doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.04.005

高维空间中的 Bargmann 变换的有界性

郑佳鸿
(华南农业大学数学与信息学院，广州 510640)

摘　要：众所周知，一维空间中的 Bargmann 变换 $B:L^2(\mathbf{R})\to F^2(\mathbf{C})$是一个酉算子. 本文对高维空间中 Bargmann 变换给出了当 $p\neq 2$ 时从 $L^p(\mathbf{R}^n)$到 Fock 空间上 Bargmann 变换的有界性刻画. 此外,基于经典积分变换与 Bargmann 变换之间的关系，本文引入了另一种方法来讨论高维空间中的 Bargmann 变换的有界性.

关键词：Bargmann 变换；Fock 空间；Fourier 变换；有界性
中图分类号：O177　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)04-0647-05

Boundedness of Bargmann transformations on high-dimensional spaces

ZHENG Jia-Hong
(College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou, 510640, China)

Abstract: It is well known that a Bargmann transform $B:L^2(\mathbf{R})\to F^2(\mathbf{C})$ on $\mathbf{R}^1$ is a unitary operator. This paper mainly studies Bargmann transforms on $\mathbf{R}^n$, and the boundedness of the Bargmann transform from $L^p(\mathbf{R}^n)$ to Fock spaces when $p\neq 2$. Based on the relationship between classical integral transformation and Bargmann transformation, an alternative method is introduced to discuss the boundedness of Bargmann transformation on $\mathbf{R}^n$.

Keywords: Bargmann transform; Fock space; Fourier transform; Boundedness
(2010 MSC 36H05)

1 引　言

Bargmann 变换在数学物理和分析学中起着重要作用,更是连接实函数空间与复函数空间之间的桥梁,深受人们的重视[1-15].

关于 Bargmann 变换的研究已有五十多年的历史. 上世纪六十年代初,Bargmann[1] 首次介绍了该积分变换. Bargmann 找到了一个积分核，把实空间中平方可积函数的希尔伯特空间与 Fock 空间中的算子关联起来. 在文献[2]中，Bargmann 将该方法应用于 tempered distribution 的理论，研究了 Fock 空间中的调和多项式和及其相应的分解. 之后，人们对其展开了更深入的研究. 首先是将其应用于量子力学和热方程中[12]，后来也将其用于光学和信号处理[8,11]. 关于 Bargmann 变换的研究也可参见文献[14，3，5，9]. 其中，Dong 等[5]研究了 Bargmann 变换对几个经典积分算子的作用，包括分数阶傅里叶变换、分数阶希尔伯特变换和小波变换. 但这些研究仅限于一维情况下的 Bargmann 变换等. 在 n 维空间上，Toft[7]研究了 Bargmann 变换下的函数图像和分布空间. Yoshino[13] 推导出具有 Bargmann-Fock 空间中的多径向符号的 Toeplitz 算子特征值的公式，并阐明了 Bargmann-Fock 空间中的 Toeplitz 算子与 L^2

收稿日期：2019-07-17
基金项目：国家自然科学基金(11671152)
作者简介：郑佳鸿(1994－)，女，广东饶平人，硕士研究生，主要研究方向为泛函分析. E-mail：Z_Lay1994@163.com

$(\mathbf{R}^n)$中的 Daubechies 算子之间的关系. 但他们所研究的结果仅限于在 $L^2(\mathbf{R}^n)$上的 Bargmann 变换，即 $p=2$ 的情形.

高维与一维情况下的解析函数空间及算子结构有着本质不同. 我们以 Hartogs 现象为例[10]. 设 D 是 $n>1$ 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 中的域,K 为域 D 中的紧子集，且 $D\backslash K$ 为连通子集，即 D 的子域. 若 $D\backslash K$上的函数 f 全纯，则 f 可解析开拓到域 D 上. 这在一维情况下则完全不同. 本文引理 2.1 当 $n=1$ 与 $n>1$ 的证法也不同.

本文研究 $n\geqslant 2$ 维情况下的 Bargmann 变换，主要针对 $p\neq 2$ 的情形进行讨论.

