doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.006

求解 BBM 方程的一个两层线性化差分格式

苏明芳，何　丽，胡劲松
(西华大学理学院，成都 610039)

摘　要：本文对一类带有齐次边界条件的 Benjamin-Bona-Mahony 方程(BBM 方程)的初边值问题进行了数值研究，提出了一个具有二阶理论精度的两层线性化差分格式，该格式合理地模拟了原问题的一个守恒性质. 本文证明了该格式差分解的存在唯一性. 综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法，本文还证明了该差分格式的收敛性和稳定性. 数值实验表明该方法是可靠的.

关键词：Benjamin-Bona-Mahony 方程；线性差分格式；守恒；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)04-0652-05

A linear two-level difference scheme for solving BBM equation

SU Ming-Fang, *HE Li*, *HU Jin-Song*
(School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, the numerical solution of initial-boundary value problem for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation with homogeneous boundary is considered. A two-level linearized difference scheme with second order is proposed. The difference scheme simulates the conservation property of the problem. Then the existence, uniqueness, convergence and stability of the difference scheme are proved. The results are demonstrated by a numerical example.

Keywords: Benjamin-Bona-Mahony equation; Linearized difference scheme; Conservation; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

为研究非线性波在传播中的耗散，人们提出了 Benjamin-Bona-Mahony (BBM)方程[1]

$$u_t - u_{xxt} + u_x - u_{xx} + uu_x = 0,\quad (x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{1}$$

文献[2-3]研究了其解的衰减性. 文献[4-6]研究了其解的存在唯一性及收敛性. 另一方面，其数值解也引起了众多学者的关注[7-13].

本文考虑 BBM 方程(1)在如下初边值条件

$$u(x,0) = u_0(x),\ x\in[x_L,x_R] \tag{2}$$

$$u(x_L,t) = u(x_R,t) = 0,\ t\in[0,T] \tag{3}$$

下的数值解，其中 $u_0(x)$是已知光滑的函数. 问题(1)～(3)具有如下守恒量[14]：

$$Q(t) = \int_{x_L}^{x_R} u(x,t)\mathrm{d}x = \int_{x_L}^{x_R} u_0(x)\ \mathrm{d}x = Q(0) \tag{4}$$

其中 $Q(0)$为仅与初始条件有关的常数.

文献[14]对问题(1)～(3)提出了在空间层具有四阶理论精度的两层非线性差分格式，但数值求

收稿日期：2019-07-12
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11701481)；四川应用基础研究项目(2019JY0387)
作者简介：苏明芳(1993－)，女，甘肃庆阳人，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：1450318470@qq.com
通讯作者：胡劲松. E-mail：hjs888hjs@163.com

解时需要非线性迭代. 文献[15]又对问题(1)～(3)提出了在空间层具有四阶理论精度的三层线性差分格式,但三层格式一般都不是自启动的,且在数值求解时需要储存前两层的数据. 本文对方程(1)中的非线性项进行线性化离散处理,构造了一个具有二阶理论精度的两层线性化差分格式,合理地模拟了守恒量(4). 在不能得到差分解的最大模估计的情况下,本文综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法[16]证明了该格式的收敛性和稳定性,并给出数值算例.

2　差分格式及其守恒律

对区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$作网格剖分,取空间步长 $h=\frac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ,$x_j=x_L+jh(0\leqslant j\leqslant J)$,$t_n=n\tau(n=0,1,2,\cdots,N,N=\left[\frac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$, $U_j^n\approx u(x_j,t_n)$ 和 $Z_h^0=\{U=(U_j)\mid U_0=U_J=0,\ j=0,1,\cdots,J-1,J\}$. 用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值),并定义如下记号：

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},\ (U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$
$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},(U_j^n)_t=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau},$$
$$U_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},$$
$$\langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,\|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,$$
$$\|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|.$$

对问题(1)～(3)考虑如下有限差分格式：

$$(U_j^n)_t-(U_j^n)_{x\bar{x}t}+(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-(U_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{2}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]=0,$$
$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$
$$U_j^0=u_0(x_j),j=0,1,2,\cdots,J \tag{6}$$
$$U^n\in Z_h^0,n=0,1,2,\cdots,N \tag{7}$$

定理 2.1　差分格式(5)～(7)关于以下离散能量是守恒的：

$$Q^n=h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^n=Q^{n-1}=\cdots=Q^0 \tag{8}$$

其中 $n=1,2,\cdots,N$.

