doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.05.006

加权 Bergman 空间到 Bloch-Orlicz 空间上的乘积型算子

陈　志，江治杰
（四川轻化工大学数学与统计学院，自贡 643000）

摘　要：设 $D=\{z\in \mathbf{C}:|z|<1\}$是复平面 $\mathbf{C}$ 中的开单位圆盘,$H(D)$是 D 上的解析函数集合.设 φ 是 D 到自身的解析映射,$u\in H(D)$. 本文通过在加权 Bergman 空间中构造合适的测试函数,利用符号函数 u 和 φ 刻画了加权 Bergman 空间到 Bloch-Orlicz 空间上的乘积型算子 $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi$,$\mathbf{R}^n C_\varphi M_u$,$C_\varphi \mathbf{R}^n M_u$,$M_u \mathbf{R}^n C_\varphi$,$M_u C_\varphi \mathbf{R}^n$,$C_\varphi M_u \mathbf{R}^n$ 的有界性和紧致性.

关键词：加权 Bergman 空间；Bloch-Orlicz 空间；乘积型算子；有界性；紧致性
中图分类号：O177.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)05-0857-08

Product-type operators from weighted Bergman spaces to Bloch-Orlicz spaces

CHEN Zhi, *JIANG Zhi-Jie*
(School of Mathematics and Statistics, Sichuan University of Science and Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Let D be the open unit disk in the complex plane $\mathbf{C}$ and $H(D)$ the class of all analytic functions on D. Let φ be an analytic self-map of D and $u\in H(D)$. By constructing some suitable test functions in weighted Bergman space, the boundedness and compactness of the product-type operators $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi$, $\mathbf{R}^n C_\varphi M_u$, $C_\varphi \mathbf{R}^n M_u$, $M_u \mathbf{R}^n C_\varphi$, $M_u C_\varphi \mathbf{R}^n$ and $C_\varphi M_u \mathbf{R}^n$ from weighted Bergman space to Bloch-Orlicz space are characterized in terms of the symbol functions u and φ in this paper.

Keywords: Weighted Bergman space; Bloch-Orlicz space; Product-type operator; Boundedness; Compactness
(2010 MSC 47B38 47G10)

1　引　言

设 $D=\{z\in \mathbf{C}:|z|<1\}$是复平面 $\mathbf{C}$ 中的开单位圆盘,$H(D)$是 D 上的解析函数集合.设 φ 是 D 到自身的解析映射,$u\in H(D)$,则由 φ 和 u 诱导的加权复合算子 $W_{\varphi,u}$定义为

$$W_{\varphi,u}f(z)=u(z)f(\varphi(z)),\ z\in D,\ f\in H(D).$$

如果 $u\equiv 1$,那么 $W_{\varphi,u}$变为复合算子,通常记为 C_φ.如果 $\varphi(z)=z$,那么 $W_{\varphi,u}$为解析乘法算子,通常记为 M_u. 显然,$W_{\varphi,u}=M_u C_\varphi$,从而加权复合算子是乘积算子. 对于加权复合算子 $W_{\varphi,u}$,人们常考虑的问题是如何通过 φ 和 u 的函数性质来刻画其有界性或者紧致性[1-8].

设 $n\in \mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$. 众所周知,$n$ 阶微分算子定义为

$$\mathbf{R}^n f(z)=f^{(n)}(z),\ z\in D,\ f\in H(D),$$

其中 $f^{(0)}=f$. 当 $n=1$ 时,我们得到微分算子 $\mathbf{R}$. 文献[9]最先对乘积算子 $\mathbf{R}C_\varphi$ 和 $C_\varphi\mathbf{R}$ 进行了研

收稿日期：2019-06-21
基金项目：四川省科技厅应用基础研究项目(2018JY0200)；四川省教育厅重点项目(18ZA0339)；桥梁无损检测四川省高校重点实验室项目(2016QZJ01)
作者简介：陈志(1995－)，男，四川安岳人，硕士研究生，主要研究方向为泛函分析.
通讯作者：江治杰. E-mail：matjzj@126.com

究.此后人们又对它们进行了系统研究[10-13].目前,多种类型的乘积算子已引起了人们的广泛研究兴趣[14-23].

