2021 年 5 月 四川大学学报(自然科学版) May 2021
第 58 卷 第 3 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 58 No. 3

非定常 Navier-Stokes 方程的一种非线性局部投影稳定化有限元方法

李 西[1]，罗加福[2]，冯民富[1]
(1. 四川大学数学学院，成都 610064；2. 成都体育学院，成都 610041)

摘 要：针对非定常 Navier-Stokes 方程，本文提出了一种基于非线性对流项和压力梯度的局部投影稳定化有限元方法. 该方法在空间上采用等阶有限元，时间上采用隐式有限差分. 本文建立了非定常 Navier-Stokes 方程的全离散数值格式，进而分析了离散解的稳定性和收敛性. 值得注意的是，该方法中得到的误差估计随着流体雷诺数的增大依然有效.

关键词：非定常 Navier-Stokes 方程；局部投影；雷诺数；非 inf-sup 稳定
中图分类号：O241.82 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.031002

A nonlinear local projection-based finite element method for unsteady Navier-Stokes equations

LI Xi[1], *LUO Jia-Fu*[2], *FENG Min-Fu*[1]
(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;
2. Chengdu Sports University, Chengdu 610041, China)

Abstract: In this study, a stable local projection finite element method is proposed for unsteady Navier-Stokes equations. This method is formed by local projection of advection term and pressure gradient. By using the equal-order conforming finite elements in space and implicit finite difference scheme in time, we derive a fully discrete formulation and obtain the stability and convergence of the approximation solution. Notably, the error estimates hold even for large Reynolds numbers.

Keywords: Unsteady Navier-Stokes equation; Local projection stabilization; Reynolds number; Non-inf-sup stability
(2010 MSC 65M60)

1 引 言

粘性不可压缩 Navier-Stokes 方程(NS 方程)的混合有限元离散通常会出现两个难点:需满足经典的 inf-sup 条件和需要克服由高雷诺数(Reynolds number，Re)导致的数值震荡.

为了解决上述两个问题，大量专家学者提出了不同的稳定化方法. 比如，为了克服对流-扩散方程中对流占优时所引起的数值震荡，Brooks 和 Hughes[1] 提出了 Streamline Upwind Petrov-Galerkin 方法(SUPG)，并将其推广到不可压缩非定常 NS 方程. 随后，Hughes 和 Franca 等[2] 发现 SUPG 法不仅可以保持格式的相容性，不损失解的逼近性，还能增强离散解的稳定性——可利用 SUPG 法避免 inf-sup 条件从而得到了速度和压力的等阶有限元插值. 这种用来稳定离散压力的

收稿日期：2020-05-06
基金项目：国家自然科学基金(11971337，11271273)
作者简介：李西(1994－)，男，硕士研究生，主要研究方向为微分方程数值解. E-mail：lixi_cd@126.com

Petrov-Galerkin 变分又被称为 Pressure Stabilized Petrov-Galerkin(PSPG). 虽然 SUPG/PSPG 既可以做到避免 inf-sup 条件,又可以得到对高 Re 依然有效的先验误差估计,但需在经典的 Galerkin 变分格式中引入最小二乘项,导致稳定项中含有非物理耦合项,从而在用高阶元近似时稳定化格式中需要计算二阶导数[3-4]. 随后,Becker 和 Braack 提出的 Local Projection Stabilization 方法(LPS)[5]很好地解决了上述不足. 与 SUPG 相比,LPS 中添加的稳定项中不含有速度-压力的耦合项,并且不需要计算二阶导数,也可以避免 inf-sup 条件和克服对流占优. 正因如此,LPS 从提出到现在得到了充分地发展. 从文献[5]中首次采用 LPS 来处理 Stokes 问题之后,LPS 被推广到了运输方程[6],Oseen 方程的低阶离散[7],NS 方程[8-9]以及其它一些相关工作[10-12].

在处理由高 Re 带来的数值震荡时,Burman 和 Fernandez 等[13]采用了 Bertoluzza 在文献[14]中证明了的离散 commutator 性质,得到的误差估计随着流体 Re 的增大依然有效,即该数值格式可以克服由高 Re 带来的数值震荡. 之后, Chen 和 Feng 等[9]以及 Frutos 和 Garcia 等人[12,15]将上述技巧用在 NS 方程的 LPS 方法中,同样得到了对高 Re 依然有效的误差估计.

本文在文献[9,11-12,16]基础上,提出了一种基于非线性项的局部投影稳定格式,其中时间半隐格式中的非线性局部投影项等价于文献[16]中的 SUPG-type 稳定项和文献[11]中的高阶 term-by-term 稳定项(因而本文提出的非线性局部投影可看做是该两类稳定方法的非线性推广),对速度-压力我们采用等阶元(P^k, P^k)进行逼近,并添加局部压力梯度投影稳定化项克服 inf-sup 条件. 在分析离散解的先验误差估计时,我们采用 Bertoluzza[14]提出的离散 commutator 性质,得到的误差估计右端项的常系数中不含有粘性系数的倒数 $1/\nu$,使得当流体的 Re 增大(即流体的粘性系数 ν 减小)时该误差估计依然有效.

2　半离散稳定化有限元格式

设 $\Omega\in\mathbf{R}^d(d=2,3)$是一个有界多边形$(d=2)$或多面体$(d=3)$区域,边界 $\Gamma=\partial\Omega$. $W^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$表示在 Ω 上的 m-阶 Sobolev 空间, $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$和$|\cdot|_{W^{m,p}(\Omega)}$为该空间上的范数和半范数. 特别地,当 $p=2$ 时,

$$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega),$$
$$H_0^m(\Omega)=W_0^{m,2}(\Omega),$$
$$\|\cdot\|_{m,M}=\|\cdot\|_{H^m(M)},$$
$$\|\cdot\|_{k,\infty,M}=\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(M)}.$$

当 $M=\Omega$ 时,我们省略下标 M,即 $\|\cdot\|_m=\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{k,\infty}=\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, 其中 $k=1,2$ 是一个整数. 我们分别用 L^p, H^s 和 $W^{m,p}$来表示相应于L^p, H^s 和 $W^{m,p}$的向量值 Sobolev 空间,以及

$$(v_h,q_h)_M=\int_M v_h q_h\,\mathrm{d}x.$$

设 X 为 Sobolev 空间, 定义映射 $\varphi(x,t):[0,T]\to X$,

$$\|\varphi\|_{L^2(t_n,t_{n+1};X)}:=\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\varphi(\cdot,\tau)\|_X^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2},$$
$$\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;X)}:=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi(\cdot,t)\|_X,$$

并简记 $\|\varphi\|_{L^p(X)}=\|\varphi\|_{L^p(0,T;X)}$, $p=2$ 或∞.

