2020 年 9 月 四川大学学报(自然科学版) Sep. 2020
第 57 卷 第 5 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 57 No. 5

doi：10.3969/j.issn.0490-6756.2020.05.005

一类带积分边界条件的三阶边值问题正解的存在唯一性

何燕琴，韩晓玲
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘 要：本文运用混合单调算子方法研究了带积分边界条件的三阶常微分方程边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,u(t),u(\xi t))+g(t,u(t)),t\in(0,1),\xi\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=0,u'(1)=\int_0^1 q(t)u'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

正解的存在唯一性，其中 $f:[0,1]\times[0,+\infty)^2\to[0,\infty)$ 连续，$g:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续，$q\in C([0,1],[0,+\infty))$.

关键词：三阶边值问题；积分边界条件；正解；存在唯一性；混合单调算子
中图分类号：O175.29 **文献标识码**：A **文章编号**：0490-6756(2020)05-0852-05

The existence and uniqueness of positive solutions for a class of third-order boundary value problems with integral boundary conditions

HE Yan-Qin, *HAN Xiao-Ling*
(College of Mathematics and Statistic, Northwest University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In this paper, by using the mixed monotone operator method, we study the existence and uniqueness of positive solutions for the following third-order ordinary differential equations with integral boundary conditions:

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,u(t),u(\xi t))+g(t,u(t)),t\in(0,1),\xi\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=0,u'(1)=\int_0^1 q(t)u'(t)\mathrm{d}t, \end{cases}$$

where $f:[0,1]\times[0,+\infty)^2\to[0,\infty)$ is continuous, $g:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ is continuous, $q\in C([0,1],[0,+\infty))$.

Keywords: Third-order boundary value problem; Integral boundary condition; Positive solution; Existence and uniqueness; Mixed monotone operator
(2010 MSC 34B15)

1 引 言

近年来，人们对非线性微分方程可解性的研究非常活跃. 这类问题因在流体力学等实际应用中的重要性而备受关注，尤其是二阶和四阶微分方程的研究获得了许多好的结果，但对带积分边界条件的三阶常微分方程边值问题的研究甚少. 三阶常微分方程起源于应用数学和物理学的各个不同领域. 对

收稿日期：2019-10-09
基金项目：国家自然科学基金(11561063)
作者简介：何燕琴(1994－)，女，甘肃金昌人，硕士研究生，主要研究方向为常微分方程边值问题. E-mail：1193360529@qq.com
通讯作者：韩晓玲. E-mail：hanxiaoling9@163.com

其解的存在性已有很多方法，如 Guo-Krasnoselskii 不动点定理、上下解法，单调迭代法，等[1-11].

2014 年，赵亚红等[1]运用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理研究了带积分边界条件的三阶边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+f(t,u(t),u'(t))=0, t\in(0,1) \\ u(0)=u''(1)=0, u'(0)=\int_0^1 g(t)u'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

的单调正解的存在性，但未讨论正解的唯一性.

2017 年，郝彩云等[3]运用混合单调算子不动点定理研究了带积分边界条件的三阶边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+f(t,u(t))+g(t,u(t))=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u''(1)=0, u'(0)=\int_0^1 q(t)u'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

的凸单调正解的存在唯一性，运用和算子的不动点定理以及混合单调算子中的不动点定理获问题凸单调正解存在唯一的充分必要条件，并建立迭代格式来逼近这个唯一正解，其中 $f:[0,1]\times[0,+\infty)^2\to[0,+\infty)$ 连续；$g:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续；且 $\mu=\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t, t\in[0,1], \sigma=\int_0^1 tq(t)\mathrm{d}t, \sigma\in[0,1]$.

受上述文献启发，本文运用混合单调算子的方法研究了带积分边界条件的三阶边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)=f(t,u(t),u(\xi t))+g(t,u(t)), \\ \quad t\in(0,1), \xi\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=0, u'(1)=\int_0^1 q(t)u'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

单调正解的存在性，其中 $f:[0,1]\times[0,+\infty)^2\to[0,+\infty)$ 连续，$g:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续.