由乘法算子、复合算子和 n 阶微分算子可以定义如下六个乘积算子

$$\mathbf{R}^n M_u C_\varphi, \mathbf{R}^n C_\varphi M_u, C_\varphi \mathbf{R}^n M_u, M_u \mathbf{R}^n C_\varphi, M_u C_\varphi \mathbf{R}^n, C_\varphi M_u \mathbf{R}^n \quad (1)$$

当 $n=1$ 时,Sharma[24] 刻画了从 Bergman 空间到 Bloch 空间上这六个乘积算子的有界性和紧致性;Stević等[25]通过引进一个新算子统一刻画了加权 Bergman 空间上这六个乘积算子的有界性和紧致性,并计算了本性范数[26].本文旨在研究加权 Bergman 空间到 Bloch-Orlicz 空间上乘积型算子(1)的有界性和紧致性.

设 $\mathrm{d}A(z)=\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是 D 上的标准化 Lebesgue 测度.设 $\alpha>-1$, $p\geqslant1$, $\mathrm{d}A_\alpha(z)=(\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{d}A(z)$是 D 上的加权 Lebesgue 测度.则加权 Bergman 空间 A_α^p 是由满足下列条件的解析函数构成的集合

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p=\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}A_\alpha(z)<\infty.$$

在范数 $\|\cdot\|_{A_\alpha^p}$ 下,A_α^p 是 Banach 空间.关于加权 Bergman 空间的若干结果可参见文献[27-28].

设 Ψ 是$[0,+\infty)$上的严格单调递增凸函数,且满足 $\Psi(0)=0$.我们称 f 属于 Bloch-Orlicz 空间 B^Ψ,如果存在某个依赖于 f 的正数λ,使得

$$\sup_{z\in D}(1-|z|^2)\ \Psi(\lambda|f'(z)|)<\infty.$$

该定义由 Ramos Fernández 在文献[5]中引入,其还证明了 B^Ψ 等距于 μ_Ψ-Bloch 空间,其中

$$\mu_\Psi(z)=\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)},\ z\in D.$$

因此,在范数

$$\|f\|_{B^\Psi}=|f(0)|+\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|f'(z)|$$

下,B^Ψ 是 Banach 空间.值得注意的是,B^Ψ 推广了其它一些解析函数空间.例如,如果 $\Psi(t)=t^p$ ($p>0$),B^Ψ 是加权 Bloch 空间 B^α,其中 $\alpha=1/p$;如果 $\Psi(t)=t\log(1+t)$,B^Ψ 则是 Log-Bloch 空间[29].

设 X 和 Y 是 Banach 空间.称线性算子 L:$X\to Y$ 是有界的,如果存在正数 K,使得

$$\|Lf\|_Y\leqslant K\ \|f\|_X,\quad f\in X.$$

进一步,称算子 L:$X\to Y$ 是紧致的,如果 L 把 X 中的有界集映射为 Y 中的相对紧致集.

文中我们约定

$$\mu_\Psi(z)=\frac{1}{\Psi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)},\quad z\in D.$$

字母 C 代表正常数,且在不同情形下可以不同.记号 $a\prec b$ 表示存在正常数 C,使得 $a\leqslant Cb$.

2 主要引理

下面的引理刻画乘积型算子的紧致性,证明参见文献[30,命题 3.11].

引理 2.1 设 T 是式(1)中的算子.则有界算子 T:$A_\alpha^p\to B^\Psi$ 是紧致的当且仅当对 A_α^p 中有界且在 D 上内闭一致收敛到零的序列$\{f_j\}$,都有

$$\lim_{j\to\infty}\|Tf_j\|_{B^\Psi}=0.$$

下面的结果给出了加权 Bergman 空间 A_α^p 中函数值增长估计,证明见文献[14,引理 2.5].

引理 2.2 设 $\alpha>-1$, $p\geqslant1$, $k\in\mathbf{N}_0$.则存在正常数 $C_k=C(\alpha,p,k)$,使得对任意的 $f\in A_\alpha^p$ 以及 $z\in D$,都有

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{C_k\ \|f\|_{A_\alpha^p}}{(1-|z|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}.$$

为了在加权 Bergman 空间中构造测试函数,对任意取定的 $w\in D$, $i\in\mathbf{N}_0$,令

$$k_{w,i}(z)=\frac{(1-|w|^2)^{i+\frac{\alpha+2}{p}}}{(1-\bar{w}z)^{i+\frac{2\alpha+4}{p}}},\ z\in D.$$

由文献[14]知 $k_{w,i}\in A_\alpha^p$,以及

$$\sup_{w\in D}\|k_{w,i}\|_{A_\alpha^p}\prec1 \quad (2)$$

在下面的结果中,通过 $k_{w,i}$ 的线性组合,我们得到了需要的测试函数.

