带非局部弱阻尼项的耦合吊桥方程的全局吸引子

王露露，马巧珍
(西北师范大学数学与统计学院，兰州 730070)

摘　要：本文研究了带有非局部弱阻尼项的耦合吊桥方程解的长时间动力学行为. 本文首先利用单调算子理论建立了解的适定性，获得了解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$的耗散性，然后通过能量重建法验证了解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$的渐近光滑性，进而证明了带有非局部弱阻尼项的耦合吊桥方程全局吸引子的存在性.

关键词：耦合吊桥方程；非局部弱阻尼；全局吸引子
中图分类号：O175.29　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.021006

Global attractors of coupled suspension bridge equations with nonlocal weak damping term

WANG Lu-Lu, *MA Qiao-Zhen*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: We investigate the long-time dynamical behavior of coupled suspension bridge equations with nonlocal weak damping term. Firstly, we establish the well-posedness of the solutions based on the monotone operator theory. Secondly, the dissipation of solution semigroup $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ is obtained. Then the asymptotic smoothness of the solution semigroup $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ is verified by the energy reconstruction method. Finally the existence of global attractors for the coupled suspension bridge equations with nonlocal weak damping term is proved.

Keywords: Coupled suspension bridge equation; Nonlocal weak damping; Global attractor
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

本文考虑带有非局部弱阻尼项的耦合吊桥方程

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxx}+\|u_t\|^p u_t+k^2(u-v)^+ + \\ \quad f_B(u)=h_B(x),(x,t)\in[0,L]\times\mathbf{R}, \\ v_{tt}-v_{xx}+\|v_t\|^p v_t-k^2(u-v)^+ + \\ \quad f_S(v)=h_S(x),(x,t)\in[0,L]\times\mathbf{R}, \\ u(0,t)=u(L,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xx}(L,t)=0, \\ v(0,t)=v(L,t)=0, \\ u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x), \\ v(x,0)=v_0(x),v_t(x,0)=v_1(x) \end{cases} \tag{1}$$

全局吸引子的存在性,其中$\|u_t\|^p u_t$，$\|v_t\|^p v_t$为非局部弱阻尼项，$p\geqslant 0$，k^2是弹性系数，外力项$h_B(x),h_S(x)\in L^2(\Omega)$，函数$(u-v)^+=\max\{(u-v),0\}$. 为简便起见记$\Omega=[0,L]$，$\Delta^2 u=u_{xxxx}$，$-\Delta v=-v_{xx}$.

近年来，关于吊桥方程全局吸引子的研究已取得了一系列重要成果[1-17]，2005 年，文献[2]首次获得了耦合吊桥方程弱解的全局吸引子. 之后，文献[3]证得了吊桥方程的强解和强全局吸引子的存在性. 此外，Park 和 Kang 在文献[4]中研究了带有非线性阻尼的吊桥方程全局吸引子的存在

收稿日期：2020-06-12
基金项目：国家自然科学基金(11961059，11761062)
作者简介：王露露(1993-)，女，硕士研究生，主要研究方向为无穷维动力系统及其应用. E-mail：1550790155@qq.com
通讯作者：马巧珍. E-mail：maqzh@nwnu.edu.cn

性,文献[8] 获得了非自治耦合吊桥方程一致吸引子的存在性,文献[9]借助收缩函数的方法得到了具有时滞的非自治吊桥方程拉回吸引子的存在性.

最近,文献[10] 通过能量重建的方法得到了带有非局部弱阻尼项的可扩展梁方程在次临界情况下全局吸引子的存在性. 本文借助文献[10] 提出的方法研究了带有非局部弱阻尼的耦合吊桥方程(1)解的长时间动力学行为. 由于方程组的耦合体现在半线性项$(u-v)^+$,所以文献[10] 中的能量重建方法在我们的问题上不会产生新的困难.

本文结构如下. 第 2 节给出必要的预备知识并借助单调算子理论获得了解的适定性. 第 3 节获得了解半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$的耗散性,证明了问题(1)全局吸引子的存在性. 本文出现的 C 或 C_i 均表示正常数,且后续出现的每一处 C 并不完全相同.

