doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.05.004

含阻尼项的 SRLW 方程的一个去耦合线性化差分格式

魏　杰，何　丽，胡劲松
（西华大学理学院，成都 610039）

摘　要：本文对含阻尼项的耗散 SRLW 方程的初边值问题进行了数值研究，提出了一个具有二阶理论精度的三层非耦合线性化差分格式. 该格式解除了原方程中函数之间的耦合关系，大大提高了求解效率. 此外，本文综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法证明了格式的收敛性和稳定性. 数值实验表明该方法是可靠的.

关键词：阻尼耗散；SRLW 方程；去耦合；线性化差分格式；收敛性；稳定性
中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：0490-6756(2020)05-0847-05

A decoupled linearized difference scheme for the SRLW equation with damping term

WEI Jie, *HE Li*, *HU Jin-Song*
(School of Science, Xihua University, Chengdu 610049, China)

Abstract: In this paper, a numerical method for initial-boundary value problem of the dissipative SRLW equation with damping term is proposed. A three-level uncoupled linearized difference scheme with second order accuracy is proposed. since the coupling relationship between u and ρ is removed in this scheme, we can solve the functions u and ρ respectively and thus greatly improve the efficiency. While the maximum modulus estimation of the difference solution fails to be obtained, the convergence and stability of the numerical solution are proved directly by inductive method and discrete functional analysis as well. Finally, the efficiency of the scheme is demonstrated by an example.

Keywords: Damping dissipation; SRLW equation; Decoupled; Linearized difference scheme; Convergence; Stability
(2010 MSC 65M60)

1　引　言

本文考虑如下带有阻尼项的耗散 SRLW 方程的初边值问题：

$$u_{xxt}-u_t+\upsilon u_{xx}=\rho_x+uu_x,\quad (x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{1}$$

$$\rho_t+u_x+\gamma\rho=0,\quad (x,t)\in(x_L,x_R)\times(0,T] \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad x\in[x_L,x_R] \tag{3}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,\quad \rho(x_L,t)=\rho(x_R,t)=0,t\in[0,T] \tag{4}$$

其中 $\upsilon>0$ 是耗散系数，$\gamma>0$ 是阻尼系数；$u_0(x)$、$\rho_0(x)$是已知函数. 当考虑耗散时，方程组(1)-(2)

收稿日期：2019-09-18
基金项目：国家自然科学基金青年基金(11701481)；四川省应用基础研究项目(2019YJ0387)
作者简介：魏杰(1995－)，男，四川南充人，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：851723410@qq.com

是反映非线性离子声波运动本质现象的合理模型[1].

文献[2-5]分别讨论了方程组(1)-(2)周期边值问题和初边值问题的解的适定性、整体存在唯一性及其解的长时间性态等. 文献[6]用有限元方法对问题(1)～(4)进行了数值研究. 文献[7-8]对问题(1)～(4)进行了有限差分方法研究. 文献[9-11]又进一步对带有阻尼项的广义 SRLW 方程进行了有限差分方法研究,但所提出的都是耦合差分格式,计算量一般都比较大.

本文利用外推技巧,在保持二阶理论精度的前提下对初边值问题(1)～(4)提出一个非耦合的三层线性差分格式. 该格式在数值求解时只需对函数 u 和 ρ 分别单独求解,其中对函数 u 的数值求解为线性化差分算法,对函数 ρ 的数值求解为显式差分算法,大大提高了数值求解效率. 当不能得到其差分解的最大模估计时,本文综合运用数学归纳法和离散泛函分析方法直接证明了格式的收敛性和稳定性,并给出数值算例.

2 差分格式及截断误差

对区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$作网格剖分,取空间步长 $h=\dfrac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ,$x_j=x_L+jh\ (0\leqslant j\leqslant J)$,$t_n=n\tau\ (n=0,1,2,\cdots,N,N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right])$. 记 $u_j^n=u(x_j,t_n)$,$\rho_j^n=\rho(x_j,t_n)$,$U_j^n\approx u(x_j,t_n)$,$\varphi_j^n\approx\rho(x_j,t_n)$. 用 C 表示与 τ 和 h 无关的一般正常数(即在不同地方可以有不同的取值). 设$\{U_j^n\}$和$\{V_j^n\}$为定义在该网格上的网格函数,并定义如下记号:

$$(U_j^n)_x=\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h},(U_j^n)_{\bar{x}}=\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h},$$

$$(U_j^n)_{\hat{x}}=\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h},(U_j^n)_t=\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau},$$

$$U_j^{n+\frac12}=\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2},\ \langle U^n,V^n\rangle=h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n,$$

$$\|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle,\|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|,$$

$$Z_h^0=\{U=(U_j)\,|\,U_0=U_J=0,\ j=0,\ 1,\cdots,J-1,J\}.$$

对初边值问题(1)～(4)考虑如下有限差分格式:

$$(U_j^n)_t-(U_j^n)_{x\bar{x}t}+(\frac32\varphi_j^n-\frac12\varphi_j^{n-1})_{\hat{x}}-\upsilon(U_j^{n+\frac12})_{x\bar{x}}+(\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1})(U_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}=0,$$