引理 2.3 设 $w\in D$, $n\in\mathbf{N}$.则对每一个固定的 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$都存在常数 $a_{0,k}, a_{1,k},\cdots, a_{n+1,k}$,使得函数

$$f_{w,k}(z)=\sum_{i=0}^{n+1}a_{i,k}k_{w,i}(z)$$

满足

$$f_{w,k}^{(k)}(w)=\frac{\bar{w}^k}{(1-|w|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}},\ f_{w,k}^{(j)}(w)=0 \quad (3)$$

其中 $j\in\{0,1,\cdots,n+1\}\backslash\{k\}$,且

$$\sup_{w\in D}\|f_{w,k}\|_{A_\alpha^p}\prec1 \quad (4)$$

证明 记 $a=(2\alpha+4)/p$.我们首先证明该引理对 $k=0$ 成立.此时系统(3)等价于

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n+1} a_{i,k} = 1, \\ \sum_{i=0}^{n+1} (a+i)a_{i,k} = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ \sum_{i=0}^{n+1}\prod_{j=0}^{k-1}(a+i+j)a_{i,k} = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ \sum_{i=0}^{n+1}\prod_{j=0}^{n}(a+i+j)a_{i,k} = 0\end{cases} \tag{5}$$

于是，只需要证明：存在常数 $a_{0,0}, a_{1,0}, \cdots, a_{n+1,0}$，使得线性方程组(5)成立．由文献[29]中的引理 3 知，线性方程组(5)的行列式等于$\prod_{j=1}^{n+1} j! \neq 0$．因而存在常数 $a_{0,0}, a_{1,0}, \cdots, a_{n+1,0}$ 使得线性方程组成立．

其次，我们证明该引理对 $k \neq 0$ 的情形也成立．此时，系统 3 等价于

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n+1} a_{i,k} = 0, \\ \sum_{i=0}^{n+1} (a+i)a_{i,k} = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ \sum_{i=0}^{n+1}\prod_{j=0}^{k-1}(a+i+j)a_{i,k} = 1, \\ \quad \cdots\cdots \\ \sum_{i=0}^{n+1}\prod_{j=0}^{n}(a+i+j)a_{i,k} = 0\end{cases} \tag{6}$$

于是，只需要证明：存在常数 $a_{0,k}, a_{1,k}, \cdots, a_{n+1,k}$，使得线性方程组 6 成立．由文献[29]中的引理 3 知，方程组 6 的行列式等于$(-1)^{k-1}\prod_{j=1}^{n+1} j! \neq 0$．因此，存在常数 $a_{0,k}, a_{1,k}, \cdots, a_{n+1,k}$，使得线性方程组成立．根据式 2，显然有$\sup_{w\in D}\|f_{w,k}\|_{A^p_\alpha} < 1$.

注 1　不难看到，当$|w|\to 1$ 时，$\{f_{w,k}\}$在D 的每个紧致子集上一致收敛到零.

Stević在文献[31]中应用了如下形式的 Faà di Bruno 公式

$$(f\circ\varphi)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\varphi(z))B_{n,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+1)}(z)) \tag{7}$$

其中 $B_{n,k}(x_1,\cdots,x_{n-k+1})$是 Bell 多项式．由(7)式和莱布尼兹公式，我们得到下面的结果.

引理 2.4　设 $f, u\in H(D)$，φ 是 D 上的解析自映射，则

$$(u(z)f(\varphi(z)))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(\varphi(z))\sum_{j=k}^{n+1} C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z)).$$

3　乘积型算子的有界性

首先，我们刻画乘积型算子 $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi : A^p_\alpha \to \mathrm{B}^\Psi$ 的有界性.