取时间区间 $I=[0,T]$, 其中 T 为一个固定的正常数. 非定常不可压缩粘性流体的流动由以下非定常 Navier-Stokes 方程表示:

$$\begin{cases}\partial_t u+u\cdot\nabla u-\nu\Delta u+\nabla p=f & \text{in } \Omega\times I,\\ \nabla\cdot u=0 & \text{in } \Omega\times I,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega\times I,\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases}\tag{1}$$

其中 $u=u(x,t)\in\mathbf{R}^d$, $p=p(x,t)\in\mathbf{R}$, $f=f(x,t)\in R^d$ 分别表示不可压缩粘性流体流动的速度场, 压力场和外力场. 设特征长度 L 和特征速度 U 均为单位 1. 于是该系统的运动粘度系数 $\nu=Re^{-1}$, 其中 Re 为雷诺数.

定义 $X=H_0^1(\Omega)$, $Q=L_0^2(\Omega)$. 则式(1)的变分格式如下:

求$(u,p)\in X\times Q$, 满足

$$(\partial_t \boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u};\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\nu(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v})-(p,\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle,\ \forall\,\boldsymbol{v}\in V,\ (q,\nabla\cdot\boldsymbol{u})=0,\ \forall\, q\in Q\tag{2}$$

其中 $b(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=1/2[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})]$. 令 Λ_h 为区域 $\overline{\Omega}$ 的一组非退化网格剖分[17], 当 $d=2$时,为三角形或四边形; 当 $d=3$ 时,为四面体或六面体, h_K 为单元 $K\in\Lambda_h$ 的直径,并且记 $h=\max_{K\in\{\Lambda_h\}}h_K$. 给定任意一个非负整数 k, 当 K 为三角形单元时, 令 $P_k(K)$表示单元 K 上次数小于等于k 次的 Lagrange 多项式; 当 k 为四边形单元时, $Q_k(K)$表示单元 K 上的双k 次 Lagrange 多项式. 并且当该 Lagrange 多项式分别为单变量多项式或多变量多项式时, 记 $R_k(K)$为 $P_k(K)$或 $Q_k(K)$. 令

$$Y_h^l=\{q_h\in C^0(\Omega):q_h|_K\in R_l(K),\forall K\in\Lambda_h\}.$$

对速度 u 和压力 p 分别采用下述有限元空间 $X_h\times Q_h$，其中 $X_h=X\cap[Y_h^l]^d$，$Q_h=Q\cap Y_h^l$. 宏元 M 为一个或多个该三角划分 Λ_h 中相邻单元 K 的并集，h_M 为宏元 M 的直径，并假设区域 Ω 按宏元为单元划分成 $\widetilde{\Lambda}_h$ 时是不重叠且非退化的. 特别地，$h_M\sim h_K,\forall K\subset M,\forall M\in\widetilde{\Lambda}_h$.

令 D_h 为定义在宏元划分 $\widetilde{\Lambda}_h$ 上的间断有限元空间，且 $D_h(M)=\{v_h|_M:v_h\in D_h\}$. 定义 $\kappa_h=I-\Pi$，其中 $\Pi:L^2(M)\to D_h(M)$ 为局部稳定的 L^2 投影算子或 $\Pi:L^2(M)\to Y_h^{l-1}(M)$ 为局部稳定的插值算子. 定义

$$X_h(M)=\{v_h|_M:v_h\in V_h,v_h=0\text{ on }\Omega\backslash M\}.$$

由文献[17]，LPS 方法误差分析的关键在于存在一个插值算子 j 满足如下最优近似性质：

假设 2.1　令以下局部 inf-sup 条件成立：

$\exists\beta>0,\forall h>0,M\in\widetilde{\Lambda}_h$，

$$\inf_{q_h\in D_h(M),q_h\neq 0}\sup_{v_h\in X_h(M),v_h\neq 0}\frac{(v_h,q_h)_M}{\|v_h\|_{0,M}\cdot\|q_h\|_{0,M}}\geqslant\beta>0\tag{3}$$

由该局部 inf-sup 条件可以推导出插值算子 j_u 和 j_p 具有如下的正交性和近似性[17]：

引理 2.2　令假设 2.1 成立. 则存在两个插值算子 $j_u:X\to X_h$，$j_p:Q\to Q_h$ 满足以下的正交性和近似性[18]：

$$\begin{aligned}&(u-j_uu,v_h)=0,\forall u\in X,\forall v_h\in D_h,\\&(p-j_pp,q_h)=0,\forall p\in Q,\forall p_h\in D_h,\\&\|u-j_uu\|_0+h|u-j_uu|_1\leqslant\\&\quad Ch^{r+1}\|u\|_{r+1},\forall u\in X\cap H^{r+1}(\Omega),\\&\|p-j_pp\|_0+h|p-j_pp|_1\leqslant\\&\quad Ch^{r+1}\|p\|_{r+1},\forall p\in Q\cap H^{r+1}(\Omega),\\&\|u-j_uu\|_{0,\infty}+h|u-j_uu|_{1,\infty}\leqslant\\&\quad Ch\|u\|_{1,\infty},\forall u\in X\cap W^{1,\infty}(\Omega)\end{aligned}\tag{4}$$

下面我们给出 NS 方程的非线性局部投影稳定的空间半离散格式. $\forall t\in(0,T)$，求 $(u_h(t),p_h(t))\in X_h\times Q_h$，满足，$\forall(v_h,q_h)$，

$$\begin{aligned}&(\partial_t u_h,v_h)+\nu(\nabla u_h,\nabla v_h)+b(u_h;u_h,v_h)-\\&\quad(p_h,\nabla\cdot v_h)+S_{conv}(u_h;u_h,v_h)=\langle f,v_h\rangle,\\&\quad(q_h,\nabla\cdot u_h)+S_{pres}(p_h,q_h)=0\end{aligned}\tag{5}$$

其中

$$S_{conv}(u_h;u_h,v_h)=\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{1,M}(v_h\cdot\kappa_h(\nabla u_h),u_h\cdot\kappa_h(\nabla u_h))_{\mathrm{M}}.$$

$$S_{pres}(p_h,q_h)=\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{2,M}(\kappa_h(\nabla p_h),\kappa_h(\nabla q_h))_M.$$

其中 $\alpha_{1,M}$ 和 $\alpha_{2,M}$ 分别为相应于对流项和压力梯度项的局部投影稳定参数，并且满足以下假设.