2 预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实欧氏空间,$\mathbf{C}^n$ 为 n 维复欧氏空间，$d(x_1,\cdots,x_n)$和 dV 分别代表 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 上的勒贝格测度，简记 $d(x_1,\cdots,x_n)$为 dx. 若 $z=(z_1,\cdots,z_n)=u+\mathrm{i}v$, $w=(w_1,\cdots,w_n)$为 $\mathbf{C}^n$ 上两点，记

$$z\cdot\bar{w}=\sum_{j=1}^{n}z_j\bar{w}_j \qquad |z|=(z\cdot\bar{z})^{1/2}.$$

对于 $0<p\leqslant\infty$, $\mathbf{C}^n$ 上使得 $f(z)\mathrm{e}^{-|z|^2/2}$属于 $L^p(\mathbf{C}^n,dV)$的所有整函数构成的空间称为 Fock 空间，记为 $F^p(\mathbf{C}^n)$. 对 $0<p<\infty$, 记

$$\|f\|_{F^p(\mathbf{C}^n)}=\left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^n\int_{\mathbf{C}^n}|f(z)\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}|^p dV(z)\right]^{\frac{1}{p}},\quad f\in F^p(\mathbf{C}^n).$$

对 $p=\infty$, $f\in F^\infty(\mathbf{C}^n)$, 记

$$\|f\|_{F^\infty(\mathbf{C}^n)}=\operatorname{esssup}\{|f(z)|\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}:z\in\mathbf{C}^n\},\quad f\in F^\infty(\mathbf{C}^n).$$

显然，Fock 空间 $F^p(\mathbf{C}^n)$在上述范数下为 Banach 空间，其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 特别地，$F^2(\mathbf{C}^n)$是 Hilbert 空间

$$\langle f,g\rangle=\pi^{-n}\int_{\mathbf{C}^n}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{e}^{-|z|^2}dV(z).$$

更多关于 Fock 空间的研究结果可参见文献[14].

定义 2.1 对任意 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, 定义

$$Bf(z)=\pi^{-\frac{n}{4}}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}-\frac{|x|^2}{2}+\sqrt{2}\langle z,x\rangle}dx=\pi^{-\frac{n}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}\sum_{j=1}^{n}z_j\cdot x_j}dx.$$

它将 n 维实欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的某些勒贝格可测函数 f 映为 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 上的整函数 Bf. 令 $c=\pi^{-\frac{n}{4}}$.

命题 2.2 对任意 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, Bargmann 变换是良定义的.

证明 令 $z=u+\mathrm{i}v$, $z\in\mathbf{C}^n$. 则有

$$Bf(z)=c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|z|^2-2u^2)}\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{2}u)^2+\sqrt{2}\mathrm{i}vx}dx \tag{1}$$

且

$$|Bf(z)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)}\cdot\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\sqrt{2}u_j)^2}\mathrm{d}x \tag{2}$$

若 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$, 则

$$|Bf(z)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|dx=c\|f\|_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)} \tag{3}$$

若 $f\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, 则

$$|Bf(z)|\leqslant c\|f\|_\infty\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)}\cdot\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\sqrt{2}u_j)^2}dx=(4\pi)^{\frac{n}{4}}\|f\|_\infty\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)} \tag{4}$$

若 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$, 则由式(2)以及 Hölder's 不等式得

$$|Bf(z)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)}\left[\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{q}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\sqrt{2}u_j)^2}dx\right]^{\frac{1}{q}}=c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)}\|f\|_p\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{q}{2}\sum_{j=1}^{n}x_j^2}dx\right]^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{4}{q\pi^7}\right)^{\frac{n}{36}}\|f\|_p\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|z_j|^2-2u_j^2)} \tag{5}$$

可见,对任意 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, Bargmann 变换 Bf 是良定义的.

引理 2.3[1] Bargmann 变换是从 $L^2(\mathbf{R}^n)$到 $F^2(\mathbf{C}^n)$的酉算子.

引理 2.4 任意 $p\geqslant 1$, $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$, $f\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}$ 的 Fourier 变换是良定义的，且对任意 $1\leqslant p'<p$, $f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}\in L^{p'}(\mathbf{R}^n)$.

证明 事实上，

$$\|f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}\|^{p'}_{L^{p'}(\mathbf{R}^n)}=\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(x)e^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}\right|^{p'}dx\leqslant\left[\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(x)\right|^p dx\right]^{p'/p}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}p'(\frac{p}{p-p'})\sum x_j^2}dx\right]^{\frac{p-p'}{p}}=\|f\|^{p'}_{L^p(\mathbf{R}^n)}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}p'(\frac{p}{p-p'})\sum x_j^2}dx\right]^{\frac{p-p'}{p}}<\infty.$$

这表明 $f\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}$ 的 Fourier 变换是良定义的.