定理 3.1　设 $\alpha > -1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射．下列陈述等价：

(i) $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi : A^p_\alpha \to \mathrm{B}^\Psi$ 是有界算子；

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$，函数 u，φ 满足下列条件：

$$I_k := \sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=k}^{n+1} C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}} < \infty.$$

证明　(i)⇒(ii)．令 $h_0(z)\equiv 1\in A^p_\alpha$．则

$$L_0 := \sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|u^{n+1}(z)| = \sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\cdot\left|\sum_{j=0}^{n+1} C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,0}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j+1)}(z))\right| \leqslant C\|\mathbf{R}^n M_u C_\varphi\| \tag{8}$$

对每个 $k=1,2,\cdots,n+1$，令 $h_k(z)=z^k\in A^p_\alpha$．对每个 $l\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，假设已经证明了不等式

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=l}^{n+1} C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,l}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-l+1)}(z))\right| \leqslant C\|\mathbf{R}^n M_u C_\varphi\| \tag{9}$$

由引理 2.4，注意到当 $s>k$ 时 $h_k^{(s)}(z)\equiv 0$，我们有

$$(\mathbf{R}^n M_u C_\varphi h_k)'(z) = \sum_{j=0}^{k} h_k^{(j)}(\varphi(z))\sum_{i=j}^{n+1} C^i_{n+1}u^{(n+1-i)}(z)B_{i,j}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(i-j+1)}(z)) = \sum_{j=0}^{k} k\cdot\cdots\cdot(k-j+1)(\varphi(z))^{k-j}\sum_{i=j}^{n+1} C^i_{n+1}u^{(n+1-i)}(z)B_{i,j}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(i-j+1)}(z)) \tag{10}$$

由式(10)，三角不等式及 $\varphi(z)$的有界性，再注意到

$$\sum_{j=k}^{n+1} C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))$$

的系数是独立于 z 的，我们得到

$$L_k := \sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|(u(z)\varphi^k(z))^{(n+1)}| = \sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=k}^{n+1} C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right| \leqslant C\|\mathbf{R}^n M_u C_\varphi\| \tag{11}$$

由数学归纳法,对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$,(11)式成立.

令 $w\in D$, $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$. 由引理 2.3 知,存在常数 $a_{0,k}, a_{1,k},\cdots,a_{n+1,k}$,使得函数

$$f_{\varphi(w),k}(z)=\sum_{i=0}^{n+1}a_{i,k}k_{\varphi(w),i}(z)$$

满足

$$f^{(k)}_{\varphi(w),k}(\varphi(w))=\frac{\overline{\varphi(w)}^k}{(1-|\varphi(w)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}},$$

$$f^{(j)}_{\varphi(w),k}(\varphi(w))=0 \tag{12}$$

其中 $j\in\{0,1,\cdots,n+1\}\backslash\{k\}$,且

$$\sup_{w\in D}\|f_{\varphi(w),k}\|_{A^p_\alpha}\leqslant C \tag{13}$$

于是,由(12)式,(13)式及 $\mathbf{R}^nM_uC_\varphi:A^p_\alpha\to\mathrm{B}^\Psi$ 的有界性有

$$I_k(w):=\frac{\mu_\Psi(w)\ |\varphi(w)|^k\left|\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(w)B_{j,k}(\varphi'(w),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(w))\right|}{(1-|\varphi(w)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}\leqslant$$

$$\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f_{\varphi(w),k}\|_{\mathrm{B}^\Psi}\leqslant C\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi\| \tag{14}$$

从而 $\sup_{z\in D}I_k(z)\leqslant C\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi\|$. 因此,

$$\sup_{|\varphi(z)|>1/2}\frac{\mu_\Psi(w)\left|\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}\leqslant C\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi\| \tag{15}$$

另一方面,由(11)式可得

$$\sup_{|\varphi(z)|\leqslant1/2}\frac{\mu_\Psi(w)\left|\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}\leqslant CL_k\leqslant C\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi\| \tag{16}$$

故对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$,由(15)和(16)式可得 $I_k<\infty$.

(ii)⇒(i). 对任意的 $f\in A^p_\alpha$,由引理 2.2 和引理 2.4 有

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|(\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f)'(z)|=\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\left|\sum_{k=0}^{n+1}f^{(k)}(\varphi(z))\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)\right.$$

$$\left.B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|=\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\sum_{k=0}^{n+1}|f^{(k)}(\varphi(z))|\left|\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)\right.$$

$$\left.B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n+1}C_kI_k\|f\|_{A^p_\alpha} \tag{17}$$

显然,

$$|(\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f)(0)|\leqslant C\|f\|_{A^p_\alpha} \tag{18}$$

因此,由(17)和(18)式可得 $\mathbf{R}^nM_uC_\varphi:A^p_\alpha\to B^\Psi$ 是有界的.