证明　将(5)式两端乘以 h 后对 j 从 1 到 $J-1$ 求和,由边界条件(7)式和分部求和公式[16]有

$$h\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n)_t+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^{n+1}(u_j^n)_{\hat{x}}=0 \tag{9}$$

又

$$h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}=-h\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n)_{\hat{x}}u_j^{n+1} \tag{10}$$

由 Q^n 的定义,将(10)式代入(9)式后两端乘以 τ,再对 n 递推可得(8)式. 证毕.

3　差分格式的可解性

引理 3.1[14]　$\forall U\in Z_h^0$,恒有$\|U_{\hat{x}}\|\leqslant\|U_x\|$.

定理 3.2　若时间步长 τ 充分小,则差分格式(5)～(7)是唯一可解的.

证明　数学归纳法. 显然 U^0 是由初值条件(6)式唯一确定的. 假设 $U^n(n\leqslant N-1)$是唯一可解的,可设

$$\|U^n\|_\infty\leqslant C,\ n\leqslant N-1 \tag{11}$$

考虑方程(5)中的 U^{n+1},有

$$\frac{1}{\tau}U_j^{n+1}-\frac{1}{\tau}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}}+\frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}}+\frac{1}{2}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]=0 \tag{12}$$

将(12)式与 U^{n+1}作内积,由边界条件(7)式和分部求和公式[16]有

$$\frac{1}{\tau}\|U^{n+1}\|^2+(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{2})\|U_x^{n+1}\|^2+\frac{1}{2}\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]U_j^{n+1}=0 \tag{13}$$

由(11)式以及引理 3.1 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]U_j^{n+1}=\\
&\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n[(U_j^{n+1})^2]_{\hat{x}}=\\
&\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n[U_{j+1}^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}](U_j^{n+1})_{\hat{x}}\leqslant\\
&Ch\sum_{j=1}^{J-1}|(U_j^{n+1})_{\hat{x}}|\cdot|U_j^{n+1}|+Ch\sum_{j=1}^{J-1}[|U_{j+1}^{n+1}|+|U_{j-1}^{n+1}|]\cdot|(U_j^{n+1})_{\hat{x}}|\leqslant\\
&C(\|U_x^{n+1}\|^2+\|U^{n+1}\|^2)
\end{aligned} \tag{14}$$

又由

$$\langle U_{\hat{x}}^{n+1}, U^{n+1}\rangle = 0 \tag{15}$$

将(14)、(15)式代入(13)式整理得

$$(1-C\tau)\|U^{n+1}\|^2+\left(1+\frac{\tau}{2}-C\tau\right)\|U_x^{n+1}\|^2\leqslant 0.$$

于是,只要取 τ 充分小,使得当 $1-C\tau>0$ 时方程组(12)仅有零解,则差分格式(5)~(7)中的 U_j^{n+1} 是唯一可解的. 证毕.

4 差分格式的收敛性与稳定性

差分格式(5)~(7)的截断误差定义如下:

$$r_j^n=(u_j^n)_t-(u_j^n)_{x\bar{x}t}+(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-(u_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+\frac{1}{2}[u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+u_j^{n+1}(u_j^n)_{\hat{x}}],$$

$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \tag{16}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),j=0,1,2,\cdots,J-1,J \tag{17}$$

$$u^n\in Z_h^0,\ n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{18}$$

由 Taylor 展开可知,当 $h,\tau\to 0$ 时,

$$|r_j^n|=O(\tau^2+h^2) \tag{19}$$

引理 4.1[14] 设 $u_0\in H^2$,则初边值问题(1)~(3)的解满足 $\|u\|_{L_2}\leqslant C$, $\|u_x\|_{L_2}\leqslant C$, $\|u\|_{L_\infty}\leqslant C$.