2　预备知识

不失一般性,记 $V_0=L^2(\Omega), V_1=H_0^1(\Omega), V_2=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 定义空间

$$H=V_2\times V_0\times V_1\times V_0,$$

并赋予范数

$$\|(u,u_t,v,v_t)\|_H=\left(\frac{1}{2}(\|\Delta u\|^2+\|u_t\|^2+\|\nabla v\|^2+\|v_t\|^2)\right)^{1/2}.$$

根据 Poincaré 不等式可得

$$\|\Delta u\|^2\geqslant\lambda_1\|u\|^2,\ \forall u\in V_2,$$
$$\|\nabla u\|^2\geqslant\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|u\|^2,\ \forall u\in V_1 \tag{2}$$

其中$\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$的范数,$\lambda_1>0$ 是 Δ^2 满足 $u(0)=u(L)=u_{xx}(0)=u_{xx}(L)=0$ 的第一特征值. 记 $A=\Delta^2$, $D(A)=\{u\in H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\,|\,u_{xx}(0,t)=u_{xx}(L,t)=0\}$. 则 $\lambda_1^{1/2}$ 是 $-\Delta$ 满足 $u(0)=u(L)=0$ 的第一特征值.

此外,设非线性项 $f_B\in C^1(\mathbf{R}), f_S\in C^1(\mathbf{R})$且满足以下假设条件:

$$\liminf_{|\tau|\to\infty}\frac{f_B(\tau)}{\tau}>-\lambda_1,$$
$$\liminf_{|\tau|\to\infty}\frac{f_S(\tau)}{\tau}>-\lambda_1 \tag{3}$$

$$|f_B'(\tau)|\leqslant C(1+|\tau|^{\rho})$$
$$|f_S'(\tau)|\leqslant C(1+|\tau|^{\rho}),\ \forall\tau\in\mathbf{R},\rho\geqslant 0 \tag{4}$$

根据(4)式和中值定理可知,存在两个正常数 K_1 和 K_2,使得对任意 $u,v\in\mathbf{R}$ 有

$$|f_B(u)-f_B(v)|\leqslant K_1(1+|u|^{\rho}+|v|^{\rho})|u-v| \tag{5}$$

$$|f_S(u)-f_S(v)|\leqslant K_2(1+|u|^{\rho}+|v|^{\rho})|u-v| \tag{6}$$

令 $F_B(\tau)=\int_0^{\tau}f_B(\sigma)\mathrm{d}\sigma, F_S(\tau)=\int_0^{\tau}f_S(\sigma)\mathrm{d}\sigma$. 当 $0<\lambda<\lambda_1$时,由(3)式可得

$$\int_\Omega F_B(u)dx\geqslant-\frac{\lambda}{2}\|u\|^2-C,$$
$$\int_\Omega F_S(v)dx\geqslant-\frac{\lambda}{2}\|v\|^2-C \tag{7}$$

$$(f_B(u),u)\geqslant\int_\Omega F_B(u)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\|u\|^2-C,$$
$$(f_S(v),v)\geqslant\int_\Omega F_S(v)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\|v\|^2-C \tag{8}$$

引理 2. 1[12]　设 X 是一可分的 Banach 空间,$L_p(a,b;X)$表示 Bochner 可测函数 $f:[a,b]\to X$ 构成的空间,$1\leqslant p\leqslant\infty$使得$\|f(\cdot)\|_X\in L_p(a,b)$. 则每一个 $L_p(a,b;X)$是 Banach 空间,且具有范数

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)}=\left(\int_a^b\|f(t)\|_X^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty,$$
$$\|f\|_{L_\infty(a,b;X)}=\operatorname{esssup}\{\|f(t)\|_X: t\in[a,b]\}.$$

我们用 $C(a,b;X)$表示取值于 X 中的强连续函数空间,

$$W^{1,p}(a,b;X)=\{f\in C(a,b;X): f'\in L_p(a,b;X)\},$$

其中 $f'(t)$表示 $f(t)$关于 t 的分布导数. 注意到空间 $W^{1,1}(a,b;X)$与从$[a,b]$到 X 上的绝对连续函数集合相一致.

定义 2. 2[10,12]　设函数 $u(t),v(t)\in C([0,T];V_2\times V_1)$,初值 $u(0)=u_0, u_t(0)=u_1$, $v(0)=v_0$, $v_t(0)=v_1$. 它被称为是

(S) 问题(1)在区间$[0,T]$上的强解,如果

(i) $\forall\, 0<a<b<T$,有 $u\in W^{1,1}(a,b;D(A)), v\in W^{1,1}(a,b;V_2), u_t,v_t\in W^{1,1}(a,b;V_0)$;

(ii) 对几乎所有的 $t\in[0,T]$,有 $Au(t)+A^{\frac{1}{2}}v(t)+Du_t(t)+Dv_t(t)\in V_0$,其中算子 D 满足文献[12]中的假设 1. 1;

(iii) 对几乎所有的 $t\in[0,T]$,方程(1)在 V_0' 上成立.