由 $\mathbf{R}^nC_\varphi M_u=\mathbf{R}^nM_{u\circ\varphi}C_\varphi$,利用定理 3.1 和 Faà di Bruno 公式(7)可得到

推论 3.2 设 $\alpha>-1$, $p\geqslant1$, $u\in H(D)$, φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价:

(i) $\mathbf{R}^nC_\varphi M_u:A^p_\alpha\to\mathrm{B}^\Psi$ 是有界算子;

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$,函数 u, φ 满足下列条件:

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=k}^{n+1}\sum_{i=0}^{n+1-j}C^j_{n+1}u^{(i)}(\varphi(z))B_{n+1-j,i}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n+2-j-i)}(z))B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty.$$

注意到

$$(C_\varphi \mathbf{R}^n M_u f)'(z) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)}(\varphi(z))\varphi'(z) f^{(k)}(\varphi(z)),$$

我们获得下面的结果.

定理 3.3　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $C_\varphi \mathbf{R}^n M_u: A_\alpha^p\to \mathrm{B}^\Psi$ 是有界算子；

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$，函数 u，φ 满足

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u^{(n+1-k)}(\varphi(z))|\,|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty.$$

通过计算可得

$$(M_u \mathbf{R}^n C_\varphi f)'(z) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\varphi(z))\cdot [u'(z)B_{n,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+1)}(z)) + u(z)B_{n+1,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+2)}(z))] + u(z)(\varphi'(z))^{n+1} f^{(n+1)}(\varphi(z)),$$

因而我们有如下结果.

定理 3.4　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $M_u \mathbf{R}^n C_\varphi: A_\alpha^p\to \mathrm{B}^\Psi$ 是有界算子；

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$，函数 u，φ 满足

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u'(z)B_{n,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+1)}(z))+u(z)B_{n+1,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+2)}(z))|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty$$

以及

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u(z)|\,|\varphi'(z)|^{n+1}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+1+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty.$$

由 $(M_u C_\varphi \mathbf{R}^n f)'(z)=u'(z)f^{(n)}(\varphi(z))+u(z)\varphi'(z)f^{(n+1)}(\varphi(z))$，我们还有下面的结果.

定理 3.5　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $M_u C_\varphi \mathbf{R}^n: A_\alpha^p\to \mathrm{B}^\Psi$ 是有界算子；

(ii) 函数 u，φ 满足

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty,$$

以及

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u(z)|\,|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+1+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty.$$

注意到 $C_\varphi M_u \mathbf{R}^n = M_{u\circ\varphi} C_\varphi \mathbf{R}^n$，故由定理 3.4 可得

推论 3.6　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $C_\varphi M_u \mathbf{R}^n: A_\alpha^p\to B^\Psi$ 是有界算子；

(ii) 函数 u，φ 满足：

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u'(\varphi(z))|\,|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty,$$

以及

$$\sup_{z\in D}\frac{\mu_\Psi(z)\,|u(\varphi(z))|\,|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+1+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty.$$

4　乘积型算子的紧致性

我们首先刻画算子 $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi: A_\alpha^p\to \mathrm{B}^\Psi$ 的紧致性.

定理 4.1　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi: A_\alpha^p\to B^\Psi$ 是紧致算子；

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$，函数 u 和 φ 满足 $L_k<\infty$，并且

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=k}^{n+1} C_{n+1}^j u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}=0 \tag{18}$$

证明　(i)⇒(ii). 设算子 $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi: A_\alpha^p\to B^\Psi$ 是紧致的. 显然 $\mathbf{R}^n M_u C_\varphi: A_\alpha^p\to B^\Psi$ 是有界的. 因此，由定理 3.1 知，对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$ 有 $L_k<\infty$. 设 $\{\varphi(z_i)\}$ 是 D 中任意收敛到 1 的点列. 由函数极限的归结原则，为证明式(18)，只需要证明

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mu_\Psi(z_i)\left|\sum_{j=k}^{n+1} C_{n+1}^j u^{(n+1-j)}(z_i)B_{j,k}(\varphi'(z_i),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z_i))\right|}{(1-|\varphi(z_i)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}=0 \tag{19}$$