定理 4.2 设 $u_0\in H^2$. 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小,则差分格式(5)~(7)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 收敛到初边值问题(1)~(3)的解,且收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

证明 数学归纳法. 记 $e_j^n=u_j^n-U_j^n$. 由(16)~(18)式分别减去(5)~(7)式有

$$r_j^n=(e_j^n)_t-(e_j^n)_{x\bar{x}t}+(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}-(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{x\bar{x}}+P_1+P_2 \tag{20}$$

$$e_j^0=0,\ j=0,1,2,\cdots,J-1,J \tag{21}$$

$$e^n\in Z_h^0,\ n=1,2,\cdots,N-1,N \tag{22}$$

其中

$$P_1=\frac{1}{2}[u_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}-U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}],$$

$$P_2=\frac{1}{2}[u_j^{n+1}(u_j^n)_{\hat{x}}-U_j^{n+1}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}].$$

由引理 4.1 以及(19)式知,存在与 τ 和 h 无关的常数 C_u 和 C_r,使得

$$\|u^n\|_\infty\leqslant C_u,\|u_x^n\|_\infty\leqslant C_u,\|r^n\|_\infty\leqslant C_r(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N-1 \tag{23}$$

再由初始条件(6)以及(21)式可得以下估计式:

$$\|e^0\|=0,\|U^0\|_\infty\leqslant C_u \tag{24}$$

现假设

$$\|e^l\|+\|e_x^l\|\leqslant C_l(\tau^2+h^2),\quad l=1,2,\cdots,n,\ n\leqslant N-1 \tag{25}$$

其中 C_l 为与 τ 和 h 无关的常数. 则由离散 Sobolev 不等式[16]和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\|e^l\|_\infty\leqslant C_0\sqrt{\|e^l\|}\sqrt{\|e_x^l\|+\|e^l\|}\leqslant\frac{1}{2}C_0(2\|e^l\|+\|e_x^l\|)\leqslant\frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^2),l=1,2,\cdots,n \tag{26}$$

$$\|U^l\|_\infty\leqslant\|u^l\|_\infty+\|e^l\|_\infty\leqslant C_u+\frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^2),l=1,2,\cdots,n \tag{27}$$

将(20)式两端与 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积,由分部积分和公式[16],并注意到 $\langle e_{\hat{x}}^{n+\frac{1}{2}},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=0$,整理得

$$\frac{1}{2}\|e^n\|_t^2+\frac{1}{2}\|e_x^n\|_t^2=\langle r^n,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle-\|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2-\langle P_1,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle-\langle P_2,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle \tag{28}$$

由(23)式及微分中值定理有

$$(u_j^{n+1})_{\hat{x}}=\frac{u(x_{j+1},t_{n+1})-u(x_{j-1},t_{n+1})}{2h}=\frac{\partial}{\partial x}u(x_{\xi_j},t_{n+1}),(x_{j-1}\leqslant\xi_j\leqslant x_{j+1}),$$

即 $\|u_{\hat{x}}^{n+1}\|_\infty\leqslant C_u$. 再取 τ 和 h 充分小,使得

$$\frac{3}{2}C_0\cdot(\max_{0\leqslant l\leqslant n}C_l)(\tau^2+h^2)\leqslant 1 \tag{29}$$

于是由(27)和(29)式以及引理 3.1 有

$$-\langle P_1,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^n(u_j^{n+1})_{\hat{x}}+U_j^n(e_j^{n+1})_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}|e_j^n||(u_j^{n+1})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}|U_j^n||(e_j^{n+1})_{\hat{x}}||e_j^{n+\frac{1}{2}}|\leqslant\frac{1}{4}C_u(\|e^n\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)+\frac{1}{4}\left(C_u+\frac{3}{2}C_0C_n(\tau^2+h^2)\right)\cdot(\|e_{\hat{x}}^{n+1}\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)\leqslant\frac{1}{8}C_u(3\|e^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2)+\frac{1}{8}(C_u+1)(2\|e_x^{n+1}\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2) \tag{30}$$

$$-\langle P_2,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^{n+1}(e_j^n)_{\hat{x}}+e_j^{n+1}(U_j^n)_{\hat{x}}]e_j^{n+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^{n+1}(e_j^n)_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(e_j^{n+1}e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}=-\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}u_j^{n+1}(e_j^n)_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n[e_{j+1}^{n+1}(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}+(e_j^{n+1})_{\hat{x}}e_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}]\leqslant$$

$$\frac{1}{4}C_u(\|e_x^n\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)+\frac{1}{4}\left[C_u+\frac{3}{2}C_0C_n(\tau^2+h^2)\right]\times(\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e^{n+\frac{1}{2}}\|^2)\leqslant$$
$$\frac{1}{8}C_u(2\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+\frac{1}{8}(C_u+1)(3\|e^{n+1}\|^2+3\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^n\|^2) \tag{31}$$