本文假设下面条件成立：

(H1) $f:[0,1]\times[0,+\infty)^2\to[0,+\infty)$ 连续；

(H2) $g:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 连续；

(H3) 记 $\mu=\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t, t\in[0,1]$，且 $\mu\neq 1$，$\sigma=\int_0^1 tq(t)\mathrm{d}t, \sigma\in[0,1]$.

本文的工作空间是 $E=C[0,1]$. 定义范数

$$\|u\|=\max\{|u(t)|:t\in[0,1]\}.$$

则 E 为实的 Banach 空间. 令 $P=\{u\in C[0,1]:u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\}$. 则 P 为 E 中的正规锥.

2　预备知识

设$(E,\|\cdot\|)$是一个实 Banach 空间，θ 为 E 中的零元素，$P\subset E$ 为非空凸闭集. 如果 P 满足：(i) $x\in E, \lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in P$，(ii) $x\in P, -x\in P\Rightarrow x=\theta$，则称 P 为 E 中的一个锥.

设 P 是 Banach 空间 E 中的锥，若存在常数 $N>0$，使得对于任意的 $x,y\in E$，当 $\theta\leqslant x\leqslant y$ 时恒有 $\|x\|\leqslant N\|y\|$，则称 P 是正规的，其中 N 称为 P 的正规常数. 由锥 P 可诱导 E 中的偏序关系如下：$x,y\in E, x\leqslant y\Leftrightarrow y-x\in P$. 对任意的 $x,y\in E$，引入等价关系 $x\sim y$：存在常数 $\mu>0$ 及 $\nu>0$，使得 $\mu x\leqslant y\leqslant\nu x$. 对于给定的 $h>\theta$，记集合 P_h 为 h 所在的等价类，即 $P_h=\{x\in E|:x\sim h\}, P_h\subset E$.

定义2.1[2]　设 $D\subseteq E$，$A:D\times D\to E$ 是一个算子. 如果 $A(x,y)$关于 x 是增算子，关于 y 是减算子，即对任给的 $y\in D$，若 $x_1,x_2\in D, x_1\leqslant x_2$，则 $A(x_1,y)\leqslant A(x_2,y)$；对任给 $x\in D$，若 $y_1,y_2\in D$，$y_1\geqslant y_2$，则有 $A(x,y_1)\leqslant A(x,y_2)$，则称 A 是混合单调算子.

定义2.2[7]　若对于任意的 $t>0, x\in E$，算子 $A:E\to E$ 满足 $A(tx)=tAx$，则称 A 为齐次算子. 若对任意的 $t>0, x\in P$，算子 $A:P\to P$ 满足 $A(tx)\geqslant tAx$，则称 A 为次齐次算子. 若存在一个实数 γ，满足 $0\leqslant\gamma<1$，使得对于任意的 $t\in[0,1], x\in P$，算子 $A:P\to P$ 满足 $A(tx)\geqslant t^\gamma Ax$，则称 A 为凹算子.

定理 2.3[2]　设 $\alpha\in(0,1), h\in E$，且 $\theta<h$，P 是空间$(E,\|\cdot\|)$中的正规锥. 令 $A:P\times P\to P$ 满足 $A(tx,t^{-1}y)\geqslant t^\alpha A(x,y), \forall t\in(0,1), x,y\in P$. 令 $B:P\to P$ 是递增的次齐次算子. 假设：(i)存在 $h_0\in P_h$，使得 $A(h_0,h_0)\in P_h$，且 $Bh_0\in P_h$；(ii)存在常数 $\delta_0>0$，使得 $A(x,y)\geqslant\delta_0 Bx, \forall x,y\in P$，则

(i) $A:P_h\times P_h\to P_h, B:P_h\to P_h$；

(ii) 存在 $u_0,v_0\in P_h$ 和 $r\in(0,1)$，使得当 $rv_0\leqslant u_0\leqslant v_0$ 时，有 $u_0\leqslant A(u_0,v_0)+Bu_0\leqslant A(v_0,u_0)+Bv_0\leqslant v_0$；