$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$

$$(\varphi_j^n)_t+(\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1})_{\hat{x}}+\gamma\varphi_j^{n+\frac12}=0,$$

$$j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1 \tag{6}$$

$$U_j^0=u_0(x_j),\varphi_j^0=\rho_0(x_j),j=0,1,2,\cdots,J \tag{7}$$

$$U^n\in Z_h^0,\varphi^n\in Z_h^0,n=0,1,2,\cdots,N \tag{8}$$

差分格式(5)～(8)的截断误差定义如下:

$$r_j^n=(u_j^n)_t-(u_j^n)_{x\bar{x}t}+(\frac32\rho_j^n-\frac12\rho_j^{n-1})_{\hat{x}}-\upsilon(u_j^{n+\frac12})_{x\bar{x}}+[\frac32u_j^n-\frac12u_j^{n-1}](u_j^{n+\frac12})_{\hat{x}} \tag{9}$$

$$s_j^n=(\rho_j^n)_t+(\frac32u_j^n-\frac12u_j^{n-1})_{\hat{x}}+\gamma\rho_j^{n+\frac12} \tag{10}$$

由 Taylor 展开可知,当 $h,\tau\to0$ 时

$$|r_j^n|+|s_j^n|=O(\tau^2+h^2) \tag{11}$$

3 差分格式的收敛性和稳定性

引理 3.1[7-8] 设 $u_0\in H^1$,$\rho_0\in L_2$. 初边值问题(1)～(4)的解满足

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\|\rho\|_{L_2}\leqslant C,\|u\|_{L_\infty}\leqslant C.$$

定理 3.2 设 $u_0\in H^1$,$\rho_0\in L_2$. 若时间步长 τ 和空间步长 h 充分小,则差分格式(5)～(8)的解 U^n 以$\|\cdot\|_\infty$,φ^n 以$\|\cdot\|_{L^2}$收敛到初边值问题(1)～(4)的解,收敛阶为 $O(\tau^2+h^2)$.

证明 用数学归纳法. 记 $e_j^n=u_j^n-U_j^n$,$\eta_j^n=\rho_j^n-\varphi_j^n$. 由(9),(10)式减去(5),(6)式得

$$r_j^n=(e_j^n)_t-(e_j^n)_{x\bar{x}t}+(\frac32\eta_j^n-\frac12\eta_j^{n-1})_{\hat{x}}-\upsilon(e_j^{n+\frac12})_{x\bar{x}}+[\frac32u_j^n-\frac12u_j^{n-1}](u_j^{n+\frac12})_{\hat{x}}-[\frac32U_j^n-\frac12U_j^{n-1}](U_j^{n+\frac12})_{\hat{x}} \tag{12}$$

$$s_j^n=(\eta_j^n)_t+(\frac32e_j^n-\frac12e_j^{n-1})_{\hat{x}}+\gamma\eta_j^{n+\frac12} \tag{13}$$

由引理 3.1 以及(11)式知,存在与 τ 和 h 无关的常数 C_u,C_r 和 C_s,使得

$$\|u^n\|_\infty\leqslant C_u;\|r^n\|_\infty\leqslant C_r(\tau^2+h^2);\|s^n\|_\infty\leqslant C_s(\tau^2+h^2),n=1,2,\cdots,N \tag{14}$$

由初始条件(7)式可得到估计式

$$\|e^0\|=0,\|\eta^0\|=0,\|U^0\|_\infty\leqslant C_u \tag{15}$$

再由两层二阶差分格式[8]计算出 U^1 和 φ^1 即可得到以下估计式:

$$\|e^1\|+\|e_x^1\|+\|\eta^1\|\leqslant C_1(\tau^2+h^2) \tag{16}$$

这里 C_1 为与 τ 和 h 无关的常数. 现在假设

$$\|e^l\|+\|e_x^l\|+\|\eta^l\|\leqslant C_l(\tau^2+h^2),\ l=2,3,\cdots,n,\ n\leqslant N-1 \tag{17}$$