又由$\langle r^n, e^{n+\frac{1}{2}}\rangle=\frac{1}{2}\langle r^n, e^{n+1}+e^n\rangle\leqslant\frac{1}{2}\|r^n\|^2+\frac{1}{4}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)$，将(30)和(31)式代入(28)式整理得

$$(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)\leqslant\tau\|r^n\|^2+\frac{1}{2}\tau(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+\tau(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)+$$
$$\frac{1}{2}\tau C_u(\|e^{n+1}\|^2+2\|e^n\|^2+\|e_x^n\|^2)+\frac{1}{4}\tau(C_u+1)(4\|e^{n+1}\|^2+2\|e^n\|^2+5\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)\leqslant$$
$$\tau\|r^n\|^2+3\tau(C_u+1)(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2) \tag{32}$$

将(32)式从 1 到 n 递推求和，整理得

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2\leqslant\|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|+\tau\sum_{k=1}^{n+1}6(C_u+1)(\|e^k\|^2+\|e_x^k\|^2) \tag{33}$$

又

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|r^k\|^2\leqslant T(C_r)^2(\tau^2+h^2)^2 \tag{34}$$

将(25)式代入(33)式，由离散的 Gronwall 不等式[16]，取时间步长 τ 充分小以满足 $\tau<1/12(C_u+1)$ 就有

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2\leqslant(T(C_r)^2+C_1^2)(\tau^2+h^2)^2e^{2T[6(C_u+1)]}\leqslant(C_{n+1})^2(\tau^2+h^2)^2, n=1,2,\cdots,N-1,$$

其中 $C_{n+1}=(\sqrt{T}C_r+C_1)e^{6T(C_u+1)}$. 显然 C_{n+1} 为与 n 无关的常数. 从而由归纳假设有

$$\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2), \|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2), n=1,2,\cdots,N.$$

最后，由离散的 Sobolev 不等式[16]有

$$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2), n=1,2,\cdots,N.$$

定理 4.3　设 $u_0\in H^2$. 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小，则差分格式(5)～(7)的解满足：

$$\|U^n\|_\infty\leqslant\widetilde{C}_0, n=1,2,\cdots,N,$$

其中 $\widetilde{C}_0$ 是与 τ 和 h 无关的常数.

证明　对于充分小的 τ 和 h，由定理 4.2 有

$$\|U^n\|_\infty\leqslant\|u^n\|_\infty+\|e^n\|_\infty\leqslant\widetilde{C}_0.$$

注　定理 4.3 表明差分格式(5)～(7)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$ 关于初值无条件稳定.

5　数值实验

当 $t=0$ 时，由于耗散还没有产生，所以在数值实验中，我们把问题(1)～(3)中的初值函数取为 RLW 方程的初值函数[14] $u(x,0)=\mathrm{sech}^2(\frac{1}{4}x)$.

由于不知道方程(1)的精确解，我们将细网格($\tau=h=\frac{1}{160}$)上的数值解作为精确解来估计误差. 固定 $x_L=-20$, $x_R=40$, $T=5$，就 τ 和 h 的不同取值格式(5)～(7)在几个不同时刻的误差见表 1，对守恒量(4)的数值模拟见表 2.