如果这样的点列不存在,则式(18)显然成立. 现假设此点列存在. 不失一般性,不妨设对所有的 $i\in\mathbf{N}$ 有 $|\varphi(z_i)|>1/2$. 于是,对固定的 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$,令 $f_{i,k}(z)=f_{\varphi(z_i),k}(z)$,$i\in\mathbf{N}$. 由引理 2.3 以及注 1,我们得到 $\sup_{i\in\mathbf{N}}\|f_{i,k}\|_{A^p_\alpha}\leqslant C$. 当 $i\to\infty$ 时,$\{f_{i,k}\}$ 在 D 的每个紧致子集上一致收敛到零,且

$$f^{(k)}_{i,k}(\varphi(z_i))=\frac{\overline{\varphi(z_i)}^k}{(1-|\varphi(z_i)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}},$$

$$f^{(j)}_{i,k}(\varphi(z_i))=0 \tag{20}$$

其中 $j\in\{0,1,\cdots,n+1\}\backslash\{k\}$. 因此,由引理 2.1,有

$$\lim_{i\to\infty}\|D^nM_uC_\varphi f_{i,k}\|_{B^\Psi}=0 \tag{21}$$

从而对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$,我们得到

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mu_\Psi(z_i)\left|\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z_i)B_{j,k}(\varphi'(z_i),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z_i))\right|}{(1-|\varphi(z_i)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}=0 \tag{22}$$

(ii)⇒(i). 我们首先证明算子 $\mathbf{R}^nM_uC_\varphi:A^p_\alpha\to B^\Psi$ 是有界的. 由式(18),对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\eta\in(0,1)$,使得对任意 $z\in K=\{z\in D:|\varphi(z)|>\eta\}$ 有

$$I_k(z)=\frac{\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=k}^{n+1}C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}<\varepsilon \tag{23}$$

其中 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$. 由 $L_k<\infty$,以及式(23),我们有

$$I_k\leqslant\varepsilon+\frac{L_k}{(1-\eta^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}} \tag{24}$$

于是算子 $\mathbf{R}^nM_uC_\varphi:A^p_\alpha\to B^\Psi$ 是有界的.

由引理 2.1,为了证明算子 $\mathbf{R}^nM_uC_\varphi:A^p_\alpha\to B^\Psi$ 是紧致的. 只需要证明:如果 $\{f_i\}$ 是 A^p_α 中的有界序列,且当 $i\to\infty$ 时 $\{f_i\}$ 在 D 的紧致子集上一致收敛到零,则

$$\lim_{i\to\infty}\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f_i\|_{B^\Psi}=0.$$

设 $\sup_{i\in\mathbf{N}}\|f_i\|_{A^p_\alpha}\leqslant M$. 则对上述 ε 和 η,由(23)式,引理 2.2 和引理 2.4 有

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|(\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f_i)'(z)|=\\&\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\ \Big|\sum_{k=0}^{n+1}f_i^{(k)}(\varphi(z))\sum_{j=k}^{n+1}\cdot\\&C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)\cdot\\&B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\Big|\leqslant\\&\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)\sum_{k=0}^{n+1}|f_i^{(k)}(\varphi(z))|\Big|\sum_{j=k}^{n+1}\cdot\\&C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\Big|\leqslant\\&(\sup_{z\in K}+\sup_{z\in D\backslash K})\mu_\Psi(z)\sum_{k=0}^{n+1}|f_i^{(k)}(\varphi(z))|\cdot\Big|\sum_{j=k}^{n+1}\cdot\\&C^j_{n+1}u^{(n+1-j)}(z)B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\Big|\leqslant\\&\sum_{k=0}^{n+1}L_k\sup_{|w|\leqslant\eta}|f_i^{(k)}(w)|+M\sum_{k=0}^{n+1}C_k\varepsilon\end{aligned} \tag{24}$$

从而由引理 2.1 以及 $\{f_i\}$ 在 D 的紧致子集上一致收敛到零蕴含着 $\{f_i^{(k)}\}$ 亦在 D 的紧致子集上一致收敛到零,我们得到

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|(\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f_i)'(z)|=0 \tag{25}$$

显然

$$\lim_{i\to\infty}|(\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f_i)(0)|=0 \tag{26}$$

故

$$\lim_{i\to\infty}\|\mathbf{R}^nM_uC_\varphi f_i\|_{B^\Psi}=0.$$

因而,算子 $\mathbf{R}^nM_uC_\varphi:A^p_\alpha\to B^\Psi$ 是紧致的.