(G) 问题(1)在区间$[0,T]$上的广义解,如果存在问题(1)的强解子序列$\{u_n(t)\},\{v_n(t)\}$,其初值为$(u_{0n},u_{1n},v_{0n},v_{1n})$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\{\|\partial_t u-\partial_t u_n\|+\|A^{\frac{1}{2}}u-A^{\frac{1}{2}}u_n\|+\|\partial_t v-\partial_t v_n\|+\|A^{\frac{1}{4}}v-A^{\frac{1}{4}}v_n\|\}=0.$$

注 1　为了方便读者阅读，我们给出文献[12]中的假设 1.1 如下：假设算子 $D:D(A^{\frac{1}{2}})\to[D(A^{\frac{1}{2}})]'$ 是单调半连续的，且 $D(0)=0$，即对所有的 $u,v\in D(A^{\frac{1}{2}})$ 有 $(Du-Dv,u-v)\geqslant 0$，其中 $\lambda\mapsto(D(u+\lambda v),v)$ 是 $\mathbf{R}$ 映射到它自身的连续函数. 此外，我们假定存在一个集合 $W\in D(A^{\frac{1}{2}})$，使得对任意 $w\in W$ 有 $D(w)\in V'$，且 W 在 V 中稠密.

定理 2.3[12]　假设阻尼算子 D 将 V_0 映到 V_0'，且 D 是一个单调半连续算子，在有界集上有界，即对任意 $\varepsilon>0$，有 $\sup\{|D(u)|_{V_0'}:u\in V_0,\|u\|\leqslant\varepsilon\}<\infty$. 那么，任意广义解也是弱解，即对任意 $\omega\in V_2,\nu\in V_1$，当 $t\in[0,T]$ 时有如下不等式成立：

$$(u_t(t),\omega)=(u_1,\omega)-\int_0^t((Au(\sigma),\omega)-(Du_t(\sigma),\omega)+((h_B-k^2(u-v)^+-f_B(u)),\omega))\mathrm{d}\sigma \tag{9}$$

$$(v_t(t),\nu)=(v_1,\nu)-\int_0^t((A^{\frac{1}{2}}v(\sigma),\nu)-(Dv_t(\sigma),\nu)+((h_S+k^2(u-v)^+-f_S(v)),\nu))\mathrm{d}\sigma \tag{10}$$

定理 2.4[10]　设 $u,v\in H$，H 是一个 Hilbert 空间，其内积和范数分别为 $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|_H$. 那么存在依赖于 γ 的正常数 C_γ，使得

$$(\|u\|_H^{\gamma-2}u-\|v\|_H^{\gamma-2}v,u-v)\geqslant\begin{cases}C_\gamma\|u-v\|_H^\gamma, & \gamma\geqslant 2,\\ C_\gamma\dfrac{\|u-v\|_H^2}{(\|u\|_H+\|v\|_H)^{2-\gamma}}, & 1\leqslant\gamma\leqslant 2.\end{cases}$$

推论 2.5[10]　令 $D(\mu_t)=\|\mu_t\|^p\mu_t$. 由定理 2.4 可得

$$(D(\mu_t)-D(\upsilon_t),\mu_t-\upsilon_t)\geqslant C_p\|\mu_t-\upsilon_t\|^{p+2},\quad p\geqslant 0,\mu_t,\upsilon_t\in V_0 \tag{11}$$

从而阻尼算子 D 是强单调的.

定理 2.6　设任意的 $T>0$. 在假设 (3)，(4) 的条件下，以下结论成立：

(i) $\forall(u_0,u_1,v_0,v_1)\in D(A)\times V_2\times V_1\times V_1$，若 $Au_0+A^{\frac{1}{2}}v_0+Du_1+Dv_1\in L^2(\Omega)$，则问题(1)在区间 $[0,T]$ 上存在唯一的强解，使得

$$(u_t,u_{tt},v_t,v_{tt})\in L^\infty([0,T];V_2\times V_0\times V_1\times V_0),$$
$$(u_t,v_t)\in C_r([0,T];V_2\times V_1),$$
$$(u_{tt},v_{tt})\in C_r([0,T];V_0\times V_0),$$
$$Au(t)+Du_t(t)\in C_r([0,T];V_0{}'),$$
$$A^{\frac{1}{2}}v(t)+Dv_t(t)\in C_r([0,T];V_0{}'),$$