其中 $C_l(l=2,3,\cdots,n)$ 为与 τ 和 h 无关的常数. 则由离散 Sobolev 不等式[2] 和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\|e^l\|_\infty \leqslant C_0\sqrt{\|e^l\|}\sqrt{\|e_x^l\|+\|e^l\|} \leqslant \frac{1}{2}C_0(2\|e^l\|+\|e_x^l\|) \leqslant \frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^2),\ l=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

$$\|U^l\|_\infty \leqslant \|u^l\|_\infty+\|e^l\|_\infty \leqslant C_u+\frac{3}{2}C_0C_l(\tau^2+h^2),l=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

将(12)式和(13)式分别与 $e^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\eta^{n+\frac{1}{2}}$ 作内积,由分部求和公式,整理得

$$\frac{1}{2}\|e^n\|_t^2+\frac{1}{2}\|e_x^n\|_t^2 \leqslant -h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}e_j^n-\frac{1}{2}e_j^{n-1}](u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}](e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}}-\langle\frac{3}{2}\eta_x^n-\frac{1}{2}\eta_x^{n-1},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\|\eta^n\|_t^2=-\gamma\|\eta^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\langle s^n,\eta^{n+\frac{1}{2}}\rangle-\langle\frac{3}{2}e_x^n-\frac{1}{2}e_x^{n-1},\eta^{n+\frac{1}{2}}\rangle \tag{21}$$

由引理 3.1 以及微分中值定理,有

$$\|u_x^{n+\frac{1}{2}}\|_\infty \leqslant C_u \tag{22}$$

再取 h 和 τ 充分小,使

$$\frac{3}{2}C_0\cdot(\max_{0\leqslant l\leqslant n}C_l)(\tau^2+h^2)\leqslant 1 \tag{23}$$

于是由(19)、(22)式和(23)式以及 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}e_j^n-\frac{1}{2}e_j^{n-1}](u_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}C_uh\sum_{j=1}^{J-1}[3|e_j^n|+|e_j^{n-1}|]\cdot|e_j^{n+\frac{1}{2}}| \leqslant \frac{1}{4}C_u[\|e^{n+1}\|^2+4\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2] \tag{24}$$

$$-h\sum_{j=1}^{J-1}[\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}](e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}e_j^{n+\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[3|U_j^n|+|U_j^{n-1}|]\cdot|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}|\cdot|e_j^{n+\frac{1}{2}}| \leqslant 2\Big[C_u+\frac{3}{2}C_0\cdot\max(C_{n-1},C_n)(\tau^2+h^2)\Big]\cdot h\sum_{j=1}^{J-1}|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}|\cdot|e_j^{n+\frac{1}{2}}| \leqslant \frac{1}{2}(C_u+1)[\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2] \tag{25}$$

$$\langle r^n,e^{n+\frac{1}{2}}\rangle \leqslant \frac{1}{2}\|r^n\|^2+\frac{1}{4}(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2) \tag{26}$$

$$-\langle\frac{3}{2}\eta_x^n-\frac{1}{2}\eta_x^{n-1},e^{n+\frac{1}{2}}\rangle \leqslant \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}[3|\eta_j^n|+|\eta_j^{n-1}|]\cdot|(e_j^{n+\frac{1}{2}})_{\hat{x}}| \leqslant \frac{1}{4}[3\|\eta^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2] \tag{27}$$

$$-\langle\frac{3}{2}e_x^n-\frac{1}{2}e_x^{n-1},\eta^{n+\frac{1}{2}}\rangle \leqslant \frac{1}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}(3|(e_j^n)_{\hat{x}}|+|(e_j^{n-1})_{\hat{x}}|)|\eta_j^{n+\frac{1}{2}}| \leqslant \frac{1}{4}[3\|\eta^n\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2] \tag{28}$$

$$\langle s^n,\eta^{n+\frac{1}{2}}\rangle \leqslant \frac{1}{2}\|s^n\|^2+\frac{1}{4}(\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2) \tag{29}$$