记 F 为 Fourier 变换. 对 $z\in\mathbf{C}^n$，$z_j=u_j+\mathrm{i}v_j$，易得

$$\begin{aligned}&Bf(z)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum(|z_j|^2-2u_j^2)}=\\&c\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum(x_j-\sqrt{2}u_j)^2+\sqrt{2}\mathrm{i}\sum x_jv_j}dx=\\&c\int_{\mathbf{R}^n}f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{i}\sum(x_j+\sqrt{2}u_j)v_j}dx=\\&cF[f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}](v)\end{aligned}\tag{6}$$

这里 $F[f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}]$ 表示函数 $f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}$ 的 Fourier 变换.

3　主要结果

引理 3.1　对任意 $0<p<1$，不存在正常数 C 使得

$$\|Bf\|_{F^p(\mathbf{C}^n)}\leqslant C\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)},\quad f\in L^p(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)\tag{7}$$

证明　反证法. 若不然，则对任意 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)$，有 $Bf\in F^p(\mathbf{C}^n)\subset F^2(\mathbf{C}^n)$，这意味着 $\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}=\|B(f)\|_{F^2(\mathbf{C}^n)}<\infty$. 进一步可得 $L^p(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)\subset L^2(\mathbf{R}^n)$. 矛盾. 故式(7)不成立.

命题 3.2　设 $0<p<1$，则 $L^p(\mathbf{R}^n)$上的 Bargmann 变换是无意义的.

证明　对任意有限区间(a,b)，容易找到某个函数 $f\in L^p[a,b]^n\backslash L^1[a,b]^n$. 从而对任意的$(a,b)$可以找到函数 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$\int_{a^n}^{b^n}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\sqrt{2}z_j)^2}dx$$

在 $z\in\mathbf{C}^n$ 上是无意义的. 进而，对于一般的函数 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，其 Bargmann 变换是无意义的. 证毕.

另一方面，Bargmann 变换在 $L^p(\mathbf{R}^n)$上是稠定义的. 例如，$L^p(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)$在 $L^p(\mathbf{R}^n)$中是稠密的，且对于 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)$，$Bf$ 是有定义的整函数. 结合引理 3.1 可知，当 $0<p<1$ 时，Bargmann 变换不能扩展为 $L^p(\mathbf{R}^n)$到 $F^p(\mathbf{C}^n)$的有界线性算子.

定理 3.3　若 $1\leqslant p<2$，则算子 $B:L^p(\mathbf{R}^n)\to F^q(\mathbf{C}^n)$是有界的，并且映射 B 是单射但不是满射，其中 $1/p+1/q=1$.

证明　由式(3)，B 将 $L^1(\mathbf{R}^n)$有界地映射到 $F^\infty(\mathbf{C}^n)$. 再由引理 2.3，利用复内插可知 $B:L^p(\mathbf{R}^n)\to F^q(\mathbf{C}^n)$是有界的，其中 $1\leqslant p<2$. 假设 $Bf=0$，则可证 $f=0$ 几乎处处成立. 因此算子 $B:L^p(\mathbf{R}^n)\to F^q(\mathbf{C}^n)$是单射. 根据 Fock 空间的包含关系可知 $B:L^p(\mathbf{R}^n)\to F^q(\mathbf{C}^n)$不是满射. 证毕.

以上证明方法适用于 p 的其他取值情况，详细证明过程可见定理 3.4.

下面给出有界性的另一种证明. 当 $1<p<2$ 时，令 $q/p=1+(q-p)/p$. 由式(6)得

$$\begin{aligned}&\|Bf\|_{F^q(\mathbf{C}^n)}^q=\int_{\mathbf{C}^n}|Bf(z)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum(|z_j|^2-2u_j^2)}|^q dV(z)=\\&c^q\int_{\mathbf{R}^n}du\int_{\mathbf{R}^n}\left|F[f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}](v)\right|^q dv\leqslant\\&c^q\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(v+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum v_j^2}\right|^p dv\right]^{\frac{q}{p}}du.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\|Bf\|_{F^q(\mathbf{C}^n)}^q\leqslant\\&c^q\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(\sqrt{2}u+v)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum v_j^2}\right|^p dv\right]\cdot\\&\left[\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(\sqrt{2}u+v)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum v_j^2}\right|^p dv\right]^{\frac{q-p}{p}}du\leqslant\\&c^q\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^{q-p}\int_{\mathbf{R}^n}du\int_{\mathbf{R}^n}\Big|\cdot\\&f(\sqrt{2}u+v)\Big|^p\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}p\sum v_j^2}dv=\\&c^q\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^{q-p}\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}p\sum v_j^2}dv\cdot\\&\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(\sqrt{2}u+v)\right|^p du=C\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}^q,\end{aligned}$$