假设 2.3　$\forall M\in\widetilde{\Lambda}_h$ 以及两个与 h 无关的正实数 α_1,α_2，稳定参数 $\alpha_{1,M}$ 和 $\alpha_{2,M}$ 满足

$$\alpha_{1,M}=\alpha_1h^{m_1},\quad\alpha_{2,M}=\alpha_2h^{m_2},$$

其中 m_1,m_2 为稳定参数的阶，其具体数值在后文的误差分析中给出.

3　含稳定项的全离散格式

接下来我们对空间半离散格式(5)做时间上的有限差分. 一般说来，时间差分上的全隐格式为无条件稳定，但每层时间上需解一个非线性方程组，全显格式在计算模拟时具有优势，但为了格式的稳定性需对时间步长 Δt 有诸多限制. 一种通常的做法是线性项采用隐式格式，非线性项采用显示格式. 下面我们给出(5)的不同时间差分格式.

令 $\Delta t=T/N$ 为时间步长，其中 N 为一正整数，$t_n=n\Delta t$. 用 $(u_h^n,p_h^n):=(u_h(\cdot,t_n),p_h(\cdot,t_n))$ 来近似 (u_h,p_h). 于是，对于给定的初始速度的近似 u_h^0，$n=0,1,\ldots,N-1$，我们有

格式 1(半隐格式)　对线性项采用隐式格式，对非线性项采用显示/隐式交替格式，求 $(u_h^{n+1},p_h^{n+1})\in X_h\times Q_h$，使得对任意 (v_h,q_h)，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},v_h\right)+\nu(\nabla u_h^{n+1},\nabla v_h)+\\&\quad b(u_h^n;u_h^{n+1},v_h)-(p_h^{n+1},\nabla\cdot v_h)+\\&\quad S_{conv}(u_h^n;u_h^{n+1},v_h)=\langle\bar{f}^{n+1},v_h\rangle,\\&\quad(q_h,\nabla\cdot u_h^{n+1})+S_{pres}(p_h^{n+1},q_h)=0\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$\bar{f}^{n+1}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau.$$

注意到该格式中的非线性局部投影项实为线性型：

$$S_{conv}(u_h^n;u_h^{n+1},v_h)=\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{1,M}(u_h^n\cdot\kappa_h(\nabla u_h^{n+1}),u_h^n\cdot\kappa_h(\nabla v_h))_M,$$

此时从程序实现时做数值积分的角度可知，该项等价于以下两种线性化对流项的局部投影：

(1) 高阶 term-by-term 稳定项[11]

$$s_{conv}(u_h^n;u_h^{n+1},v_h)=\sum_{K\in\widetilde{\Lambda}_h}\tau_{\nu,K}(\sigma_h^*(u_h^n\cdot\nabla u_h^{n+1}),\sigma_h^*(u_h^n\cdot\nabla v_h))_K;$$

(2) SUPG-type 的局部投影稳定项[16]

$$s_h(u_h;u_h,v_h)=\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\tau_M(u_M)\cdot$$

$$(\kappa_M((u_M\cdot\nabla)u_h),\kappa_M((u_M\cdot\nabla)v_h))_M.$$

其中u_M 为流场速度 u 的局部投影平均

$$u_M:=|M|^{-1}\int_M (j_u u)(x)\mathrm{d}x.$$

格式 2(全隐格式) 在格式 1(半隐格式)的基础上, 对非线性项采用隐式格式,求$(u_h^{n+1},p_h^{n+1})\in X_h\times Q_h$,使得对任意$(v_h,q_h)$

$$\begin{aligned}&(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},v_h)+\nu(\nabla u_h^{n+1},\nabla v_h)+\\&b(u_h^{n+1};u_h^{n+1},v_h)-(p_h^{n+1},\nabla\cdot v_h)+\\&S_{conv}(u_h^{n+1};u_h^{n+1},v_h)=\langle\bar{f}^{n+1},v_h\rangle,\\&(q_h,\nabla\cdot u_h^{n+1})+S_{pres}(p_h^{n+1},q_h)=0\end{aligned}\tag{7}$$

格式 3(Crank-Nicklson 格式) 相对于格式 2(全隐格式)的一阶时间精度全隐格式, 我们给出具有二阶时间精度的全隐格式如下: 求$(u_h^{n+1},p_h^{n+1/2})\in X_h\times Q_h$, 使得

$$\begin{aligned}&(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},v_h)+\nu(\nabla u_h^{n+1/2},\nabla v_h)+\\&b(u_h^{n+1/2};u_h^{n+1/2},v_h)-(p_h^{n+1/2},\nabla\cdot v_h)+\\&S_{conv}(u_h^{n+1/2};u_h^{n+1/2},v_h)=\langle f^{n+1/2},v_h\rangle,\\&(q_h,\nabla\cdot u_h^{n+1/2})+S_{pres}(p_h^{n+1/2},q_h)=0\end{aligned}\tag{8}$$

其中

$$u_h^{n+1/2}=\frac{u_h^n+u_h^{n+1}}{2},$$

$$p_h^{n+1/2}=p(\cdot,\frac{t^n+t^{n+1}}{2}),$$

$$f^{n+1/2}=f(\cdot,\frac{t_n+t_{n+1}}{2}).$$

下文我们将给出格式 2 的稳定性和收敛性分析. 在前面的讨论中我们知道,格式 1 中的非线性局部投影稳定项可等价于文献[16]中提出的 SUPG-type 的稳定项和文献[11]中的高阶 term-by-term 稳定项. 为简洁起见,我们略去格式 3 中离散解的稳定性和收敛性分析.

4 稳定性与收敛性分析

本节我们给出全离散格式(7)的稳定性与收敛性分析. 为此我们需要一些必要的假设和不等式, 并且为了记法的简洁,我们定义

$$\begin{aligned}&\|(v_h,q_h)\|_{LPS}^2=\nu\|\nabla v_h\|_0^2+\\&S_{conv}(u_h^{n+1};v_h,v_h)+S_{pres}(q_h,q_h),\\&\forall(v_h,q_h)\in X_h\times Q_h.\end{aligned}$$

在算子 Π 的定义中,曾假设 Π 具有局部稳定性及近似性[18],即

引理 4.1 存在一个与 d,m,p 以及网格划分比率 ρ 无关的常数 $C\geqslant 0$, 使得对任意 $v\in W^{m,p}(\Omega)$, $\|v-\Pi(v)\|_{m,p}\leqslant Ch^{s-m+\frac{d}{p}-\frac{d}{2}}\|v\|_s$,其中 $1\leqslant p\leqslant\infty,0\leqslant m\leqslant s$,$s$ 为一固定整数,及存在另一个常数 C, 使得对任意 $M\in\widetilde{\Lambda}_h,v\in L^2(M)$,

$$\|\Pi(v)\|_{0,M}\leqslant C\|v\|_{0,M}.$$

注 1 有好几类算子满足上式给出的最优近似性和局部稳定性,如文献[19]中的 Scott-Zhang-like 算子以及文献[20]中的插值算子.