将(20)与(21)式相加,并将(24)～(29)式代入后整理得

$$(\|e^{n+1}\|^2-\|e^n\|^2)+(\|e_x^{n+1}\|^2-\|e_x^n\|^2)+(\|\eta^{n+1}\|^2-\|\eta^n\|^2) \leqslant \tau\|r^n\|^2+\tau\|s^n\|^2+\frac{1}{2}\tau[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2]+\frac{1}{2}\tau[\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2]+\frac{1}{2}\tau C_u(\|e^{n+1}\|^2+4\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2)+\tau(C_u+1)(\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+\frac{1}{2}\tau[\|e_x^{n+1}\|^2+4\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2+4\|\eta^n\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2] \leqslant \tau\|r^n\|^2+\tau\|s^n\|^2+4\tau(C_u+1)[\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2+\|\eta^n\|^2+\|\eta^{n-1}\|^2] \tag{30}$$

将(30)式从 1 到 n 递推求和,整理得

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2 \leqslant \|e^1\|^2+\|e_x^1\|^2+\|\eta^1\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2+\tau\sum_{k=1}^{n}\|s^k\|^2+\tau\sum_{k=0}^{n+1}12(C_u+1)(\|e^k\|^2+\|e_x^k\|^2+\|\eta^k\|^2) \tag{31}$$

由(14)式有

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|r^k\|^2 \leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|r^k\|^2 \leqslant T(C_r)^2(\tau^2+h^2)^2 \tag{32}$$

$$\tau\sum_{k=1}^{n}\|s^k\|^2 \leqslant n\tau\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|s^k\|^2 \leqslant$$

$$T(C_s)^2(\tau^2+h^2)^2 \tag{33}$$

再将(16)、(32)、(33)式代入(31)式，利用离散 Gronwall 不等式[12]，取时间步长 τ 充分小以满足

$$\tau<\frac{1}{24(C_u+1)},$$

于是有

$$\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|\eta^{n+1}\|^2\leqslant (T(C_r)^2+T(C_s)^2+C_1^2)(\tau^2+h^2)^2 e^{2T[12(C_u+1)]}\leqslant (C_{n+1})^2(\tau^2+h^2)^2,\ n=1,2,\cdots,N-1,$$

其中

$$C_{n+1}=[\sqrt{T}(C_r+C_s)+C_1]e^{12T(C_u+1)}.$$

显然 C_{n+1} 为与 n 无关的常数. 从而由归纳假设有

$$\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),$$
$$\|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),$$
$$\|\eta^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2),\ n=1,2,\cdots,N.$$

最后由离散 Sobolev 不等式[13]有

$$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2),\ n=1,2,\cdots,N.$$

注 由(19)式知 $\|U^n\|_\infty\leqslant\tilde{C}_0$，$n=1,2,\cdots,N$，其中 $\tilde{C}_0$ 是与 τ 和 h 无关的常数. 从而，差分格式(5)～(8)的解 U^n 以 $\|\cdot\|_\infty$，φ^n 以 $\|\cdot\|_{L^2}$ 关于初值无条件稳定.

4 数值实验

(5)式和(6)式可改写为如下形式：

$$A_j^n\cdot U_{j-1}^{n+1}+B_j^n\cdot U_j^{n+1}+C_j^n\cdot U_{j+1}^{n+1}=D_j^n \tag{34}$$

$$(1+\frac{\gamma\tau}{2})\varphi_j^{n+1}=(1-\frac{\gamma\tau}{2})\varphi_j^n-\frac{\tau}{2}(3U_j^n-U_j^{n-1})_{\hat{x}} \tag{35}$$

其中

$$A_j^n=-(\frac{\upsilon\tau}{2}+\frac{1}{h^2})-\frac{\tau}{4h}(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}),$$

$$B_j^n=(1+\upsilon\tau+\frac{2}{h^2}),$$

$$C_j^n=-(\frac{\upsilon\tau}{2}+\frac{1}{h^2})+\frac{\tau}{4h}(\frac{3}{2}U_j^n-\frac{1}{2}U_j^{n-1}),$$

$$D_j^n=U_j^n-(1-\frac{\upsilon\tau}{2})(U_j^n)_{x\bar{x}}-\frac{\tau}{2}(3\varphi_j^n-\varphi_j^{n-1})_{\hat{x}}-\frac{\tau}{4}(3U_j^n-U_j^n)(U_j^n)_{\hat{x}}.$$

从(34)式和(35)式可以看出，差分格式(5)～(8)明显是非耦合的. 且(34)式是关于 $\{U_j^{n+1}\}$ 的三对角线性方程组，可快速地对函数 u 进行数值求解，而(35)式是关于 $\{\varphi_j^{n+1}\}$ 的显式表达式，可对函数 ρ 直接进行数值求解. 在数值实验中，把问题(1)～(4)中的初值函数取为 SRLW 方程的初值函数[7-8]

$$u_0(x)=\frac{5}{2}\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{5}}{6}x,\rho_0(x)=\frac{5}{3}\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{5}}{6}x$$

并固定 $\upsilon=\gamma=1.0$，$x_L=-20$，$x_R=40$，$T=5.0$. 由于不知道方程组(1)、(2)的精确解，我们用文献[7-8]中的误差估计方法将细网格($\tau=h=\frac{1}{160}$)上的数值解作为精确解来估计误差. 就 τ 和 h 的不同取值，差分格式(5)～(8)在几个不同时刻的误差见表 1.