由定理 3.1 中 L_k 的定义以及 $\mathbf{R}^nC_\varphi M_u=\mathbf{R}^nM_{u\circ\varphi}C_\varphi$ 可得如下推论.

推论 4.2 设 $\alpha>-1$, $p\geqslant1$, $u\in H(D)$,φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价:

(i) $\mathbf{R}^nC_\varphi M_u:A^p_\alpha\to B^\Psi$ 是紧致算子;

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$,函数 u 和 φ 满足

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|(u(\varphi(z))\varphi^{(k)}(z))^{(n+1)}|<\infty$$

且

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)\left|\sum_{j=k}^{n+1}\sum_{i=0}^{n+1-j}C_{n+1}^{j}u^{(i)}(\varphi(z))B_{n+1-j,i}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n+2-j-i)}(z))B_{j,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(j-k+1)}(z))\right|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}=0 \tag{27}$$

接下来的几个定理可类似定理 4.1 给出证明，这里统一省略.

定理 4.3　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $C_\varphi \mathbf{R}^n M_u : A_\alpha^p \to B^\Psi$ 是紧致算子；

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$，函数 u 和 φ 满足

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|u^{(n+1-k)}(\varphi(z))||\varphi'(z)|<\infty$$

以及

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u^{(n+1-k)}(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}=0.$$

定理 4.4　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $M_u \mathbf{R}^n C_\varphi : A_\alpha^p \to \mathrm{B}^\Psi$ 是紧致算子；

(ii) 对每个 $k\in\{0,1,\cdots,n+1\}$，函数 u 和 φ 满足

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|u'(z)B_{n,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+1)}(z))+u(z)B_{n+1,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+2)}(z))|<\infty,$$

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u'(z)B_{n,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+1)}(z))+u(z)B_{n+1,k}(\varphi'(z),\cdots,\varphi^{(n-k+2)}(z))|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{k+\frac{\alpha+2}{p}}}=0,$$

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|u(z)||\varphi'(z)|^{n+1}<\infty,$$

以及

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u(z)||\varphi'(z)|^{n+1}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+1+\frac{\alpha+2}{p}}}<\infty.$$

定理 4.5　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $M_u C_\varphi \mathbf{R}^n : A_\alpha^p \to \mathrm{B}^\Psi$ 是紧致算子；

(ii) 函数 u 和 φ 满足 $u\in B^\Psi$，

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|u(z)||\varphi'(z)|<\infty,$$

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+\frac{\alpha+2}{p}}}=0,$$

以及

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u(z)||\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+1+\frac{\alpha+2}{p}}}=0.$$

推论 4.6　设 $\alpha>-1$，$p\geqslant 1$，$u\in H(D)$，φ 是 D 的解析自映射. 下列陈述等价：

(i) $C_\varphi M_u \mathbf{R}^n : A_\alpha^p \to \mathrm{B}^\Psi$ 是紧致算子；

(ii) 函数 u 和 φ 满足 $u\in B^\Psi$，

$$\sup_{z\in D}\mu_\Psi(z)|u(\varphi(z))||\varphi'(z)|<\infty,$$

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u'(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+\frac{\alpha+2}{p}}}=0,$$

以及

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{\mu_\Psi(z)|u(\varphi(z))||\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{n+1+\frac{\alpha+2}{p}}}=0.$$

参考文献：

[1] Colonna F, Li S X. Weighted composition operators from the minimal Möbius invariant space into the Bloch space [J]. Mediter J Math, 2013, 10: 395.

[2] Esmaeili K, Lindström M. Weighted composition operators between Zygmund type spaces and their essential norms [J]. Integral Equ Oper Theory, 2013, 75: 473.

[3] Jiang Z J. Completely continuous composition operators on Orlicz spaces [J]. Adv Math (China), 2015, 44: 111.

[4] Madigan K, Matheson A. Compact composition operators on the Bloch space [J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 2679.

[5] Ramos Fernández J C. Composition operators on Bloch-Orlicz type spaces [J]. Appl Math Comput, 2010, 217: 3392.

