 $q(t)\geqslant0$；

(A2) $r(t)$在 $t\in[1,T]_Z$ 上变号，即在$[1,T]_{\mathbf{Z}}$ 上有 m 个点使得 $r(t)>0$，另外 $T-m$ 个点使得 $r(t)<0$；

(A3) δM 正定，其中 $\delta=ad-bc$，

$$M=\begin{pmatrix}ab & -bc\\ -bc & cd\end{pmatrix}.$$

由(A3)可知，$\delta ab>0$，$\delta cd>0$ 且 $\det M=\delta bc>0$，于是 $ac>0$，$bd>0$.

设 $y(t,\lambda)$是方程(1)满足初始条件

$$y(0,\lambda)=p(0)(c\lambda+d),\ \Delta y(0,\lambda)=a\lambda+b \quad (3)$$

的解，则 $y(t,\lambda)$为如下广义 Sturm 序列：

$$y(0,\lambda)=p(0)(c\lambda+d);$$

$$y(1,\lambda)=(a+p(0)c)\lambda+(b+p(0)d);$$

$$y(i,\lambda)=\left[1+\frac{p(i-2)}{p(i-1)}+\frac{q(i-1)}{p(i-1)}-\frac{\lambda r(i-1)}{p(i-1)}\right]\cdot y(i-1,\lambda)-\frac{p(i-2)}{p(i-1)}y(i-2,\lambda)=(-1)^{i-1}\frac{r(i-1)r(i-2)\cdots r(1)}{p(i-1)p(i-2)\cdots p(1)}\cdot(a+p(0)c)\lambda^i+P_{i-1}(\lambda),\ i=2,\cdots,T \quad (4)$$

这里 $P_{i-1}(\lambda)$是关于λ 的 $i-1$ 次多项式. 特别地，

$$y(T+1,\lambda)=(-1)^m\frac{|r(T)r(T-1)\cdots r(1)|}{p(T)p(T-1)\cdots p(1)}(a+p(0)c)\lambda^{T+1}+P_T(\lambda).$$

定义 $Y=\{y:[1,T+1]_{\mathbf{Z}}\to\mathbf{C}\}$. Y 在内积 $\langle y,z\rangle_Y=\sum_{t=1}^{T+1}y(t)\bar{z}(t)$ 之下构成 Hilbert 空间.

定义 $H:=Y\oplus C$. 则 H 在内积

$$\langle Y,Z\rangle=((y,\alpha),(z,\beta))=\langle y,z\rangle_Y+\frac{1}{|\delta|}\alpha\beta$$

之下构成 Hilbert 空间.

定义 A：$D(A)\to H$，

$$A(y,\alpha)=(-\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t),\ -\varepsilon(by(0)-dp(0)\Delta y(0))),$$

其中 $D(A)=\{(y,\alpha)\mid y\in Y,\ -ay(0)+cp(0)\Delta y(0)=\alpha\}$,$\varepsilon=\mathrm{sgn}\delta$. 于是问题(1)-(2)等价于 $AY=\lambda SY$，这里 $S=(y,\alpha)=(ry,\alpha)$.

引理 2.1　算子 A 在 $D(A)$上是正定的.

证明　由 Hilbert 空间中内积的定义可得

$$\langle AY,Y\rangle=\langle AY,Y\rangle_Y+\frac{1}{|\delta|}\{[-ay(0)+cp(0)\Delta y(0)][-\varepsilon(by(0)-dp(0)\Delta y(0))]\}=$$

$$\sum_{t=1}^{T}y(t)[-\nabla p(t)\Delta y(t)+q(t)y(t)]-\frac{\varepsilon}{|\delta|}\{[-ay(0)+cp(0)\Delta y(0)][by(0)-dp(0)\Delta y(0)]\}=$$

$$\sum_{t=1}^{T}y(t)p(t-1)\Delta y(t-1)-\sum_{t=1}^{T}y(t)p(t)\Delta y(t)+\sum_{t=1}^{T}q(t)(y(t))^2-$$