其中

$$C=c^q\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}p\sum v_j^2}\mathrm{d}v.$$

当 $p=1$，$f\in L^1(\mathbf{R})$时，有

$$\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}\right|dx\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x,\ u\in\mathbf{R}^n.$$

再次根据式(6)以及 Hausdorff-Young 定理得

$$\begin{aligned}&\|Bf\|_{F^\infty(\mathbf{C}^n)}=\sup_{z\in\mathbf{C}^n}|Bf(z)|\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum(|z_j|^2-2u_j^2)}\leqslant\\&c\sup_{u\in\mathbf{R}^n}\|f_u\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}\leqslant c\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)},\end{aligned}$$

其中 $f_u(x)=f(x+\sqrt{2}u)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2}$. 因此 B 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$到 $F^q(\mathbf{C}^n)$是有界映射. 证毕.

定理 3.4　假设 $1\leqslant p<2$，$1/p+1/q=1$. 则算子 $B:L^p(\mathbf{R}^n)\to F^{p'}(\mathbf{C}^n)$不是有界的，其中 $p'<q$.

证明　设 $p'<q$. 若 B 将 $L^p(\mathbf{R}^n)$映到 $F^{p'}(\mathbf{C}^n)$，则 B 必是 $L^p(\mathbf{R}^n)$到 $F^{p'}(\mathbf{C}^n)$的有界算子. 因此，存在正常数 $K>0$ 使得

$$\|B(f)\|_{F^{p'}(\mathbf{C}^n)}\leqslant K\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

对所有 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$成立. 设 $S_p=L^p(\mathbf{R}^n)\cap L^1(\mathbf{R}^n)\subset L^p(\mathbf{R}^n)$，$f_r(x)=f(rx)$，其中 $r\in(1,\infty)$. 则

$f_r \in S_p$，且有

$$\| Bf_r \|^p_{F^{p'}(\mathbf{C}^n)} \leqslant K^p \int_{\mathbf{R}^n} \left| f_r(x) \right|^p dx = \frac{K^p}{r^n} \| f \|^p_{L^p(\mathbf{R}^n)} \quad (8)$$

另一方面，由式(6)以及变量替换得

$$\left| Bf_r(z) e^{\frac{1}{2}\sum(|z_j|^2 - 2u_j^2)} \right|^{p'} = \left| c\int_{\mathbf{R}^n} f_r(x) e^{-\frac{1}{2}\sum(x_j - \sqrt{2}u_j)^2 + \sqrt{2}i\sum x_j v_j} dx \right|^{p'} =$$

$$\left| c\int_{\mathbf{R}^n} f(rx) e^{-\frac{1}{2}\sum x_j^2 + \sqrt{2}\sum u_j x_j} e^{\sqrt{2}i\sum x_j v_j} dx \right|^{p'} e^{-p'\sum u_j^2} =$$

$$\frac{c^{p'}}{r^{np'}} \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j} e^{\sqrt{2}i\sum t_j \frac{v_j}{r}} dx \right|^{p'} \cdot e^{-p'\sum u_j^2} =$$

$$\frac{c^{p'}}{r^{np'}} \left| F[f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j}]\left(\frac{v}{r}\right) \right|^{p'} e^{-p'\sum u_j^2}.$$

因而有

$$\| Bf_r \|^{p'}_{F^{p'}(\mathbf{C}^n)} = \int_{\mathbf{C}^n} \left| Bf_r(z) e^{\frac{1}{2}\sum(|z_j|^2 - 2u_j^2)} \right|^{p'} dV =$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \frac{c^{p'}}{r^{np'-1}} \left| F[f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j}]\left(\frac{v}{r}\right) \right|^{p'} \cdot e^{-p'\sum u_j^2} d\left(\frac{v}{r}\right) du =$$

$$\frac{c^{p'}}{r^{np'-1}} \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \left| F[f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j}](v) \right|^{p'} \cdot e^{-p'\sum u_j^2} dv du.$$