(iii) 存在唯一的 $x^*\in P_h$，使得 $x^*=A(x^*,x^*)+Bx^*$；

(iv) 以任意的 $x_0,y_0\in P_h$ 为初始元素，定义序列 $x_n=A(x_{n-1},y_{n-1})+Bx_{n-1}, n=1,2,3,\cdots$，$y_n=A(y_{n-1},x_{n-1})+By_{n-1}, n=1,2,3,\cdots$，满足

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-x^*\|=0.$$

引理2.4[5]　对任意给定的 $h\in C[0,1]$，边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)=h(t), t\in[0,1], \\ u(0)=u''(0)=0, u'(1)=\int_0^1 q(t)u'(t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解 $u(t)$，且 $u(t)$ 可以表示成下列形式：

$$u(t)=\int_0^1\Big[G_1(t,s)+\frac{t}{1-\mu}\int_0^1 G_2(\tau,s)q(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]h(s)\mathrm{d}s,t\in[0,1],$$

其中

$$G_1(t,s)=\frac{1}{2}\begin{cases}2t-t^2-s^2,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ 2t(1-s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases}1-t,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ 1-s,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

引理 2.5 对于任意给定的 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，$G(t,s)$ 有如下性质：

(i) $\frac{t(1-s)}{2}\leqslant G_1(t,s)\leqslant t(2-s)$，$\frac{ts}{2}\leqslant G_2(t,s)\leqslant 1-s$；

(ii) $\frac{ts\sigma}{2(1-\mu)}\leqslant G(t,s)\leqslant t(\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})$.

证明 (i) 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，$G_1(t,s)=\frac{1}{2}(2t-t^2-s^2)\leqslant\frac{1}{2}(2t-ts)\leqslant t(2-s)$. $G_1(t,s)=\frac{1}{2}(2t-t^2-s^2)\geqslant\frac{1}{2}(2t-t^2-ts)\geqslant\frac{t(1-s)}{2}$. 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，$G_1(t,s)=\frac{1}{2}\cdot 2t(1-s)\leqslant t(2-s)$. $G_1(t,s)=\frac{1}{2}\cdot 2t(1-s)\geqslant\frac{t(1-s)}{2}$. 从而 $\frac{t(1-s)}{2}\leqslant G_1(t,s)\leqslant t(2-s)$. 显然，$\frac{ts}{2}\leqslant G_2(t,s)\leqslant 1-s$.

(ii) 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$G(t,s)=G_1(t,s)+\frac{t}{1-\mu}\int_0^1 G_2(\tau,s)q(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant t(2-s)+\frac{t}{1-\mu}\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t=t(\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu}).$$

当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，

$$G(t,s)=G_1(t,s)+\frac{t}{1-\mu}\int_0^1 G_2(\tau,s)q(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant\frac{t}{1-\mu}\int_0^1\frac{1}{2}tsq(\tau)\mathrm{d}\tau\geqslant\frac{ts\sigma}{2(1-\mu)}.$$

3 主要结果

定理 3.1 设(H1)~(H3)成立，且

(i) 对固定的 $t\in[0,1]$，$f(t,x,y)$ 关于 x 单调递增，关于 y 单调递减，$g(t,x)$ 关于 x 单调递增；

(ii) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$，$t\in[0,1]$，和 $x\in[0,+\infty)$ 有 $g(t,\lambda x)\geqslant\lambda g(t,x)$，且存在 $t_0\in[0,1]$ 使得 $g(t_0,0)>0$；

(iii) 对任意的 $\lambda\in(0,1)$，$t\in[0,1]$ 和 $x,y\in[0,\infty)$，存在一个常数 $\gamma\in(0,1)$ 使得

$$f(t,\lambda x,\lambda^{-1}y)\geqslant\lambda^{\gamma}f(t,x,y);$$

(iv) 对任意 $t\in[0,1]$ 和 $x,y\in[0,+\infty)$，存在一个常数 $\delta_0>0$，使得 $f(t,x,y)\geqslant\delta_0 g(t,x)$，