$$\frac{1}{\delta}\{-ab(y(0))^2-cd[p(0)\Delta y(0)]^2+(ad+bc)p(0)\Delta y(0)y(0)\}=$$

$$\sum_{t=0}^{T-1}y(t+1)p(t)\Delta y(t)-\sum_{t=1}^{T}y(t)p(t)\Delta y(t)+\sum_{t=1}^{T}q(t)(y(t))^2-$$

$$\frac{1}{\delta}\{-ab(y(0))^2-cd[p(0)\Delta y(0)]^2+(ad+bc)p(0)\Delta y(0)y(0)\}=$$

$$\sum_{t=0}^{T}p(t)(\Delta y(t))^2+\sum_{t=1}^{T}q(t)(y(t))^2+p(0))\Delta y(0)y(0)-p(T))\Delta y(T)y(T+1)-$$
$$\frac{1}{\delta}\{-ab(y(0))^2-cd[p(0)\Delta y(0)]^2+(ad+bc)p(0)\Delta y(0)y(0)\}=$$
$$\sum_{t=0}^{T}p(t)(\Delta y(t))^2+\sum_{t=1}^{T}q(t)(y(t))^2+\frac{1}{\delta}\{ab(y(0))^2+cd[p(0)\Delta y(0)]^2-2bcp(0)\Delta y(0)y(0)\}=$$
$$\sum_{t=0}^{T}p(t)(\Delta y(t))^2+\sum_{t=1}^{T}q(t)(y(t))^2+\frac{1}{\delta}(Mf,f),$$

这里 $f=(y(0),p(0)\Delta y(0))^T$，于是由(A1)及(A3)可知算子 A 正定.

3 主要结果

引理 3.1 多项式 $y(t-1,\lambda)$ 与 $y(t,\lambda)$，$t=1,\cdots,T+1$ 无相同零点.

证明 反设 $\lambda=\lambda_0$ 是 $y(t-1,\lambda)$ 与 $y(t,\lambda)$ 的零点. 则由(4)式可得 $y(t-2,\lambda_0)=0$. 进一步可得 $y(t-3,\lambda_0)=\cdots=y(1,\lambda_0)=y(0,\lambda_0)=0$. 这与 $y(1,\lambda_0)\neq y(0,\lambda_0)=0$ 矛盾.

引理 3.2 设 $\lambda=\lambda_0$ 是 $y(t,\lambda)=0$ 的零点，则 $y(t-1,\lambda_0)y(t+1,\lambda_0)<0$.

证明 由于 $y(t,\lambda_0)=0$，由引理 3.1 可知 $y(t-1,\lambda_0)\neq 0$. 于是由(4)式可知

$$y(t+1,\lambda_0)=-\frac{p(t-1)}{p(t)}y(t-1,\lambda_0).$$

因此

$$y(t-1,\lambda_0)y(t+1,\lambda_0)=-\frac{p(t-1)}{p(t)}y^2(t-1,\lambda_0)<0.$$

由(7)式可知，$y(T+1,\lambda)$ 的最高次项为

$$(-1)^m\frac{|r(T)r(T-1)\cdots r(1)|}{p(T)p(T-1)\cdots p(1)}\cdot(a+p(0)c)\lambda^{T+1}.$$

因此当 λ 足够大时，$y(t,\lambda)$ 的符号取决于 $a+p(0)c$ 的符号. 若 $a+p(0)c>0$，则

$$\operatorname{sgn}y(T+1,\lambda)=(-1)^{T-m+1},\lambda\to-\infty;$$

若 $a+p(0)c<0$，则

$$\operatorname{sgn}y(T+1,\lambda)=(-1)^{T-m},\lambda\to-\infty.$$

记 $\lambda_{i,k}^D$ 为 $y(i,\lambda)=0$，$i=0,1,\cdots,T+1$ 的根. 则这些根是方程

$$-\nabla(p(t)\Delta y(t))+q(t)y(t)=\lambda r(t)y(t),\quad t\in[1,i-1]_{\mathbf{Z}}$$