如文献[12,21]中所述, 误差分析要做到与 $1/\nu$一致的关键在于 Bertoluzza 所证明的离散 commutator 性质, 即

引理 4.2 对于任意的 $u\in W^{1,\infty}(\Omega),v_h\in V_h$, 以下不等式成立:

$$\|(I-\Pi)(u\cdot v_h)\|_0\leqslant Ch\|u\|_{1,\infty}\|v_h\|_0.$$

令 $u_h^0=u_h(\cdot,t_0)=u_h(\cdot,0):=R_h u_0\in X_h$ 为u_0 的 Stokes 投影. 下面我们给出离散解的稳定性分析及收敛性分析.

定理 4.3(离散速度的稳定性) 令(u_h^{n+1},p_h^{n+1})为方程组(7)的解, 初值u_0 和外力项 f 满足 $u_0\in L^2(\Omega)$, $f\in L^\infty(L^2(\Omega))$. 于是对任意的 $C_0\geqslant 1+\Delta t$, 我们有以下的离散速度稳定性:

$$\begin{aligned}&\|u_h^{n+1}\|_0^2+2\Delta t\sum_{i=0}^n\|(u_h^{i+1},p_h^{i+1})\|_{LPS}^2\leqslant\\&\frac{C_0}{C_0-\Delta t}\exp(\frac{T}{C_0-\Delta t})(C_0T\|f\|_{L^\infty(L^2(\Omega))}^2+\\&C\|u_0\|_0^2)\end{aligned}\tag{9}$$

证明 在(7)式中令测试函数为$(v_h,q_h)=(u_h^{n+1},p_h^{n+1})$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}&(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},u_h^{n+1})+\|(u_h^{n+1},p_h^{n+1})\|_{LPS}^2=\\&\langle\bar{f}^{n+1},u_h^{n+1}\rangle\leqslant\frac{C_0}{2}\|\bar{f}^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2C_0}\|u_h^{n+1}\|_0^2.\end{aligned}$$

再次利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},u_h^{n+1})\geqslant\frac{1}{\Delta t}(\frac{1}{2}\|u_h^{n+1}\|_0^2-\frac{1}{2}\|u_h^n\|_0^2).$$

利用上两式,再将(7)式乘上 $2\Delta t$,并从 0 加到 n 得

$$\begin{aligned}&\|u_h^{n+1}\|_0^2-\|u_h^0\|_0^2+\\&2\Delta t\sum_{i=0}^n\|(u_h^{i+1},p_h^{i+1})\|_{LPS}^2\leqslant\\&C_0\Delta t\sum_{i=0}^n\|\bar{f}^{i+1}\|_0^2+\frac{\Delta t}{C_0}\sum_{i=0}^n\|u_h^{i+1}\|_0^2.\end{aligned}$$

对任意的 $1+\Delta t<C_0$, 由离散 Gronwall 不等式[22]可得

$$\|u_h^{n+1}\|_0^2 \leqslant \frac{C_0}{C_0-\Delta t}\exp\left(\frac{T}{C_0-\Delta t}\right)\cdot \left(-2\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|(u_h^{i+1},p_h^{i+1})\|_{LPS}^2 + C_0\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\bar{f}^{i+1}\|_0^2+\|u_0\|_0^2\right).$$

利用

$$C_0(N+1)\geqslant\Delta t\Leftrightarrow 1\leqslant\left(1+\frac{T}{C_0-\Delta t}\right)\frac{C_0}{C_0-\Delta t}\Leftrightarrow 1\leqslant\frac{C_0}{C_0-\Delta t}e^{\frac{T}{C_0-\Delta t}}$$

和 Stokes 投影的有界性及$\bar{f}^{n+1}$的定义，命题得证.

定理 4.4（离散压力的稳定性）　对任意的 $p_h\in Q_h$，存在一个与 $h,\Delta t$ 和 ν 无关的正实数 β，使得

$$\sup_{v_h\in X_h,v_h\neq 0}\frac{(\nabla\cdot v_h,p_h)}{|v_h|_1}+Ch\|\kappa_h\nabla p_h\|_0\geqslant \beta\|p_h\|_0 \tag{10}$$

证明　由连续 inf-sup 条件可知，对任意 $p_h\in Q_h\subset Q$，存在 $v\in X$ 使得

$$\nabla\cdot v=p_h,\ |v|_1\leqslant C\|p_h\|_0.$$

由 Green 公式，(4)式中给出的算子j_u 的正交性和近似性以及 Poincaré 不等式可得

$$\begin{aligned}\|p_h\|_0^2&=(\nabla\cdot v,p_h)=\\&(\nabla\cdot(v-j_uv),p_h)+(\nabla\cdot j_uv,p_h)=\\&-(v-j_uv,\kappa_h\nabla p_h)+(\nabla\cdot j_uv,p_h)\leqslant\\&Ch|v|_1\cdot\|\kappa_h\nabla p_h\|_0+(\nabla\cdot j_uv,p_h).\end{aligned}$$

又由$j_u:X\to X_h$ 有

$$\begin{aligned}\|p_h\|_0&\leqslant C\frac{\|p_h\|_0^2}{|v|_1}\leqslant\\&C\frac{Ch|v|_1\cdot\|\kappa_h\nabla p_h\|_0+(\nabla\cdot j_uv,p_h)}{|v|_1}\leqslant\\&Ch\|\kappa_h\nabla p_h\|_0+C\frac{(\nabla\cdot j_uv,p_h)}{|v|_1}.\end{aligned}$$

定理得证.

定理 4.5（离散速度的误差估计）　令$(u,p)\in X\times Q$ 为问题(1)的解. 我们假设$\partial_t f\in L^\infty(L^2)$及$(u,p)$有额外的正则性，即$(u,p)\in C^0(H^{s+1})\times C^0(H^{s+1})$. 又令存在常数 C，使得

$$\|\partial_t u\|_{L^\infty(H^{s+1})}+\|\partial_{tt}u\|_{L^\infty(L^2)}+\|u\|_{L^\infty(W^{1,\infty})}\leqslant C.$$

设全离散格式(7)的解为$(u_h^{n+1},p_h^{n+1})\in X_h\times Q_h$. 于是有以下的误差估计成立：

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|_{L^\infty(L^2)}^2+\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|(u-u_h^{i+1},p-p_h^{i+1})\|_{LPS}^2\leqslant\\&C((\nu+1+h^2)h^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+h^{2s+2}\|\partial_t u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+\\&(h^2+1)h^{2s}\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+(\Delta t)^2)\end{aligned}\tag{11}$$