表 1　格式在几个不同时刻的误差

Tab. 1　Error of the scheme at various times

	$\tau=0.1,h=0.1$		$\tau=0.05,h=0.05$		$\tau=0.025,h=0.025$	
	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$
$t=1$	3.308 02e-4	1.487 44e-4	8.180 25e-5	3.677 76e-5	1.948 87e-5	8.758 29e-6
$t=3$	6.365 95e-4	2.750 06e-4	1.573 54e-4	6.797 13e-5	3.747 11e-5	1.618 53e-5
$t=5$	7.344 63e-4	3.002 42e-4	1.815 11e-4	7.420 33e-5	4.321 94e-5	1.766 91e-5

表 2　格式对守恒量(4)的数值模拟

Tab. 2　Numerial simulation on the conservation invariant (4) of the scheme

	$\tau=0.1,h=0.1$	$\tau=0.05,h=0.05$	$\tau=0.025,h=0.025$
$t=1$	7.999 464 384 263 549	7.999 459 873 483 001	7.999 457 610 398 022
$t=3$	7.999 464 337 926 385	7.999 459 631 731 060	7.999 457 319 991 254
$t=5$	7.999 461 352 552 420	7.999 456 588 780 594	7.999 454 262 702 668

表3 对格式的理论精度 $O(\tau^2+h^2)$ 的数值模拟

Tab. 3 Numerical simulation on the theoretical precision $O(\tau^2+h^2)$

	$\|e^n(h,\tau)\|/\left\|e^{2n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{2}\right)\right\|$			$\|e^n(h,\tau)\|_\infty/\left\|e^{2n}\left(\frac{h}{2},\frac{\tau}{2}\right)\right\|_\infty$		
	$\tau=0.1h=0.1$	$\tau=0.05h=0.05$	$\tau=0.025h=0.025$	$\tau=0.1h=0.1$	$\tau=0.05h=0.05$	$\tau=0.025h=0.025$
$t=1$	—	4.043 91	4.197 44	—	4.044 43	4.199 17
$t=3$	—	4.045 62	4.199 34	—	4.045 92	4.199 55
$t=5$	—	4.046 38	4.199 76	—	4.046 20	4.199 59

从数值算例可以看出,本文对初边值问题(1)~(3)提出的差分格式(5)~(7)是有效的.

参考文献:

[1] Benjamin T. B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves nonlinear dispersive system [J]. Phil Trans R Soc London,1972, A272: 47.

[2] Mei M. Large-time behavior of solution for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers eqation [J]. Nonlinear Anal-Theor 1998, 4: 699.

[3] Mei M. Decay rates of solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers eqation [J]. Differ Equ, 1999, 158: 314.

[4] Amick C J, Bona J L, Schonk M E. Decay of solution of some nonlinear wave equation [J]. J Differ Equ Appl, 1989, 81: 1.

[5] Bona J L, Dougalis V A. An initial and boundary value problem for a model equation for propagation long waves [J]. J Math Anal Appl, 1980, 75: 503.

[6] Wang B X, Attractors and approximate inertial manifolds for the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation [J]. Math Method Appl Sci, 1997, 20: 189.

[7] Achouri T, Khiari N, Omrani K, On the convergence of difference schemes for the Benjamin-Bona-Mahanoy(BBM) equation [J]. Appl Math Comput, 2006, 182: 999.

[8] Omrani K, The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation [J]. App Math Comput, 2006, 180: 614.

[9] 胡劲松,王玉兰. Benjamin-Bona-Mahony 方程的拟紧致差分算法[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2010, 35: 64.

[10] Che H T, Pan X T, Zhang L M, *et al*. Numerical analysis of a linear-implicit average scheme for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation [J]. Appl Math, 2012, 2012: 308410.

[11] 覃燕梅,孔花,罗丹,冯民富. BBM 方程的全离散混合有限元方法[J]. 应用数学学报, 2015, 38: 597.

[12] Lyu P, Vong S W. A linearized second-order finite difference scheme for time fractional generalized BBM equation [J]. Appl Math Lett, 2018, 78: 16.

[13] Can Li. Linearized difference schemes for a BBM equation with a fractional nonlocal viscous term [J]. Appl Math Comput, 2017, 311: 240.

[14] 黄妗彤,胡劲松,贾其涛. 求解 BBM 方程的高精度非线性 CN 差分格式[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 56: 387.

[15] 张虹,王希,胡劲松. Benjamin-Bona-Mahony 方程的一个高精度线性差分格式[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2019, 46: 813.

[16] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing: International Academic Publishers, 1990.

引用本文格式:

中 文: 苏明芳, 何丽, 胡劲松. 求解 BBM 方程的一个两层线性化差分格式[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2020, 57: 652 .

英 文: Su M F, He L, Hu J S. A linear two-level difference scheme for solving BBM equation [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 652.