和方程(1)以及 $y(i)=0$ 组成问题的特征值. 特别地

$$\lambda_{0,0}^D=-\frac{d}{c},\ \lambda_{1,0}^D=-\frac{b+p(0)d}{a+p(0)c}.$$

则

$$\lambda_{1,0}^D-\lambda_{0,0}^D=\frac{d}{c}-\frac{b+p(0)d}{a+p(0)c}=\frac{ad-bc}{ac+p(0)c^2}=\frac{\delta}{ac+p(0)c^2}.$$

由(A3)知 $ac>0$. 于是 $\lambda_{0,0}^D$ 与 $\lambda_{1,0}^D$ 的位置关系依赖 δ 的符号，即若 $\delta>0$，则 $\lambda_{0,0}^D<\lambda_{1,0}^D$；若 $\delta<0$，则 $\lambda_{1,0}^D<\lambda_{0,0}^D$. 由于

$$y(1,\lambda_{1,0}^D)=-\frac{d(a+p(0)c)}{c}+(b+p(0)d)=-\frac{\delta}{c},$$

所以不失一般性接下来我们总假定

(A4) $\delta<0$，$c<0$.

由(A3)和(A4)可知，$a<0$，$b>0$，$d>0$. 于是 $0<\lambda_{1,0}^D<\lambda_{0,0}^D$.

引理 3.3 多项式 $y(i,\lambda)=0$ 与 $y(i+1,\lambda)=0$，$i=1,\cdots,T$ 的根满足如下交错性质：

(i) $(\lambda_{i,-1}^D,\lambda_{i,+1}^D)\supset(\lambda_{i+1,-1}^D,\lambda_{i+1,+1}^D)$，$i=1,\cdots,T$；

(ii) $y(i,\lambda)=0$ 与 $y(i+1,\lambda)=0$，$i=1,\cdots,T$ 的正(负)根互相分离.

证明 我们先证 $i=1$ 的情形，即证 $y(1,\lambda)=0$ 与 $y(2,\lambda)=0$ 根的交错性. 由 $\lambda_{1,0}^D<\lambda_{0,0}^D$ 可知 $y(0,\lambda_{1,0}^D)>0$. 于是由引理 3.2 知 $y(2,\lambda_{1,0}^D)<0$. 又由(4)式可知

$$y(2,\lambda)=\left[1+\frac{p(0)}{p(1)}+\frac{q(1)}{p(1)}-\frac{\lambda r(1)}{p(1)}\right],$$
$$y(1,\lambda)-\frac{p(0)}{p(1)}y(0,\lambda).$$

所以当 $r(1)>0$ 时，若 $\lambda\to-\infty$ 则 $y(2,\lambda)\to+\infty$；若 $\lambda\to+\infty$ 则 $y(2,\lambda)\to+\infty$. 于是 $y(2,\lambda)=0$ 有两个正根 $\lambda_{2,+1}^D$，$\lambda_{2,+2}^D$ 且满足 $0<\lambda_{2,+1}^D<\lambda_{1,0}^D<\lambda_{2,+2}^D$. 当 $r(1)<0$ 时，若 $\lambda\to-\infty$ 则 $y(2,\lambda)\to-\infty$；若 $\lambda\to+\infty$ 则 $y(2,\lambda)\to-\infty$. 于是 $y(2,\lambda)=0$ 有一个负根 $\lambda_{2,-1}^D$，一个正根 $\lambda_{2,+1}^D$ 且满足 $\lambda_{2,-1}^D<0<\lambda_{2,+1}^D<\lambda_{1,0}^D$. 因此，$y(1,\lambda)=0$ 与 $y(2,\lambda)=0$ 分别有 1 个，2 个单根且正(负)根互相分离.