则有

(i) 存在 $u_0,\upsilon_0\in P_h$，$\alpha\in(0,1)$，使得 $\alpha\upsilon_0\leqslant u_0\leqslant\upsilon_0$，且

$$u_0(t)\leqslant\int_0^1 G(t,s)f(s,u_0(s),\upsilon_0(\xi t))\mathrm{d}s+\int_0^1 G(t,s)g(s,u_0(s))\mathrm{d}s,$$

$$\upsilon_0(t)\geqslant\int_0^1 G(t,s)g(s),\upsilon_0(s),u_0(\xi t))\mathrm{d}s+\int_0^1 G(t,s)g(s,\upsilon_0(s))\mathrm{d}s,$$

其中 $h(t)=t,t\in[0,1]$；

(ii) 问题(1)有唯一正解 $x^*\in P_h(x^*(t)>0,t\in(0,1))$；

(iii) 对任意的 $x_0,y_0\in P_h$，以 x_0,y_0 为初始元素定义迭代序列

$$x_n(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x_{n-1}(s),y_{n-1}(\xi s))\mathrm{d}s+\int_0^1 G(t,s)g(s,x_{n-1}(s))\mathrm{d}s,$$

$$y_n(t)\geqslant\int_0^1 G(t,s)f(s,y_{n-1}(s),x_{n-1}(\xi s))\mathrm{d}s+\int_0^1 G(t,s)g(t,y_{n-1}(s))\mathrm{d}s,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-x^*\|=0.$$

证明 由引理 2.4，问题(1)的解等价于如下积分方程的解：

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x(\xi s))\mathrm{d}s+\int_0^1 G(t,s)g(s,x(s))\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

定义算子 $A:P\times P\to P$ 为

$$A(u,\upsilon)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),\upsilon(\xi s))\mathrm{d}s.$$

定义算子

$B:P\to P$ 为

$$(Bu)(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

其中 $t\in[0,1]$，$u,\upsilon\in P$. 当且仅当 $x=A(x,x)+Bx$

时,x 为积分方程(1)的解.

接下来我们验证定理 2.3 的所有条件是否满足. 由(i)可知,A 是一个混合单调算子,B 是增函数. 由条件(iii),对任意的 $\lambda\in(0,1)$,$x,y\in P$,有

$$A(\lambda x,\lambda^{-1}y)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,\lambda x(s),\lambda^{-1}y(\xi s))\mathrm{d}s\geqslant \lambda^{\gamma}\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),y(\xi s))\mathrm{d}s=\lambda^{\gamma}A(x,y)(t),\gamma\in(0,1).$$

这说明算子 A 满足定理 2.3 中的条件.

接下来我们证明 B 是一个可齐次算子. 对任意的 $\lambda\in(0,1)$,$x\in P$,考虑(ii)则有

$$B(\lambda x)(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,\lambda x(s))\mathrm{d}s\geqslant \lambda\int_0^1 G(t,s)g(s(s,x(s))\mathrm{d}s=\lambda(Bx)(t).$$

从而 B 是一个可齐次算子.

然后我们后来证 $A(h,h)\in P_h$,$Bh\in P_h$. 当 $h\in P$ 时,定义函数 $h(t)=t$,$t\in[0,1]$. 由引理 2.5 和条件(i)有

$$A(h,h)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,h(s),h(\xi s))\mathrm{d}s\leqslant (\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})\cdot t\int_0^1 f(s,1,0)=h(t)\int_0^1(\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})f(s,1,0)\mathrm{d}s.$$

另一方面

$$A(h,h)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,h(s),h(\xi s))\mathrm{d}s\geqslant \frac{ts\sigma}{2(1-\mu)}\int_0^1 f(s,h(s),h(\xi s))\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\frac{s\sigma}{1-\mu}f(s,0,1)\mathrm{d}s.$$

令

$$\alpha_1=\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\frac{s\sigma}{1-\mu}f(s,0,1)\mathrm{d}s,$$

$$\alpha_2=\int_0^1(\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})f(s,1,0)\mathrm{d}s.$$

则 $\alpha_1 h\leqslant \mathrm{A}(h,h)\leqslant\alpha_2 h$.