其中 C_r 表示右连续函数的空间，且方程的解满足能量关系

$$E(t)+\int_0^t(\|u_t\|^pu_t,u_t)\mathrm{d}\sigma+\int_0^t(\|v_t\|^pv_t,v_t)\mathrm{d}\sigma=E(0) \tag{12}$$

其中

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|v_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2+\frac{1}{2}k^2\|(u-v)^+\|^2+\int_\Omega F_B(u)\mathrm{d}x+\int_\Omega F_S(v)\mathrm{d}x-\int_\Omega h_Bu\,\mathrm{d}x-\int_\Omega h_Sv\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$E_0(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|v_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2+\frac{1}{2}k^2\|(u-v)^+\|^2 \tag{14}$$

(ii) 对任意 $(u_0,u_1,v_0,v_1)\in V_2\times V_0\times V_1\times V_0$，存在唯一的广义解，使得

$$(u,u_t,v,v_t)\in C([0,T];V_2\times V_0\times V_1\times V_0) \tag{15}$$

定理 2.6 的证明类似于文献[10]中定理 2.3 的证明，故我们只给出上面的结论.

推论 2.7　问题 (1) 在空间 H 上生成了一个动力系统 $(H,S(t))$，其中

$$S(t)(u_0,u_1,v_0,v_1)=(u(t),u_t(t),v(t),v_t(t)),$$

而 $(u(t),v(t))$ 是初值为 (u_0,u_1,v_0,v_1) 的方程 (1) 的解.

为了证明主要结论，我们还需要下面的一些定义和结果.

定义 2.8[12]　一个动力系统 $(X,S(t))$ 被称为是渐近光滑的，若对任意有界集 D，当 $t>0$ 时有 $S(t)D\subset D$，且存在一个紧集 $K\in\overline{D}$，使得

$$\lim_{t\to+\infty}d_X\{S(t)D,K\}=0,$$

其中 $d_X\{A,B\}=\sup_{x\in A}\mathrm{dist}_X(x,B)$ 是 Hausdorff 半距离.

定义 2.9[12]　一个有界闭集 $A\subset X$ 被称为是系统 $(X,S(t))$ 的全局吸引子，如果

(i) A 是不变集，即对任意 $t\geqslant 0$ 有 $S(t)A=A$；

(ii) A 是一致吸引的，即对任意有界集 $M\subset X$，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}d_X\{S(t)M,A\}=0$.

定理 2.10[12]　设 $(X,S(t))$ 是完备度量空间 X 上的动力系统，d 是 X 上的度量. 如果对任意

有界正不变集 $B\subset X$，当 $T>0$ 时存在一个连续不减函数 $r:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 和一个伪度量 $\chi_B^T\in C(0,T;X)$ 使得

(i) $\forall s>0$，$r(s)<s$，其中 $r(0)=0$；

(ii) 伪度量 χ_B^T 是一个准紧集，即对于任意序列 $\{x_n\}\subset B$，存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得序列 $\{y_k\}\subset C(0,T;X)$ 关于伪度量 χ_B^T 是 Cauchy 收敛的，其中 $y_k(\tau)=S(\tau)x_{n_k}$；

(iii) 下列不等式成立：

$$d(S(T)y_1,S(T)y_2)\leqslant r(d(y_1,y_2)+\chi_B^T(\{S(\tau)y_1\},\{S(\tau)y_2\})),\ \forall y_1,y_2\in B \tag{16}$$

其中 $\{S(\tau)y_i\}$ 由空间 $C(0,T;X)$ 中的函数 $y_i(\tau)=S(\tau)y_i,i=1,2$ 给出. 则 $(X,S(t))$ 是渐近光滑的动力系统.

定理 2.11[12]　设 $(X,S(t))$ 是一个完备度量空间 X 上的耗散动力系统. 则 $(X,S(t))$ 拥有一个紧的全局吸引子当且仅当它是渐近光滑的.