不妨假设 $i=k-1$ 时结论成立，即 $y(k-1,\lambda)=$

0 与 $y(k,\lambda)=0$ 分别有 $k-1$ 个、k 个单根且正(负)根也有交错性. 为简单起见令

$$M_i^{+}=\{t\in[1,\ i-1]_Z\mid r(t)>0\},$$

$$M_i^{-}=\{t\in[1,\ i-1]_Z\mid r(t)<0\},$$

m_i 为 M_i^{+} 的个数. 则 M_i^{-} 的个数为 $i-1-m_i$. 特别地，若 $i=T+1$，则由(A2)可知 $m_i=m$. 设 $r(t)$ 在 $[1,k-2]_{\mathbf{Z}}$ 上有 m_{k-2} 个为正以及 $k-2-m_{k-2}$ 个为负，则由 $\lambda_{0,0}^{D}>0$ 知 $y(k-1,\lambda)=0$ 有 $k-1$ 个单根满足 $\lambda_{k-1,-(k-2-m_{k-2})}^{D}<\cdots<\lambda_{k-1,-1}^{D}<0<\lambda_{k-1,+1}^{D}<\cdots<\lambda_{k-1,+(m_{k-2}+1)}^{D}$. 不妨设 $r(k-1)>0$. 则可设 $\lambda_{k-1,-(k-2-m_{k-2})}^{D}<\lambda_{k,-(k-2-m_{k-2})}^{D}<\cdots<\lambda_{k-1,-1}^{D}<\lambda_{k,-1}^{D}<0$, $0<\lambda_{k-1,+1}^{D}<\lambda_{k,+1}^{D}<\cdots<\lambda_{k-1,+(m_{k-2}+1)}^{D}<\lambda_{k,+(m_{k-2}+2)}^{D}$.

接下来考虑 $y(k,\lambda)=0$ 与 $y(k+1,\lambda)=0$ 的根的交错性. 不妨设 $r(k)>0$，则 $r(t)$ 在 $[1,k]_{\mathbf{Z}}$ 上有 $m_{k-2}+2$ 个为正以及 $k-2-m_{k-2}$ 个为负. 由(4)式可知 $\operatorname{sgn}y(k+1,-\infty)=-\operatorname{sgn}y(k,-\infty)$, $\operatorname{sgn}y(k+1,+\infty)=-\operatorname{sgn}y(k,+\infty)$, 以及 $y(k+1,0)>y(k,0)>0$，且由引理 3.2 可知

$$\operatorname{sgn}y(k+1,\lambda_{k,+u}^{D})=-\operatorname{sgn}y(k-1,\lambda_{k,+u}^{D}),\quad u=1,2,\cdots,m_{k-2}+2,$$

$$\operatorname{sgn}y(k+1,\lambda_{k,+v}^{D})=-\operatorname{sgn}y(k-1,\lambda_{k,+v}^{D}),\quad v=1,2,\cdots,k-2-m_{k-2}.$$

所以在这 $k+1$ 个区间 $(\lambda_{k,-(k-2-m_{k-2})}^{D},\lambda_{k,-(k-3-m_{k-2})}^{D})$, $\cdots$, $(\lambda_{k,-1}^{D},0)$, $(0,\lambda_{k,+1}^{D})$, $(\lambda_{k,+1}^{D},\lambda_{k,+2}^{D})$, $\cdots$, $(\lambda_{k,+(m_{k-2}+2)}^{D},+\infty)$ 内各有 $y(k+1,\lambda)=0$ 的一个根. 另一方面，$y(k+1,\lambda)=0$ 至多有 $k+1$ 个根. 于是在这 $k+1$ 个区间内 $y(k+1,\lambda)=0$ 只有一个根. 因此 $y(k,\lambda)=0$ 与 $y(k+1,\lambda)=0$ 的正(负)根互相分离. 综上可知，$y(i,\lambda)=0$ 与 $y(i+1,\lambda)=0$, $i=1,\cdots,T$ 的正(负)根互相分离. 证毕.