接下来我们证明 $\alpha_i>0$, $i=1,2$. 实际上,因为 $g(t_0,0)>0$,$t_0\in[0,1]$,由 f 和 g 的连续性,我们可以找到一个子集 $E\subset[0,1]$使得 $t_0\in E$,$\mu(E)>0$,其中 μ 表示勒贝格度量,$g(t,0)>0$,$t\in E$. 由条件(iv)可得到 $f(s,0,1)\geqslant\delta_0 g(s,0)\geqslant0$. 所以

$$\alpha_1=\int_0^1\frac{1}{2}(\frac{\mu(1-s)}{1-\mu})f(s,0,1)\mathrm{d}s\geqslant \int_E\frac{1}{2}(\frac{\mu(1-s)}{1-\mu})\delta_0 g(s,0)\mathrm{d}s>0.$$

故 $A(h,h)\in \mathrm{P}_h$.

再由引理 2.5 和条件(i)有

$$(Bh)(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,h(s))\mathrm{d}s\leqslant (\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})\cdot t\int_0^1 g(s,h(s))\mathrm{d}s\leqslant h(t)\int_0^1(\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})g(s,1)\mathrm{d}s.$$

另一方面,因 $0\leqslant h(t)\leqslant1$, 对任意的 $t\in[0,1]$, 有

$$(Bh)(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,h(s))\mathrm{d}s\geqslant h(t)\int_0^1\frac{1}{2}(\frac{\mu(1-s)}{1-\mu})g(s,0)\mathrm{d}s.$$

令

$$\beta_1=\int_0^1\frac{1}{2}(\frac{\mu(1-s)}{1-\mu})g(s,0)\mathrm{d}s,$$

$$\beta_2=\int_0^1(\frac{2-s-\mu(1-s)}{1-\mu})g(s,1)\mathrm{d}s.$$

则 $\beta_1 h\leqslant Bh\leqslant\beta_2 h$. 为了证明 $Bh\in P_h$,即 $\beta_i>0$,$i=1,2$,需证 $\beta_1>0$. 又

$$\beta_1=\int_0^1\frac{1}{2}(\frac{\mu(1-s)}{1-\mu})g(s,0)\mathrm{d}s\geqslant \int_E\frac{1}{2}(\frac{\mu(1-s)}{1-\mu})g(s,0)\mathrm{d}s>0,$$

则 $Bh\in P_h$.

最后证明定理 2.3 中的假设条件(i)满足. 由 $u,\upsilon\in P$,$t\in[0,1]$及条件(iv)有

$$A(u,\upsilon)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),\upsilon(\xi s))\mathrm{d}s\geqslant \delta_0\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))=\delta_0 Bu(t),$$

即 $A(u,\upsilon)\geqslant\delta_0 Bu$. 因此,由定理 2.3,对任意的 $t\in[0,1]$,$0<h(t)=t$,问题(1)有一正解 $x^*\in P_h$. 证毕

4　例　子

考虑非线性边值问题

$$\begin{cases}-u'''(t)=t+t+4\sqrt{u(t)}+\dfrac{1}{\sqrt{u(\frac{1}{4}t)+2}},\\ \qquad t\in(0,1),\\ u(0)=u''(1)=0,u'(0)=\int_0^1 q(t)u'(t)\mathrm{d}t\end{cases}$$

正解的存在性,其中 $f(t,u,\upsilon)=t+2\sqrt{u}+\dfrac{1}{\sqrt{\upsilon+2}}$,$g(t,u)=t^3+2\sqrt{u}$,$\xi=\dfrac{1}{4}$. 显然 $f:[0,1]\times$