3　全局吸引子

定理 3.1　假设条件(3),(4)成立,且由问题(1)生成的动力系统 $(H,S(t))$ 在空间 H 是耗散的. 则存在 $R>0$，对任意有界集合 $B\subset H$，$t_0=t_0(B)>0$，使得对所有的 $y\in B$，当 $t\geqslant t_0$ 时有

$$\|S(t)y\|_H=\|(u(t),u_t(t),v(t),v_t(t))\|_H\leqslant R.$$

证明　分别用 $u_t+\varepsilon u$ 和 $v_t+\varepsilon v$ 与 (1) 的两个方程在 $L^2(\Omega)$ 上做内积，计算相加后可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{1}{2}\|v_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2+\frac{1}{2}k^2\|(u-v)^+\|^2+(u_t,\varepsilon u)+\\&(v_t,\varepsilon v)+\int_\Omega F_B(u)\mathrm{d}x+\int_\Omega F_s(v)\mathrm{d}x-\int_\Omega h_Bu\mathrm{d}x-\int_\Omega h_Sv\mathrm{d}x\Big)-\varepsilon\|u_t\|^2+\varepsilon\|\Delta u\|^2-\\&\varepsilon\|v_t\|^2+\varepsilon\|\nabla v\|^2+\varepsilon k^2\|(u-v)^+\|^2+\\&(\|u_t\|^pu_t,u_t+\varepsilon u)+(\|v_t\|^pv_t,v_t+\varepsilon v)+\\&\varepsilon(f_B(u),u)+\varepsilon(f_S(v),v)-\varepsilon\int_\Omega h_Bu\mathrm{d}x-\\&\varepsilon\int_\Omega h_Sv\mathrm{d}x=0\end{aligned}\tag{17}$$

结合(2)和(7)式得

$$\int_\Omega F_B(u)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\lambda}{2\lambda_1}\|\Delta u\|^2-C,$$

$$\int_\Omega F_S(v)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda_1}}\|\nabla v\|^2-C \tag{18}$$

根据 Hölder 不等式、Young 不等式和 (2) 式有

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega h_Bu\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|h_B\|^2+\frac{1}{4}\|\Delta u\|^2,\\&\left|\int_\Omega h_Sv\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|h_S\|^2+\frac{1}{4}\|\nabla v\|^2\end{aligned}\tag{19}$$

结合 (13)(14) 式和(18)(19)式有

$$E(t)\geqslant c_0E_0(t)-C_0,\ 0<c_0<1 \tag{20}$$

令 $W(t)=E(t)+(u_t,\varepsilon u)+(v_t,\varepsilon v)$. 根据 Hölder 不等式和 Young 不等式有

$$\begin{aligned}&\varepsilon|(u_t,u)|\leqslant\frac{1}{4}\|u_t\|^2+\frac{\varepsilon^2}{\lambda_1}\|\Delta u\|^2,\\&\varepsilon|(v_t,v)|\leqslant\frac{1}{4}\|v_t\|^2+\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|\nabla v\|^2\end{aligned}\tag{21}$$

结合(20)(21)式，存在 $\varepsilon_0>0$，使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时

$$W(t)\geqslant c_1E_0(t)-C_1,\ 0<c_1<1 \tag{22}$$

将(17)式写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t)+\varepsilon W(t)+Y(t)=0 \tag{23}$$

其中

$$\begin{aligned}Y(t)=&(\|u_t\|^pu_t,u_t+\varepsilon u)+\\&(\|v_t\|^pv_t,v_t+\varepsilon v)-\frac{3\varepsilon}{2}\|u_t\|^2-\frac{3\varepsilon}{2}\|v_t\|^2+\\&\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta u\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla v\|^2+\frac{\varepsilon k^2}{2}\|(u-v)^+\|^2+\\&\varepsilon(f_B(u),u)-\varepsilon\int_\Omega F_B(u)\mathrm{d}x+\\&\varepsilon(f_S(v),v)-\varepsilon\int_\Omega F_S(v)\mathrm{d}x-\\&\varepsilon^2(u_t,u)-\varepsilon^2(v_t,v)\end{aligned}\tag{24}$$

结合 (2) 式和(8) 式可得

$$\varepsilon(f_B(u),u)-\varepsilon\int_\Omega F_B(u)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\varepsilon\lambda}{2}\|u\|^2-\varepsilon C\geqslant-\frac{\varepsilon\lambda}{2\lambda_1}\|\Delta u\|^2-\varepsilon C \tag{25}$$

$$\varepsilon(f_S(v),v)-\varepsilon\int_\Omega F_S(v)\mathrm{d}x\geqslant-\frac{\varepsilon\lambda}{2}\|v\|^2-\varepsilon C\geqslant-\frac{\varepsilon\lambda}{2\sqrt{\lambda_1}}\|\nabla v\|^2-\varepsilon C \tag{26}$$