推论 3.4 由引理 3.3 可知，问题(1),(3)恰有 $T+1$ 个特征值且满足

$$\lambda_{T+1,-(T-m)}^{D}<\lambda_{T+1,-(T-m-1)}^{D}<\cdots<\lambda_{T+1,-1}^{D}<0<\lambda_{T+1,+1}^{D}<\lambda_{T+1,+2}^{D}<\cdots<\lambda_{T+1,+(m+1)}^{D}.$$

接下来我们讨论特征函数的振荡性. 由(A3)和(A4)可知 $0<\lambda_{1,0}^{D}<\lambda_{0,0}^{D}$. 由于 $\lambda_{0,0}^{D}$ 的位置在以下的讨论中起着重要的作用，不失一般性我们假设存在一个非负常数 L：$+1\leqslant L\leqslant m+2$ 使得

$$\lambda_{L-1}^{D}<\lambda_{0,0}^{D}\leqslant\lambda_{L}^{D}.$$

引理 3.5 假设(A1)～(A4)成立，则

(i) 若 $\lambda\in(\lambda_{k-1}^{D},\lambda_{k}^{D}]$, $k\in[+1,L-1]_{\mathbf{Z}}$ 或 $\lambda\in(\lambda_{L-1}^{D},\lambda_{0,0}^{D}]$，则问题(1),(3)的解 $y(t,\lambda)$ 在 $[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$ 上变号 k 次；

(ii) 若 $\lambda\in(\lambda_{0,0}^{D},\lambda_{L}^{D})$ 或 $\lambda\in(\lambda_{k-1}^{D},\lambda_{k}^{D}]$, $k\in[L+1,\ +m+2]_{\mathbf{Z}}$，则问题(1),(3)的解 $y(t,\lambda)$ 在 $[0,T+1]_{\mathbf{Z}}$ 上变号 $k-1$ 次；

(iii) 设 $\lambda\in[\lambda_{k}^{D},\ _{k-1}^{D})$, $k\in[-(T-m+1),-1]_{\mathbf{Z}}$，则问题(1),(3)的解 $y(t,\lambda)$ 在 $[0,T+1]_Z$ 上变号 $-k-1$ 次.

证明 由引理 3.3 及文献[10]引理 2.6 中类似的方法可知，当 $\lambda\in(\lambda_{k-1}^{D},\lambda_{k}^{D}]$, $k\in[+1,m+2]_{\mathbf{Z}}$ 时，序列

$$\{y(1,\lambda),\ \cdots,\ y(T,\lambda),y(T+1,\lambda)\}\tag{5}$$

变号 $k-1$ 次. 接下来讨论如下序列的变号次数

$$\{y(0,\lambda),y(1,\lambda),\cdots,y(T,\lambda),y(T+1,\lambda)\}\tag{6}$$

首先，由于 $\lambda_{1,0}^{D}<\lambda_{0,0}^{D}$，则当 $\lambda\in(-\infty,\lambda_{1,0}^{D})$ 时，$y(0,\lambda)$, $y(1,\lambda)$ 均为正. 因此当 $\lambda\in(\lambda_{L-1}^{D},\lambda_{1,0}^{D}]$ 或 $\lambda\in(\lambda_{k-1}^{D},\lambda_{k}^{D}]$, $k\in[+1,L-1]_{\mathbf{Z}}$ 时，序列(6)变号 $k-1$ 次. 其次，因为当 $\lambda\in(\lambda_{1,0}^{D},\lambda_{0,0}^{D}]$ 时，$y(0,\lambda)>0$, $y(1,\lambda)<0$，则序列(6)变号 k 次. 最后，由于当 $\lambda\in(\lambda_{0,0}^{D}+\infty)$ 时，$y(0,\lambda)$, $y(1,\lambda)$ 均为负. 因此，若 $\lambda\in(\lambda_{0,0}^{D},\ \lambda_{L}^{D})$ 或 $\lambda\in(\lambda_{k-1}^{D},\ \lambda_{k}^{D}]$, $k\in[L+1,+m+2]_{\mathbf{Z}}$，则序列(6)变号 $k-1$ 次. 于是(i),(ii)得证.