$[0,+\infty)^2\to[0,+\infty)$连续,$g:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$连续,且 $g(\frac{1}{4})>0$. 因此,定理 3.1 中条件(i)是满足的. 此外,易得条件(ii)也是满足的. 对任意的 $t\in[0,1]$,$x>0$,且 $\lambda\in(0,1)$. 我们有 $g(t,\lambda x)=t^3+2\sqrt{\lambda x}>\lambda(t^3+2\sqrt{x})=\lambda g(t,x)$,其中由函数 $y=\lambda^x$, $\lambda\in(0,1)$的递减性得定理 3.1 中条件(iii)是满足的. 另一方面,对任意的 $t\in[0,1]$, $x,y\geqslant 0$,$\lambda\in(0,1)$,有

$$f(t,\lambda x,\lambda^{-1}y)=t+2\sqrt{\lambda x}+\frac{1}{\sqrt{\lambda^{-1}y+2}}=$$
$$t+2\sqrt{\lambda}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{y+2\lambda}}>$$
$$\sqrt{\lambda}(t+2\sqrt{\lambda x}+\frac{1}{\sqrt{\lambda^{-1}y+2}})=$$
$$\sqrt{\lambda}f(t,x,y).$$

从而定理 3.1 中的条件(iv)是满足的.

最后,因 $\gamma=\frac{1}{4}$,则对 $t\in[0,1]$,$x,y\geqslant 0$ 有 $f(t,x,y)=t+2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{y+2}}>t+2\sqrt{x}>t^3+2\sqrt{x}=g(t,x)$,$\delta_0=1$. 因此定理 3.1 中的条件(v)也是满足的. 由定理 3.1 知问题(3)有唯一正解 $u^*\in C[0,1]$,且 $u^*\in P_h$,其中 $h(t)=t$,$t\in[0,1]$.

参考文献:

[1] 赵亚红，靳存程. 带积分边界条件的三阶边值问题的单调正解[J]. 兰州理工大学学报：自然科学版，2014，40：165.

[2] Cabrera I J，López B，Sadarangani K. Application of the mixed monotone operator to a nonlinear third-order boundary value problem[J]. Rev R Acad，2018，112：1317.

[3] 郝彩云，王文霞，鞠梦兰. 带积分边界条件的三阶微分方程凸单调正解的存在唯一性[J]. 烟台大学学报：自然科学与工程版，2017，30：11.

[4] Cabrera I J，López B，Sadarangani K. Existence of positive solutions for the nonlinear elastic beam equation via a mixed monotone operator [J]. J Comput Appl Math，2018，327：306.

[5] 金翻霞. 带积分边界条件的三阶非齐次边值问题的单调正解[J]. 佳木斯职业学院学报，2018，187：254.

[6] 孙建平，靳存程. 带积分边界条件的三阶边值问题的单调正解[J]. 兰州大学学报:自然科学版，2012，48：98.

[7] Zhai C B，Anderson D R. A sum operator equation and applications to nonlinear elastic beam equations and Lane-Emden-Fowler equations [J]. J Math Anal Appl，2011，375：388.

[8] Guo D J，Lakshmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operators with application [J]. Nonlinear Anal，1987，11：623.

[9] Gupta C P. Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation [J]. Appl Anal，1988，26：289.

[10] Ma R Y，Wang J X，Long Y. Lower and upper solution method for the problem of elastic beamwi～th hinged ends [J]. J Fixed Point Theory Appl，2018，20：1.

[11] 王文霞. 非线性方程的单调迭代方法[M]. 北京：中国科学技术出版社，2007.

引用本文格式:

中　文：何燕琴，韩晓玲. 一类带积分边界条件的三阶边值问题正解的存在唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：852.

英　文：He Y Q，Han X L. The existence and uniqueness of positive solutions for a class of third-order boundary value problems with integral boundary conditions [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2020，57：852.