由 Young 不等式知,存在 $c_2,c_3>0$ 使得

$$(u_t,u_t)=\|u_t\|^2\leqslant c_2+c_3\|u_t\|^{p+2} \tag{27}$$

由 (12) 和 (20) 式，存在 $C_B>0$ 使得

$$E_0(t)\leqslant C(1+E(t))\leqslant C(1+E(0))\leqslant C_B \quad (28)$$

根据 Cauchy 不等式、Young 不等式及（2）(28) 式有

$$\begin{aligned}|(\|u_t\|^p u_t,\varepsilon u)|\leqslant\ & \varepsilon\|u_t\|^p(\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u\|^2)\leqslant \\ & \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^{p+2}+\frac{\varepsilon}{2}(C_\sigma\|u_t\|^{p+2}+\sigma)\|u\|^2\leqslant \\ & \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^{p+2}+\frac{\varepsilon C_\sigma}{2\lambda_1}\|\Delta u\|^2\|u_t\|^{p+2}+ \\ & \frac{\varepsilon\sigma}{2\lambda_1}\|\Delta u\|^2\leqslant \\ & \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^{p+2}+\frac{\varepsilon C_\sigma}{2\lambda_1}E_0(t)\|u_t\|^{p+2}+ \\ & \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda_1}E_0(t)\leqslant \\ & \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^{p+2}+\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\lambda_1}\|u_t\|^{p+2}+\varepsilon C_2 \end{aligned}\quad (29)$$

同理，由(28)式可得

$$|(\|v_t\|^p v_t,\varepsilon v)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\|v_t\|^{p+2}+\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\sqrt{\lambda_1}}\|v_t\|^{p+2}+\varepsilon C_3 \quad (30)$$

结合 (29)，(30)式得

$$|(\|u_t\|^p u_t,u_t+\varepsilon u)|\geqslant (1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\lambda_1})\|u_t\|^{p+2}-\varepsilon C_2 \quad (31)$$

$$|(\|v_t\|^p v_t,v_t+\varepsilon v)|\geqslant (1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\sqrt{\lambda_1}})\|v_t\|^{p+2}-\varepsilon C_3 \quad (32)$$

由 (24) ~ (27) 式及 (31)，(32)式可得

$$\begin{aligned}Y(t)\geqslant & (\frac{1}{c_3}(1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\lambda_1})-\frac{3\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{4})\|u_t\|^2+ \\ & (\frac{1}{c_3}(1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\sqrt{\lambda_1}})-\frac{3\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{4})\|v_t\|^2+ \\ & (\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon\lambda}{2\lambda_1}-\frac{\varepsilon^3}{\lambda_1})\|\Delta u\|^2+(\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon\lambda}{2\sqrt{\lambda_1}}- \\ & \frac{\varepsilon^3}{\sqrt{\lambda_1}})\|\nabla v\|^2-\varepsilon C_2-\varepsilon C_3-2\varepsilon C-\frac{c_2}{c_3}(2- \\ & \varepsilon-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\lambda_1}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\sqrt{\lambda_1}}).\end{aligned}$$

取充分小的 $\varepsilon>0$，使得

$$\frac{1}{c_3}(1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\lambda_1})-\frac{3\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{4}>0,$$

$$\frac{1}{c_3}(1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\sqrt{\lambda_1}})-\frac{3\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{4}>0,$$

$$\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon\lambda}{2\lambda_1}-\frac{\varepsilon^3}{\lambda_1}>0,\ \frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon\lambda}{2\sqrt{\lambda_1}}-\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{\lambda_1}}>0,$$

$$2-\varepsilon-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\lambda_1}-\frac{\varepsilon C_\sigma C_B}{2\sqrt{\lambda_1}}>0.$$

则有 $Y(t)\geqslant-\varepsilon C_4$. 将其代入到 (23) 式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t)+\varepsilon W(t)\leqslant\varepsilon C_4 \quad (33)$$

根据 Gronwall 不等式，我们有

$$W(t)\leqslant W(0)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+C_4(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon t}) \quad (34)$$

因此，存在 $t_0=t_0(B)=\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{W(0)}{C_4}$，使得对于任意 $t\geqslant t_0$ 有 $W(t)\leqslant 2C_4$. 由 (24) 式即得

$$\|(u,u_t,v,v_t)\|_H\leqslant\frac{2C_4+C_1}{c_1}=R \quad (35)$$

显然，定理 3.1 意味着集合 $B_0=\{(u(t),u_t(t),v(t),v_t(t))\in H:\|(u(t),u_t(t),v(t),v_t(t))\|_H\leqslant R\}$ 是与问题 (1) 相关的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$的有界吸收集.