[6] Stević S, Chen R, Zhou Z H. Weighted composition operators between Bloch type spaces in the polydisc[J]. Mat Sb, 2010, 201: 289.

[7] Zhang X J, Guan Y, Li M. Composition operators between logarithmic weighted Bloch type spaces on the unit ball [J]. Adv Math (China), 2015, 44: 553.

[8] Zhao L K. Fredholm weighted composition opera-

tors on the weighted Dirichlet space [J]. Adv Math (China), 2014, 43: 419.
[9] Hibschweiler R A, Portnoy N. Composition followed by differentiation between Bergman and Hardy spaces [J]. Rocky Mountain J Math, 2005, 35: 843.
[10] Li S X, Stević S. Composition followed by differentiation between Bloch type spaces [J]. J Comput Anal Appl, 2007, 9: 195.
[11] Ohno S. Products of composition and differentiation on Bloch spaces [J]. Bull Korean Math Soc, 2009, 46: 1135.
[12] Stević S. Norm and essential norm of composition followed by differentiation from α-Bloch spaces to H_{μ}^{∞} [J]. Appl Math Comput, 2009, 207: 225.
[13] Stević S. Products of composition and differentiation operators on the weighted Bergman space [J]. Bull Belg Math Soc, 2009, 16: 623.
[14] Jiang Z J. On a class of operators from weighted Bergman spaces to some spaces of analytic functions [J]. Taiwan J Math, 2011, 15: 2095.
[15] Jiang Z J. On a product-type operator from weighted Bergman-Orlicz space to some weighted type spaces [J]. Appl Math Comput, 2015, 256: 37.
[16] Krantz S, Stević S. On the iterated logarithmic Bloch space on the unit ball [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71: 1772.
[17] Liu Y, Yu Y. Products of composition, multiplication and radial derivative operators from logarithmic Bloch spaces to weighted-type spaces on the unit ball [J]. J Math Anal Appl, 2015, 423: 76.
[18] Li S X, StevićS. Products of composition and integral type operators from H^{∞} to the Bloch space [J]. Complex Var Elliptic Equ, 2008, 53: 463.
[19] Sehba B, Stević S. On some product-type operators from Hardy-Orlicz and Bergman-Orlicz spaces to weighted-type spaces [J]. Appl Math Comput, 2014, 233: 565.
[20] Stević S. On an integral-type operator from logarithmic Bloch-type and mixed-norm spaces to Bloch-type spaces [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2009, 71: 6323.
[21] Stević S. Products of integral-type operators and composition operators from the mixed norm space to Bloch-type spaces [J]. Siberian Math J, 2009, 50: 726.
[22] Zhu X. Products of differentiation, composition and multiplication operator from Bergman type spaces to Bers spaces [J]. Integral Transforms Spec Funct, 2007, 18: 223.
[23] Zhu X. Generalized weighted composition operators from Bloch spaces into Bers-type spaces [J]. Filomat, 2012, 26: 1163.
[24] Sharma A K. Products of composition multiplication and differentiation between Bergman and Bloch type spaces [J]. Turkish J Math, 2011, 35: 275.
[25] Stević S, Sharma A K, Bhat A. Products of multiplication composition and differentiation operators on weighted Bergman spaces [J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 8115.
[26] Stević S, Sharma A K, Bhat A. Essential norm of multiplication composition and differentiation operators on weighted Bergman spaces [J]. Appl Math Comput, 2011, 218: 2386.
[27] Zhu K. Operator theory in function space [M]. New York: Marcel Dekker, 1990.
[28] Zhu K. Spaces of holomorphic functions in the unit ball [M]. New York: Springer-Verlag, 2005.
[29] Attele K. Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces [J]. Hokkaido Math J, 1992, 21: 279.
[30] Cowen C C, MacCluer B D. Composition operators on spaces of analytic functions [M]. Boca Roton: CRC Press, 1995.
[31] Stević S. Weighted differentiation composition operators from H^{∞} and Bloch spaces to$n$th weighted-type spaces on the unit disk [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 3634.

引用本文格式:
中　文:陈志,江治杰.加权Bergman空间到Bloch-Orlicz空间上的乘积型算子[J].四川大学学报:自然科学版,2020,57:857.
英　文:Chen Z, Jiang Z J. Product-type operators from weighted Bergman spaces to Bloch-Orlicz spaces[J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 857.