证明　记

$$\begin{aligned}(u^n,p^n)-(u_h^n,p_h^n)&=(u^n-j_uu^n,p^n-j_pp^n)+\\&(j_uu^n-u_h^n,j_pp^n-p_h^n):=(\eta_u^n,\eta_p^n)+(e_u^n,e_p^n).\end{aligned}$$

在式(2)中令时间 $t=t_{n+1}$后减去式(7)，并令测试函数$(v,q)=(v_h,q_h)=(e_u^{n+1},e_p^{n+1})$可得如下的速度的误差方程：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{e_u^{n+1}-e_u^n}{\Delta t},e_u^{n+1}\right)+\nu\|\nabla e_u^{n+1}\|_0^2=\\&-\left(\partial_t u^{n+1}-\frac{j_uu^{n+1}-j_uu^n}{\Delta t},e_u^{n+1}\right)+\\&b(u_h^{n+1};u_h^{n+1},e_u^{n+1})-b(u^{n+1};u^{n+1},e_u^{n+1})-\\&\nu(\nabla\eta_u^{n+1},\nabla e_u^{n+1})+(\eta_p^{n+1},\nabla\cdot e_u^{n+1})-\\&(e_p^{n+1},\nabla\cdot\eta_u^{n+1})+S_{conv}(u_h^{n+1};u_h^{n+1},e_u^{n+1})+\\&S_{pres}(p_h^{n+1},e_p^{n+1})+\langle f^{n+1}-\bar{f}^{n+1},e_u^{n+1}\rangle:=\\&E_1+E_2+E_3+E_4+E_5+E_6.\end{aligned}$$

由 Young 不等式可得

$$\left(\frac{e_u^{n+1}-e_u^n}{\Delta t},e_u^{n+1}\right)\geqslant\frac{1}{\Delta t}\left(\frac12\|e_u^{n+1}\|_0^2-\frac12\|e_u^n\|_0^2\right).$$

由

$$\begin{aligned}&\left|\partial_t u^{n+1}-\frac{j_uu^{n+1}-j_uu^n}{\Delta t}\right|=\\&\left|\left(\partial_t u^{n+1}-\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}\right)+\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}-\frac{j_uu^{n+1}-j_uu^n}{\Delta t}\right)\right|\leqslant\\&\left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_n)\partial_{tt}u\,\mathrm{d}\tau\right|+\left|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\partial_t(u-j_uu)\,\mathrm{d}\tau\right|,\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式，Young 不等式及(4)式可得

$$\begin{aligned}|E_1|&=\left|\left(\partial_t u^{n+1}-\frac{j_uu^{n+1}-j_uu^n}{\Delta t},e_u^{n+1}\right)\right|\leqslant\\&C\left(\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_{tt}u\|_0^2\mathrm{d}\tau+\frac{1}{\Delta t}h^{2(s+1)}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t u\|_{s+1}^2\mathrm{d}\tau\right)+C\|e_u^{n+1}\|_0^2.\end{aligned}$$

关于对流项之差，我们将其分成如下形式：

$$\begin{aligned}E_2&=b(u_h^{n+1};u_h^{n+1},e_u^{n+1})-b(u^{n+1};u^{n+1},e_u^{n+1})=\\&-b(u^{n+1};\eta_u^{n+1},e_u^{n+1})-b(\eta_u^{n+1};u^{n+1},e_u^{n+1})+\\&b(\eta_u^{n+1};\eta_u^{n+1},e_u^{n+1})-b(e_u^{n+1};u^{n+1},e_u^{n+1})+\\&b(e_u^{n+1};\eta_u^{n+1},e_u^{n+1}):=\end{aligned}$$

$$E_{21}+E_{22}+E_{23}+E_{24}+E_{25},$$

这里我们利用了 $b(u;v,v)=0$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式,u 的正则性,(4)式,逆不等式以及 Young 不等式有

$$|E_{21}|=\frac{1}{2}|(u^{n+1}\nabla\eta_u^{n+1},e_u^{n+1})-(u^{n+1}\nabla e_u^{n+1},\eta_u^{n+1})|\leqslant Ch^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

类似地,有

$$|E_{22}|=\frac{1}{2}|(\eta_u^{n+1}\cdot\nabla u^{n+1},e_u^{n+1})-(\eta_u^{n+1}\cdot\nabla e_u^{n+1},u^{n+1})|\leqslant Ch^{2s}(h^2+1)\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2,$$

$$|E_{23}|=\frac{1}{2}|(\eta_u^{n+1}\cdot\nabla\eta_u^{n+1},e_u^{n+1})-(\eta_u^{n+1}\cdot\nabla e_u^{n+1},\eta_u^{n+1})|\leqslant Ch^{2s+2}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2,$$

及

$$|E_{24}+E_{25}|=b(e_u^{n+1};j_u u^{n+1},e_u^{n+1})=(e_u^{n+1}\cdot\nabla j_u u^{n+1},e_u^{n+1})+\frac{1}{2}(\nabla\cdot e_u^{n+1},e_u^{n+1}j_u u^{n+1}).$$

对于上式右端的第一项,注意到$j_u u^n\in X_h\subseteq H_0^1$,于是有 $\|j_u u^n\|_{W^{k,\infty}}\leqslant\|u^n\|_{W^{k,\infty}}$,$k=0,1$,即

$$(e_u^{n+1}\cdot\nabla j_u u^{n+1},e_u^{n+1})\leqslant\|\nabla j_u u^{n+1}\|_{0,\infty}\cdot\|e_u^{n+1}\|_0^2\leqslant C\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

对于第二项,我们采用文献[9]中的技巧,有

$$(\nabla\cdot e_u^{n+1},e_u^{n+1}j_u u^{n+1})=(\nabla\cdot e_u^{n+1},\kappa_h(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))+(\nabla\cdot e_u^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})).$$

令

$$C_0=\int_\Omega\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})\mathrm{d}x.$$

在方程式(2)中取时间 $t=t_{n+1}$后减去(7)式,取测试函数为

$$(v,q)=(v_h,q_h)=(0,\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})-C_0)\in X_h\times Q_h$$

后有

$$(\nabla\cdot e_u^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))=S_{pres}(p_h^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))-(\nabla\cdot\eta_u^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})).$$

对于上式(4)右端第一项,我们有

$$S_{pres}(p_h^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))=S_{pres}(j_p p^{n+1}-e_p^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))\leqslant Ch^{m_2}\|\kappa_h(\nabla(j_p p^{n+1}-e_p^{n+1}))\|_0^2+Ch^{m_2}\|\kappa_h(\nabla(\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})))\|_0^2.$$