定理 3.2　假设条件 (3)，(4) 成立. 则存在 $T_0>0$ 及与 T 无关的常数 $C>0$，使得对问题 (1) 的任意两个强解 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，当 $T\geqslant T_0$ 时成立下面的关系式：

$$\begin{aligned}TE_m(t)+\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t\leqslant\ & C(R)\{\int_0^T\|\xi_t\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|\zeta_t\|^2\mathrm{d}t+ \\ & \int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t+ \\ & \int_0^T|(D(t,\xi_t),\xi_t)|\mathrm{d}t+\int_0^T|(D(t,\zeta_t),\zeta_t)|\mathrm{d}t+ \\ & \int_0^T\|\nabla\xi\|\cdot\|\xi_t\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\zeta\|\cdot\|\zeta_t\|\mathrm{d}t+ \\ & \int_0^T\|\nabla\xi\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\zeta\|^2\mathrm{d}t+ \\ & \int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T\|\nabla\xi\|\cdot\|\xi_t\|\mathrm{d}\tau+ \\ & \int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T\|\nabla\zeta\|\cdot\|\zeta_t\|\mathrm{d}\tau+ \\ & |\int_0^T(f_B(u_1(t))-f_B(u_2(t)),\varphi(t))\mathrm{d}t|+ \\ & |\int_0^T(f_S(v_1(t))-f_S(v_2(t)),\psi(t))\mathrm{d}t|+ \\ & |\int_0^T(f_B(u_1(t))-f_B(u_2(t)),\varphi_t(t))\mathrm{d}t|+ \\ & |\int_0^T(f_S(v_1(t))-f_S(v_2(t)),\psi_t(t))\mathrm{d}t|+ \\ & |\int_0^T dt\int_t^T(f_B(u_1)(\tau)-f_B(u_2)(\tau),\varphi_t(\tau))\mathrm{d}\tau|+\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^T dt\int_t^T (f_S(v_1)(\tau)-f_S(v_2)(\tau),\psi_t(\tau))\mathrm{d}\tau\right|\} \tag{36}$$

其中

$$\xi(t)=u_1(t)-u_2(t),\zeta(t)=v_1(t)-v_2(t),$$

且

$$E_m(t)=\frac{1}{2}(\|\xi_t\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\|\zeta_t\|^2+\|\nabla\zeta\|^2),$$

$$D(t,\xi_t)=\|u_{1t}\|^p u_{1t}-\|u_{2t}\|^p u_{2t},$$

$$D(t,\zeta_t)=\|v_{1t}\|^p v_{1t}-\|v_{2t}\|^p v_{2t}.$$

证明 注意到 $\xi(t)=u_1(t)-u_2(t),\zeta(t)=v_1(t)-v_2(t)$满足如下两式:

$$\xi_{tt}+\xi_{xxxx}+D(t,\xi_t)+k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^++f_B(u_1)-f_B(u_2)=0 \tag{37}$$

$$\zeta_{tt}-\zeta_{xx}+D(t,\zeta_t)-k^2(u_1-v_1)^++k^2(u_2-v_2)^++f_S(v_1)-f_S(v_2)=0 \tag{38}$$

将(37),(38)式分别与 ξ_t,ζ_t 在 $L^2(\Omega)$上做内积,计算相加后得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta\xi\|^2+(D(t,\xi_t),\xi_t)+(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)+(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi_t)+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\zeta_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\zeta\|^2+(D(t,\zeta_t),\zeta_t)-(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta_t)+(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta_t)=0 \tag{39}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_m(t)+(D(t,\xi_t),\xi_t)+(D(t,\zeta_t),\zeta_t)=-(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)+(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta_t)-(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi_t)-(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta_t) \tag{40}$$

对(40)式在$[t,T]$上积分可得

$$E_m(t)+\int_t^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}\tau+\int_t^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}\tau=E_m(0)-\int_t^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)\mathrm{d}\tau+\int_t^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta_t)\mathrm{d}\tau-\int_t^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi_t)\mathrm{d}\tau-\int_t^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta_t)\mathrm{d}\tau \tag{41}$$