因为当 $\lambda\in[\lambda_{k}^{D},\lambda_{k-1}^{D})$, $k\in[-(T-m+1),-1]_{\mathbf{Z}}$ 时，$y(0,\lambda)$ 始终为正，所以序列(5)与序列(6)变号次数一致，都是 $k-1$ 次. 因此(iii)成立.

由推论 3.4 及引理 3.5 可得问题(1)～(2)的特征值 $\lambda_{T+1,k}^{D}$, $k\in[+1,+(m+1)]_{\mathbf{Z}}\cup[-(T-m+1),-1]_{\mathbf{Z}}$.

定理 3.6 假设(A1)～(A4)成立，则

(i) 若 $0<\lambda_{T+1,k}^{D}\leqslant\lambda_{0,0}^{D}$，则 $y_k(t)$ 在 $[0,T+1]_Z$ 上变号 k 次；

(ii) 若 $\lambda_{T+1,k}^{D}>\lambda_{0,0}^{D}$，则 $y_k(t)$ 在 $[0,T+1]_Z$ 上变号 $k-1$ 次；

(iii) 若 $\lambda_{T+1,k}^{D}<0$，则 $y_k(t)$ 在 $[0,T+1]_Z$ 上变号 $k-1$ 次.

例 3.7 考虑如下离散左定 S-L 问题：

$$\begin{cases}-\nabla(p(t)\Delta y(t))=\lambda r(t)y(t),\ t\in[1,3]_{\mathbf{Z}}\\(-3\lambda+2)y(0)=(-\lambda+1)\Delta y(0),\ y(4)=0\end{cases}$$

其中，$|r(t)=16|$, $r(1)>0$, $r(2)>0$, $r(3)<0$. 则

$$y(0,\lambda)=-\lambda+1,$$

$$y(1,\lambda)=-4\lambda+3,$$

$$y(2,\lambda)=(2-r(1)\lambda)y(1,\lambda)-y(0,\lambda),$$

$$y(3,\lambda)=(2-r(2)\lambda)y(2,\lambda)-y(1,\lambda),$$
$$y(4,\lambda)=(2-r(3)\lambda)y(3,\lambda)-y(2,\lambda),$$

由 Matlab 7.0 软件计算可得，

$\lambda_{2,+1}^{D}=0.1033$，$\lambda_{2,+2}^{D}=0.7560$，$\lambda_{3,+1}^{D}=0.05100$，$\lambda_{3,+2}^{D}=0.1773$，$\lambda_{3,+3}^{D}=0.7561$，$\lambda_{4,-1}^{D}=-0.04844$，$\lambda_{4,+1}^{D}=0.04009$，$\lambda_{4,+2}^{D}=0.1699$，$\lambda_{4,+3}=0.7561$.

于是 $0<\lambda_{3,+1}^{D}<\lambda_{2,+1}^{D}<\lambda_{3,+2}^{D}<\lambda_{2,+2}^{D}<\lambda_{3,+3}^{D}$，$\lambda_{4,-1}^{D}<0<\lambda_{4,+1}^{D}<\lambda_{3,+1}^{D}<\lambda_{4,+2}^{D}<\lambda_{3,+2}^{D}<\lambda_{4,+3}^{D}<\lambda_{3,+3}^{D}$，即

$$(\lambda_{3,-1}^{D},\lambda_{3,+1}^{D})\subset(\lambda_{2,-1}^{D},\lambda_{2,+1}^{D}),$$
$$(\lambda_{4,-1}^{D},\lambda_{4,+1}^{D})\subset(\lambda_{3,-1}^{D},\lambda_{3,+1}^{D}).$$