结合式(8)，我们可以找到另一个正常数 $K>0$，使得

$$\left[\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \left| F[f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j}](v) \right|^{p'} e^{-p'\sum u_j^2} dv du \right]^{\frac{1}{p'}} \leqslant K \frac{r^{n-\frac{1}{k}}}{r^{\frac{np+1}{p}}} \| f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \leqslant K \| f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \quad (9)$$

其中 $p' < q$ 且 $r>1$. 注意

$$\left[\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \left| F[f(t) e^{-\sum u_j^2}](v) \right|^{p'} dv du \right]^{\frac{1}{p'}} = C \| F(f) \|_{L^{p'}(\mathbf{R}^n)} \quad (10)$$

其中 C 是某个自然数. 由于 f 具有紧支撑，由控制收敛定理[12]得

$$\lim_{r\to\infty} F[f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j}](v) e^{-\sum u_j^2} = F(f)(v) e^{-\sum u_j^2}.$$

再结合式(10)和法林引理可得

$$\| F(f) \|_{L^{p'}(\mathbf{R}^n)} \leqslant C^{-1} \liminf_{r\to\infty} \left[\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \left| F[f(t) e^{-\frac{1}{2r^2}\sum t_j^2 + \sqrt{2}\sum \frac{u_j}{r} t_j}](v) \right|^{p'} e^{-p'\sum u_j^2} dv du \right]^{\frac{1}{p'}}.$$

结合式(9)知，存在另一个正常数 K，使得

$$\| F(f) \|_{L^{p'}(\mathbf{R}^n)} \leqslant K \| f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)},\ f \in S_p.$$

又由于 Fourier 变换是 S_p 到 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 的等距映射[6]，推出矛盾. 可见算子 $B: L^p(\mathbf{R}^n) \to F^{p'}(\mathbf{C}^n)$ 不是有界的.

定理 3.5 若 $1 \leqslant p < 2$，则

(i) 存在函数 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ 使得 $Bf \notin F^p(\mathbf{C}^n)$；

(ii) 不存在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上的稠密子空间 X，使得 $\| Bf \|_{F^p(\mathbf{C}^n)} \leqslant C \| f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$ 对某个正常数 C 以及所有 $f \in X$ 成立.

证明 (i) 因为空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 没有自然序关系，也就是说，任给定两个不同的 $0<p,\ q \leqslant \infty$，空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 和空间 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 是互不包含的，可找到函数 $f \in L^p(\mathbf{R}^n) \backslash L^2(\mathbf{R}^n)$. 若 $Bf \in F^p(\mathbf{C}^n) \subset F^2(\mathbf{C}^n)$，我们有 $\| f \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \| Bf \|_{F^2(\mathbf{C}^n)} < \infty$. 这与 $f \notin L^2(\mathbf{R}^n)$ 相矛盾. 由此可得(i)的证明.

(ii) 若存在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 上的稠密子空间 X 及正常数 C，使得 $\| Bf \|_{F^p(\mathbf{C}^n)} \leqslant C \| f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$ 对所有 $f \in X$ 成立. 我们将证明(i)不成立，从而得出矛盾. 为此，任给 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$，设 $\{f_n\} \subset X$ 使得 $\| f_n - f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} \to 0$. 因为 X 是子空间，所以

$$\| B(f_n) - B(f_m) \|_{F^p(\mathbf{C}^n)} = \| B(f_n - f_m) \|_{F^p(\mathbf{C}^n)} \leqslant C \| f_n - f_m \|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

因此 $\{Bf_n\}$ 是 $F^p(\mathbf{C}^n)$ 中的 Cauchy 序列. 又因为 $F^p(\mathbf{C}^n)$ 是 Banach 空间，故存在函 $g \in F^p(\mathbf{C}^n)$ 使得当 $n\to\infty$ 时 $\| Bf_n - g \|_{F^p(\mathbf{C}^n)} \to 0$. 从而 $\lim_{n\to\infty} Bf_n(z) = g(z), z \in \mathbf{C}^n$. 结合式(3) 和式(5)，可得

$$|Bf_n(z) - Bf(z)| \leqslant C' \| f_n - f \|_{L^p(\mathbf{R}^n)} e^{\frac{|z|^2}{2}},\ z \in \mathbf{C}^n,$$

其中 C' 是常数. 进而有 $\lim_{n\to\infty} Bf_n(z) = Bf(z),\ z \in \mathbf{C}^n$. 因此，$Bf = g \in F^p(\mathbf{C}^n)$. 由 f 的任意性知(i)是错的，矛盾. 从而(ii)成立.