表 1 差分格式在不同时刻的误差

Tab. 1 The error of the difference scheme at various time

		$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.05$		$\tau=h=0.025$	
		$\|\cdot\|$	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|$	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|$	$\|\cdot\|_\infty$
u	$t=1$	8.616 63e-3	4.506 49e-3	2.266 05e-3	1.164 51e-3	5.381 67e-4	2.717 11e-4
	$t=3$	1.087 21e-2	4.136 27e-3	2.842 76e-3	1.142 33e-3	6.710 55e-4	2.660 95e-4
	$t=5$	1.019 75e-2	4.053 11e-3	2.740 90e-3	1.153 09e-3	6.457 06e-4	2.694 20e-4
ρ	$t=1$	8.696 19e-3	5.066 46e-3	2.134 78e-3	1.253 48e-3	4.961 57e-4	2.950 20e-4
	$t=3$	4.942 43e-3	3.281 12e-3	1.222 74e-3	8.069 57e-4	2.866 90e-4	1.906 60e-4
	$t=5$	3.218 73e-3	1.957 39e-3	8.313 35e-4	4.970 59e-4	1.940 90e-4	1.176 12e-4

5 结 论

数值结果表明，本文对问题(1)～(4)提出的差分格式(5)～(8)是有效的，明显具有二阶精度. 该格式解除了方程组(1)、(2)中函数 u 和 ρ 的耦合关系，且实质上是一个半显式线性差分格式，相对于

其他耦合的差分格式，其计算时间更加节省、求解效率更高.

参考文献：

[1] Clarkson P A. New similarity reductions and Painleve analysis for the symmetric regularized long wave and modified Benjamin-Bona-Mahoney equations [J]. J Phys A-Math Theor, 1999, 22: 3821.

[2] Shang Y D, Guo B L. Long time behavior of the dissipative generalized symmetric regularized long wave equations [J]. J Par Diff Equat, 2020, 15: 35.

[3] 尚亚东，郭柏灵. 耗散的广义对称正则长波方程周期初值问题的整体吸引子[J]. 数学物理学报，2003，23A：745.

[4] Guo B, Shang Y. Approximate inertial manifolds to the generalized symmetric regularized long wave equations with damping term [J]. Acta Math Appl Sin-E, 2003, 19: 191.

[5] 尚亚东，郭柏灵. 带有阻尼项的广义对称正则长波方程的指数吸引子[J]. 应用数学和力学，2005，26：259.

[6] Xu Y, Hu B, Xie X, Hu J. Mixed finite element analysis for dissipative SRLW equations with damping term[J]. Appl Math Comput, 2011, 218: 4788.

[7] Hu J, Xu Y, Hu B. A linear difference scheme for dissipative symmetric regularized long wave equations with damping term [J]. Math Probl Eng, 2011, 2011: 781750.

[8] Hu J, Hu B, Xu Y. C-N Difference schemes for dissipative symmetric regularized long wave equations with damping term [J]. Math Probl Eng, 2011, 2011: 651642.

[9] Zhou J. Numerical simulation of generalized symmetric regularized long-wave equations with damping term [J]. Int J Digit Cont Tech Appl 2013, 7: 1142.

[10] 刘倩，胡劲松，林雪梅. 带有阻尼项的广义 SRLW 方程的一个线性差分格式[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2014，3：199.

[11] Xi Wang, Jinsong Hu, Hong Zhang. A linear finite difference scheme for the generalized dissipative SRLW equation with damping [J]. Therm Sci, 2019, 23: S719.

[12] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods [M]. Beijing: Inter Acad Publishers, 1990.

引用本文格式：

中　文：魏杰，何丽，胡劲松. 含阻尼项的 SRLW 方程的一个去耦合线性化差分格式[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：847.

英　文：Wei J, He L, Hu J S. A decoupled linearized difference scheme for the SRLW equation with damping term [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 847.