将(4)式及逆不等式应用于上式第一项可得

$$h^{m_2}\|\kappa_h(\nabla(j_p p^{n+1}-e_p^{n+1}))\|_0^2\leqslant\frac{1}{4}S_{pres}(e_p^{n+1},e_p^{n+1})+Ch^{m_2}\|\kappa_h\nabla p^{n+1}\|_0^2+Ch^{m_2}\|\kappa_h\nabla\eta_p^{n+1}\|_0^2\leqslant\frac{1}{4}S_{pres}(e_p^{n+1},e_p^{n+1})+Ch^{2s+m_2}\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2.$$

对于最后一项,我们再一次利用不等式

$$\|j_u u^n\|_{W^{k,\infty}}\leqslant\|u^n\|_{W^{k,\infty}},k=0,1$$

以及(4)式,逆不等式和算子 Π 的稳定性,得

$$h^{m_2}\|\kappa_h(\nabla(\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})))\|_0^2\leqslant Ch^{m_2-2}\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\|e_u^{n+1}j_u u^{n+1}\|_{0,M}^2\leqslant Ch^{m_2-2}\|j_u u^{n+1}\|_{0,\infty}^2\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\|e_u^{n+1}\|_{0,M}^2\leqslant Ch^{m_2-2}\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

由逆不等式和(4)式,我们得到了最后一项的估计如下:

$$(\nabla\cdot\eta_u^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))\leqslant\|\nabla\cdot\eta_u^{n+1}\|_0\cdot\|\Pi(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})\|_0\leqslant Ch^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+\sum_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\|e_u^{n+1}\|_{0,M}^2\leqslant Ch^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

由引理 4.2 有

$$(\nabla\cdot e_u^{n+1},\kappa_h(e_u^{n+1}j_u u^{n+1}))\leqslant C\|\nabla\cdot e_u^{n+1}\|_0\cdot\|\kappa_h(e_u^{n+1}j_u u^{n+1})\|_0\leqslant Ch\|\nabla\cdot e_u^{n+1}\|_0\cdot\|j_u u^{n+1}\|_{1,\infty}\cdot\|e_u^{n+1}\|_0\leqslant\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

由以上估计,我们有

$$|E_{24}+E_{25}|\leqslant\frac{1}{4}S_{pres}(e_p^{n+1},e_p^{n+1})+Ch^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+Ch^{2s+m_2}\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C(h^{m_2-2}+1)\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

对于第三项 E_3,运用 Cauchy-Schwarz 不等式,Young 不等式以及(4)式有

$$|E_3|=|-\nu(\nabla\eta_u^{n+1},\nabla e_u^{n+1})|\leqslant\frac{1}{2}\nu|\eta_u^{n+1}|_1^2+\frac{1}{2}\nu\|\nabla e_u^{n+1}\|_0^2\leqslant\frac{1}{2}\nu h^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+\frac{1}{2}\nu\|\nabla e_u^{n+1}\|_0^2.$$

然后,由分部积分,算子j_u 的正交性,Cauchy-Schwarz 不等式及 Young 不等式有

$$|E_4|=|(\eta_p^{n+1},\nabla\cdot e_u^{n+1})-(e_p^{n+1},\nabla\cdot\eta_u^{n+1})|\leqslant C(\|\eta_p^{n+1}\|_0\cdot\|\nabla\cdot e_u^{n+1}\|_0+$$

$$|(\eta_u^{n+1},\kappa_h(\nabla e_p^{n+1}))|\leqslant Ch^{2s}\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2+Ch^{2s+2-m_2}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+\frac{1}{4}S_{pres}(e_p^{n+1},e_p^{n+1}).$$

对于 E_5，我们将其分成两部分

$$|E_5|=S_{conv}(u_h^{n+1};u_h^{n+1},e_u^{n+1})+S_{pres}(p_h^{n+1},e_p^{n+1}):=E_{51}+E_{52}.$$

由 Young 不等式可得

$$|E_{51}|=S_{conv}(u_h^{n+1};u_h^{n+1},e_u^{n+1})\leqslant CS_{conv}(u_h^{n+1};j_u u^{n+1},j_u u^{n+1})-\frac{1}{2}S_{conv}(u_h^{n+1};e_u^{n+1},e_u^{n+1}).$$

为了得到 $S_{conv}(u_h^{n+1};j_u u^{n+1},j_u u^{n+1})$的估计，利用算子 Π 的值域，我们有 $\kappa_h j_u(\nabla u)=0$. 类似于文献[9]中给出的结果，我们定义一个关于 u 的 L^2 投影算子 Π_M^0，投影到分片常数空间 $R_0(M)$，且有以下稳定性和近似性：

$$\|\Pi_M^0(u)\|_{0,M,\infty}\leqslant C\|u\|_{0,M,\infty},$$
$$\|u-\Pi_M^0(u)\|_{0,M,\infty}\leqslant Ch_M\|u\|_{1,M,\infty}.$$

于是

$$S_{\mathrm{conv}}(u_h^{n+1};j_u u^{n+1},j_u u^{n+1})=\sum_{M\in\widetilde{\mathcal{K}}_h}\alpha_{1,m}\|u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla j_u u^{n+1}-j_u\nabla u^{n+1})\|_{0,M}^2\leqslant\sum_{M\in_h}\alpha_{1,m}\|u_h^{n+1}\|_{0,M,\infty}^2\cdot\|\kappa_h(\nabla j_u u^{n+1}-j_u\nabla u^{n+1})\|_{0,M}^2.$$

利用$u_h^{n+1}\in R_k(K)$，$\Pi_M^0 u^{n+1}\in R_0(M)$及三角不等式和以上得到的性质有

$$\|u_h^{n+1}\|_{0,M,\infty}\leqslant\|u_h^{n+1}-\Pi_M^0 u^{n+1}\|_{0,M,\infty}+\|\Pi_M^0 u^{n+1}-u^{n+1}\|_{0,M,\infty}+\|u^{n+1}\|_{0,M,\infty}\leqslant C+Ch_M\|u^{n+1}\|_{1,M,\infty}+\|u^{n+1}\|_{1,M,\infty}.$$

对于剩下的部分，由三角不等式及(4)式

$$\|\kappa_h(\nabla j_u u^{n+1}-j_u\nabla u^{n+1})\|_{0,M}^2\leqslant C\|\nabla(I-j_u)u^{n+1}-(I-j_u)\nabla u^{n+1}\|_{0,M}^2\leqslant C\|\nabla(I-j_u)u^{n+1}\|_{0,M}^2+\|(I-j_u)\nabla u^{n+1}\|_{0,M}^2\leqslant Ch^{2s}\|u^{n+1}\|_{s+1,M}^2.$$