定理 3.6 若 $2 < p \leqslant \infty$，则算子 $B: L^p(\mathbf{R}^n) \to F^p(\mathbf{C}^n)$ 是有界的，且映射 B 是单射但不是满射.

证明 由引理 2.3 知 $B: L^2(\mathbf{R}^n) \to F^2(\mathbf{C}^n)$ 是有界的. 又根据式(4)，B 是 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 到 $F^\infty(\mathbf{C}^n)$ 的有界映射. 由复插值理论知，对任意 $2 \leqslant p \leqslant \infty$，$B$ 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $F^p(\mathbf{C}^n)$ 的有界映射.

为证明 B 是单射，假设 $Bf = 0$. 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \sqrt{2}z_j)^2} dx = 0,\ z \in \mathbf{C}^n.$$

对 z_j 求偏导数并令 $z=0$ 得

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathrm{e}^{-x_j^2}(x_j)^k dx = 0, \ j = 1, 2, \cdots n$$

对所有 $k \geqslant 0$ 成立．说明 $f=0$ 几乎处处成立．注意到证明与 p 的取值无关．

为证明算子 $B: L^p(\mathbf{R}^n) \to F^p(\mathbf{C}^n)$ 不是满射，我们固定某个 $p' \in (2, p)$．取函数 $f \in L^{p'}(\mathbf{R}^n) \setminus L^p(\mathbf{R}^n)$．由 Fock 的包含关系，我们有 $Bf \in F^{p'}(\mathbf{C}^n) \subset F^p(\mathbf{C}^n)$. 如果映射 $B: L^p(\mathbf{R}^n) \to F^p(\mathbf{C}^n)$ 是满射的，则存在某个函数 $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ 使得 $Bg = Bf$，或者 $B(f-g)=0$. 综上所述，我们得到 $f=g$ 几乎处处成立，这与 $f \notin L^p(\mathbf{R}^n)$ 矛盾. 证毕.

参考文献：

[1] Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform (I)[J]. Comm Pur Appl Math, 1961, 14: 187.

[2] Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform (II)[J]. Comm Pur Appl Math, 1967, 20: 1.

[3] Cao G, He L, Hou S. The Bargmann transform on $L^p(\mathbf{R})$[J]. J Math Anal Appl, 2018, 468: 642.

[4] Driver B K, Hall B C. Yang-Mills theory and the Segal-Bargmann transform [J]. Commun Math Phys, 1999, 201: 249.

[5] Dong X T, Zhu K. The Fourier and Hilbert transforms under the Bargmann transform [J]. Complex Var Elliptic, 2018, 63: 517.

[6] Havin V, Nikolski N. Commutative harmonic analysis, II [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2012.

[7] Joachim T. Images of function and distribution spaces under the Bargmann transform [J]. J Pseudo-Differ Oper, 2017, 8: 83.

[8] Lee Y J, Shih H H. The Segal-Bargmann transform for Levy functionals [J]. J Funct Anal, 1999, 168: 46.

[9] Pessoa L V, Santos A M. Polyharmonic Bergman spaces and Bargmann type transforms [J]. J Math Anal Appl, 2017, 449: 619.

[10] 史济怀，多复变函数论基础 [M]. 北京：高等教育出版社，2014.

[11] Shih H H. The Segal-Bargmann transform for Levy white noise functionals associated with non-integrable Levy processes [J]. J Funct Anal, 2008, 255: 657.

[12] Stenzel M B. The Segal-Bargmann transform on a symmetric space of compact type [J]. J Funct Anal, 1999, 165: 44.

[13] Yoshino K. Generalized functions and fourier analysis [M]. New York: Springer, 2017.

[14] Zhu K. Analysis on Fock Spaces [M]. New York: Springer, 2012.

[15] Zhu K. Singular integral operators on the Fock space [J]. Integr Equat Oper Th, 2015, 81: 451.

引用本文格式：

中　文：郑佳鸿．高维空间中的 Bargmann 变换的有界性[J]．四川大学学报：自然科学版，2020，57：647.

英　文：Zheng J H. Boundedness of Bargmann transformations on high-dimensional spaces [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 647.