这与引理 3.3 的结论一致且问题共有 4 个特征值，其中有 1 个负特征值，3 个正特征值. 接下来我们来验证振荡性.

$$\{y(0,\lambda_{4,-1}^{D}),\ y(1,\lambda_{4,-1}^{D}),\ y(2,\lambda_{4,-1}^{D}),\ y(3,\lambda_{4,-1}^{D}),\ y(4,\lambda_{4,-1}^{D})\}=\{0.1067,\ 3.4267,\ 11.5957,\ 39.5568,\ 0\},$$
$$\{y(0,\lambda_{4,+1}^{D}),\ y(1,\lambda_{4,+1}^{D}),\ y(2,\lambda_{4,+1}^{D}),\ y(3,\lambda_{4,+1}^{D}),\ y(4,\lambda_{4,+1}^{D})\}=\{0.9599,\ 2.8396,\ 2.8978,\ 1.0970,\ 0\},$$
$$\{y(0,\lambda_{4,+2}^{D}),\ y(1,\lambda_{4,+2}^{D}),\ y(2,\lambda_{4,+2}^{D}),\ y(3,\lambda_{4,+2}^{D}),\ y(4,\lambda_{4,+2}^{D})\}=\{0.8301,\ 2.3205,\ -2.4958,\ -0.5290,\ 0\},$$
$$\{y(0,\lambda_{4,+3}^{D}),\ y(1,\lambda_{4,+3}^{D}),\ y(2,\lambda_{4,+3}^{D}),\ y(3,\lambda_{4,+3}^{D}),\ y(4,\lambda_{4,+3}^{D})\}=\{0.2439,\ -0.02439,\ 0.002399,\ 0.0001702,\ 0\}.$$

从而可知问题的解 $y(t,\lambda)$，$t=0, 1, 2, 3, 4$ 变号 $k-1$ 次. 这与定理 3.6 的结论一致.

参考文献：

[1] Fulton C T, Pruess S. Numerical methods for a singular eigenvalue problem with eigenparameter in the boundary conditions [J]. J Math Anal Appl, 1979, 71: 431.

[2] Binding P A, Browne P J. Left-definite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions [J]. Differ Integral Equ, 1999, 12: 167.

[3] Kapustin N Y. On the uniform convergence of the Fourier series for a spectral problem with squared spectral parameter in the boundary condition [J]. Differ Equat, 2010, 46: 1507.

[4] Aliyev Z S. Basis properties in L_p of systems of root functions of a spectral problem with spectral parameter in a boundary condition [J]. Differ Equat, 2011, 47: 766.

[5] Atkinson F V. Discrete and continuous boundary problems [M]. New York: Academic Press, 1964.

[6] Sun H Q, Shi Y M. Eigenvalues of second-order difference equations with coupled boundary conditions [J]. Linear Algebra Appl, 2006, 414: 361.

[7] Gao C H, Ma R Y. Eigenvalues of discrete Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions [J]. Linear Algebra Appl, 2016, 503: 100.

[8] Wang Y, Shi Y M. Eigenvalues of second-order difference equations with periodic and antiperiodic boundary conditions [J]. J Math Anal Appl, 2005, 309: 56.

[9] Harmsen B J, Li A H. Discrete Sturm-Liouville problems with parameter in the boundary conditions [J]. J Differ Equ Appl, 2002, 8: 969.

[10] Gao C H, Ma R Y, Zhang F. Spectrum of discrete left definite Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions [J]. Linear Multilinear A, 2017, 65: 1905.

引用本文格式：

中 文：王雅丽，高承华. 一类二阶离散左定 Sturm-Liouville 问题的谱 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：642.

英 文：Wang Y L, Gao C H. Spectra of second order discrete left-definite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 642.