从而由 $u\in L^\infty(W^{1,\infty}(\Omega))$可得

$$S_{conv}(u_h^{n+1};j_u u^{n+1},j_u u^{n+1})\leqslant C(h^2+1)h^{2s+m_1}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}.$$

于是

$$|E_{51}|\leqslant-\frac{1}{2}S_{conv}(u_h^{n+1};e_u^{n+1},e_u^{n+1})+C(h^2+1)h^{2s+m_1}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}.$$

类似可得

$$|E_{52}|\leqslant-S_{pres}(e_p^{n+1},e_p^{n+1})+Ch^{2s+m_2}\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2.$$

最后，我们得到 E_6 的估计

$$|E_6|=|\langle f^{n+1}-\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}f\mathrm{d}\tau,e_u^{n+1}\rangle|\leqslant C\|\int_{t_n}^{t_{n+1}}\partial_t f\mathrm{d}\tau\|_0\cdot\|e_u^{n+1}\|_0\leqslant C\Delta t\|\partial_t f\|_{L^\infty(t_n,t_{n+1};L^2)}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

结合以上估计式，分别取 $m_1,m_2=0,2$，再由逆不等式和范数 $\|\cdot\|_{LPS}$的定义可得

$$\frac{1}{2\Delta t}(\|e_u^{n+1}\|_0^2-\|e_u^n\|_0^2)+\frac{1}{2}\|(e_u^{n+1},e_p^{n+1})\|_{LPS}^2\leqslant C\Delta t\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_{tt}u(\cdot,\tau)\|_0^2\mathrm{d}\tau+Ch^{2s+2}\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t u(\cdot,\tau)\|_{s+1}^2\mathrm{d}\tau+Ch^{2s}(h^2+1+\nu)\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+Ch^{2s}(h^2+1)\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+C\Delta t\|\partial_t f\|_{L^\infty(t_n,t_{n+1};L^2)}^2+C\|e_u^{n+1}\|_0^2.$$

在上式不等号左右同时乘上 Δt，并且从 0 加到 n，再由引理 4.2 可推出

$$\|e_u^{n+1}\|_0^2+\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|(e_u^{n+1},e_p^{n+1})\|_{LPS}^2\leqslant C((\nu+1+h^2)h^{2s}\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+h^{2s+2}\|\partial_t u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+h^{2s}(h^2+1)\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+(\Delta t)^2).$$

最终，由三角不等式和算子j_u,j_p 的近似性，定理得证.

定理 4.6（离散压力的误差估计）　令速度误差估计中的条件成立，且时间和空间的划分具有相同的阶，即存在与 h 和 Δt 无关的常数 C，使得 $\Delta t\leqslant Ch$. 于是我们可得如下的压力误差估计：

$$\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|p^i-p_h^i\|_0^2\leqslant C(1+(1+\nu^2+E_u(1+h^{-d}))/\beta^2)E_u+C/\beta^2(1+h^2+E_u)S_u \tag{12}$$

其中我们令离散速度的稳定性和误差估计的右端项分别为

$$S_u=(\|f\|_{L^\infty(L^2)}^2+\|u_0\|_0^2)$$

和

$$E_u=h^{2s}[(h^2+1+\nu)\|u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+h^2\|\partial_t u\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2+(h^2+1)\|p\|_{L^\infty(H^{s+1})}^2]+(\Delta t)^2.$$

证明　我们采用速度误差方程中相同的误差分解，在(2)式中令时间 $t=t_{n+1}$后减去(7)式，并

令测试函数$(v,q)=(v_h,q_h)=(v_h,0)$可得压力的误差方程

$$(e_p^{n+1},\nabla\cdot v_h)=(\partial_t u^{n+1}-\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},v_h)+ b(u^{n+1};u^{n+1},v_h)-b(u_h^{n+1};u_h^{n+1},v_h)+ \nu(\nabla\eta_u^{n+1},\nabla v_h)+\nu(\nabla e_u^{n+1},\nabla v_h)- (\eta_p^{n+1},\nabla\cdot v_h)-S_{conv}(u_h^{n+1};u_h^{n+1},v_h)- \langle\bar{f}^{n+1},v_h\rangle:=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6.$$

采用估计 E_1 时的类似技巧和 Poincaré 不等式可得

$$|T_1|=|(\partial_t u^{n+1}-\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},v_h)|\leqslant C[\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_{tt}u\|_0\mathrm{d}\tau\cdot\frac{1}{\Delta t}h^{s+1}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t u\|_{s+1}\mathrm{d}\tau\cdot\frac{1}{\Delta t}(\|e_u^{n+1}\|_0-\|e_u^n\|_0)]\cdot|v_h|_1.$$

不同于 E_2 的估计，这里我们采用文献[9]中给出的方法来估计对流项之差

$$|T_2|=|b(u^{n+1};u^{n+1},v_h)- b(u_h^{n+1};u_h^{n+1},v_h)|= b(u^{n+1}-u_h^{n+1};u^{n+1},v_h)+ b(u_h^{n+1};u^{n+1}-u_h^{n+1},v_h).$$

对上式第二项,我们采用分部积分得

$$b(u_h^{n+1};u^{n+1}-u_h^{n+1},v_h)= -(u_h^{n+1}\cdot\nabla v_h,u^{n+1}-u_h^{n+1})- \frac{1}{2}((\nabla\cdot u_h^{n+1})v_h,u^{n+1}-u_h^{n+1}).$$

再利用$u_h^{n+1}=u^{n+1}-\eta_u^{n+1}-e_u^{n+1}$ 得

$$|T_2|\leqslant(\|u^{n+1}\|_{1,\infty}+\|\eta_u^{n+1}+ e_u^{n+1}\|_{0,\infty})\|\eta_u^{n+1}+e_u^{n+1}\|_0\cdot|v_h|_1+ \frac{1}{2}((\nabla\cdot u_h^{n+1})v_h,u^{n+1}-u_h^{n+1}):= T_{21}+T_{22}.$$

由逆不等式知

$$\|e_u^{n+1}\|_{0,\infty}\leqslant Ch^{-d/2}\|e_u^{n+1}\|_0\leqslant Ch^{-d/2}\sqrt{E_u},$$

故 $T_{21}\leqslant C(1+h^{-d/2}\sqrt{E_u})\sqrt{E_u}\cdot|v_h|_1$. 至于 T_{22}，类似于定理 4.5 中的证明,令 $C_0=\int_\Omega\Pi(e_u^{n+1}v_h)\mathrm{d}x$. 我们得到

$$(\Pi(e_u^{n+1}v_h),\nabla\cdot(u^{n+1}-u_h^{n+1}))= S_{pres}(p_h^{n+1},\Pi(e_u^{n+1}v_h)).$$

于是

$$T_{22}=\frac{1}{2}(\nabla\cdot u_h^{n+1},v_h\eta_u^{n+1})+ \frac{1}{2}(\nabla\cdot u_h^{n+1},v_h e_u^{n+1})\leqslant C(\sqrt{S_u}+E_u+\sqrt{S_u}\sqrt{E_u})|v_h|_1.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，$\|\cdot\|_{LPS}$的定义和速度误差估计的运用可以得到

$$|T_3|=|\nu(\nabla\eta_u^{n+1},\nabla v_h)+\nu(\nabla e_u^{n+1},\nabla v_h)|,$$

$$|T_4|=(\eta_p^{n+1},\nabla\cdot v_h)\leqslant C\|\eta_p^{n+1}\|_0|v_h|_1\leqslant C\sqrt{E_u}|v_h|_1.$$

至于 T_5，由离散速度的稳定性和离散 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$|T_5|=S_{conv}(u_h^{n+1};u_h^{n+1},v_h)\leqslant C\cdot\sqrt{S(u)}\cdot(\sum_{\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{1,M}\|u_h^{n+1}\cdot \kappa_h(\nabla v_h)\|_{0,M}^2)^{1/2}.$$

由 $m_1=0$,记 $C_{1,M}=\max_{M\in\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{1,M}$有

$$\sum_{\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{1,M}\|u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_{0,M}^2\leqslant C_{1,M}\|u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_0^2\leqslant C(\|u^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_0^2+ \|\eta_u^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_0^2+ \|j_u u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_0^2)+ \frac{1}{2}C_{1,M}\|u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_0^2,$$

即

$$\sum_{\widetilde{\Lambda}_h}\alpha_{1,M}\|u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_{0,M}^2\leqslant C_{1,M}\|u_h^{n+1}\cdot\kappa_h(\nabla v_h)\|_0^2\leqslant C\cdot(h^2+1)\cdot|v_h|_1^2.$$

最后，我们有

$$|T_6|=\langle f^{n+1}-\bar{f}^{n+1},v_h\rangle\leqslant C\int_{t_n}^{t_{n+1}}\|\partial_t f\|_0\mathrm{d}\tau\cdot\|v_h^{n+1}\|_0.$$

利用 $\Delta t\leqslant Ch$,结合以上的估计式可得

$$\Delta t\sum_{i=0}^{n}\frac{(e_p^{i+1},\nabla\cdot v_h)}{|v_h|_1}\leqslant C(1+\nu+ \sqrt{E_u}(1+h^{-d/2}))\sqrt{E_u}+ C(1+h+\sqrt{E_u})\sqrt{S_u}.$$

最终,由三角不等式,(4)式以及离散压力的稳定性,定理得证.

参考文献:

[1] Brooks A N, Hughes T J R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations [J]. Comput Method Appl M, 1982, 32: 199.

[2] Hughes T J R, Franca L P, Balestra M. A new fi-

nite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babǔska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations [J]. Comput Method Appl M, 1986, 59: 85.
[3] Chen G, Feng M F, Xie C M. A new projection-based stabilized method for steady convection-dominated convection-diffusion equations [J]. Appl Math Comput, 2014, 239: 89.
[4] 张百驹，李辉. 定常 Navier-Stokes 方程基于速度投影的等阶元稳定化方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2017，54：231.
[5] Becker R, Braack M. A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections [J]. Calcolo, 2001, 38: 173.
[6] Becker R, Braack M. Numerical mathematics and advanced applications [M]. Berlin: Springer, 2004.
[7] Braack M, Burman E. Local projection stabilization for the Oseen problem and its interpretation as a variational multiscale method [J]. SIAM J Numer Anal, 2006, 43: 2544.
[8] Qin Y M, Feng M F, Luo K, *et al*. Local projection stabilized finite element method for Navier-Stokes equations [J]. Appl Math Mech-Engl, 2010, 31: 651.
[9] Chen G, Feng M F, Zhou H. Local projection stabilized method on unsteady Navier-Stokes equations with high Reynolds number using equal order interpolation [J]. Appl Math Comput, 2014, 243: 465.
[10] Ahmed N, John V, Matthies G, *et al*. A local projection stabilization/continuous Galerkin-Petrov method for incompressible flow problems [J]. Appl Math Comput, 2018, 333: 304.
[11] Ahmed N, Chacón R T, John V, *et al*. Analysis of a full space-time discretization of the Navier-Stokes equationsby a local projection stabilization method [J]. IMA J Numer Anal, 2017, 37: 1437.
[12] de Frutos J, Garcina-A B, John V, *et al*. Error analysis of non inf-sup stable discretizations of the time-dependent Navier-Stokes equations with local projection stabilization [J]. IMA J Numer Anal, 2019, 39: 1747.
[13] Burman E, Fernández M A, Hansbo P. Continuous interior penalty finite element method for Oseen's equations [J]. SIAM J Numer Anal, 2006, 44: 1248.
[14] Bertoluzza S. The discrete commutator property of approximation spaces [J]. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1999, 329: 1097.
[15] de Frutos J, Garcina-A B, Novo J. Fully discrete approximations to the time-dependent Navier-Stokes equations with a projection method in time and grad-div stabilization [J]. J Sci Comput, 2019, 80: 1330.
[16] Arndt D, Dallmann H, Lube G. Local projection FEM stabilization for the time-dependent incompressible Navier-Stokes problem [J]. Numer Meth Part D E, 2015, 31: 1224.
[17] Matthies G, Skrzypacz P, Tobiska L. A unified convergence analysis for local projection stabilisations applied tothe Oseen problem [J]. ESAIM Math Model Num, 2007, 41: 713.
[18] Brenner S C, Scott L R. The mathematical theory of finite element methods [M]. New York: Springer, 2008.
[19] Chacón R T, Gómez M M, Girault V, *et al*. A high order term-by-term stabilization solver for incompressible flow problems [J]. IMA J Numer Anal, 2013, 33: 974.
[20] Girault V, Lions J L. Two-grid finite-element schemes for the transient Navier-Stokes problem [J]. ESAIM Math Model Num, 2001, 35: 945.
[21] Burman E, Fernández M A. Continuous interior penalty finite element method for the time-dependent Navier-Stokes equations: space discretization and convergence [J]. Numer Math, 2007, 107: 39.
[22] Chen Z. Finite element methods and their applications [M]. Berlin: Springer, 2005.

引用本文格式：
中　文：李西，罗加福，冯民富. 非定常 Navier-Stokes 方程的一种非线性局部投影稳定化有限元方法[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：031002.
英　文：Li X, Luo J F, Feng M F. A nonlinear local projection-based finite element method for unsteady Navier-Stokes equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 031002.