将(37),(38)式分别与 ξ,ζ 在 $L^2(\Omega)$上做内积,计算相加后得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\xi_t,\xi)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\zeta_t,\zeta)-\|\xi_t\|^2+\|\Delta\xi\|^2-\|\zeta_t\|^2+\|\nabla\zeta\|^2+(D(t,\xi_t),\xi)+(D(t,\zeta_t),\zeta)=-(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi)+(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta)-(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi)-(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta) \tag{42}$$

对(42)式在$[0,T]$上积分可得

$$2\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t-2\int_0^T\|\xi_t\|^2\mathrm{d}t-2\int_0^T\|\zeta_t\|^2\mathrm{d}t+(\xi_t,\xi)\big|_0^T+(\zeta_t,\zeta)\big|_0^T+\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta)\mathrm{d}t=-\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi)\mathrm{d}t+\int_0^T k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta)\mathrm{d}t-\int_0^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi)\mathrm{d}t-\int_0^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta)\mathrm{d}t.$$

结合(2)式和连续嵌入定理有

$$|(\xi_t,\xi)|\leqslant\frac{1}{2}(\|\xi_t\|^2+\|\xi\|^2)\leqslant CE_m(t),$$

$$|(\zeta_t,\zeta)|\leqslant\frac{1}{2}(\|\zeta_t\|^2+\|\zeta\|^2)\leqslant CE_m(t) \tag{43}$$

因此,我们有

$$2\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t\leqslant C_0(E_m(T)-E_m(0))+2\int_0^T\|\xi_t\|^2\mathrm{d}t+2\int_0^T\|\zeta_t\|^2\mathrm{d}t-\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi)\mathrm{d}t-\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta)\mathrm{d}t-\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi)\mathrm{d}t+\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta)\mathrm{d}t-\int_0^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi)\mathrm{d}t-\int_0^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta)\mathrm{d}t \tag{44}$$

在(41)式中令 $t=0$ 有

$$E_m(0)=E_m(T)+\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta_t)\mathrm{d}t-\int_0^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi_t)\mathrm{d}t-\int_0^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta_t)\mathrm{d}t \tag{45}$$

此外，因算子 D 是单调的，将（41）式在 $[0,T]$ 上积分可得

$$TE_m(T)-\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t\leqslant -\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)\mathrm{d}\tau+\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta_t)\mathrm{d}\tau-\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi_t)\mathrm{d}\tau-\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta_t)\mathrm{d}\tau \tag{46}$$

由插值不等式有

$$\|\nabla\xi\|^2\leqslant\frac{1}{2}\|\Delta\xi\|^2+C\|\xi\|^2 \tag{47}$$

根据 $|(u_1-v_1)^+-(u_2-v_2)^+|\leqslant L|(u_1-v_1)-(u_2-v_2)|$（$L>0$ 是一恰当的常数），及 $\|(u,u_t,v,v_t)\|_H\leqslant R$. 结合 Young 不等式和（2）（47）式有

$$|(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi)|\leqslant Lk^2\|(u_1-v_1)-(u_2-v_2)|\,|\cdot\|\xi\|=Lk^2\|\xi-\zeta\|\cdot\|\xi\|\leqslant C(R)\|\nabla\xi\|^2 \tag{48}$$

同理可得

$$|(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta)|\leqslant C(R)\|\nabla\zeta\|^2 \tag{49}$$

$$|(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)|\leqslant C(R)\|\nabla\xi\|\cdot\|\xi_t\| \tag{50}$$

$$|(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\zeta_t)|\leqslant C(R)\|\nabla\zeta\|\cdot\|\zeta_t\| \tag{51}$$

结合（44）～（51）式即得(36)式. 证毕.

接下来我们将证明问题（1）所对应的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 是渐近光滑的.

命题 3.3　假设条件（3）（4）成立. 则问题（1）生成的动力系统 $(H,S(t))$ 在空间 H 上是渐近光滑的.

证明　由定理 3.1 可知，集合 B_0 是与问题（1）相关的解半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant0}$ 的有界吸收集. 根据定义，我们知道存在 $t_0\geqslant0$，使得对所有的 $t\geqslant t_0$ 有 $S(t)B_0\subset B_0$. 令 $B=\cup_{t\geqslant t_0}S(t)B_0$. 显然 B 是系统 $(H,S(t))$ 的有界正不变集. 于是，对任意有界集合 B'，当 $t\geqslant t(B')$ 时有 $S(t)B'\subset B_0$，即对所有的 $t\geqslant t_0+t(B')$ 有 $S(t)B'\subset B$. 因此，B 也是有界吸收集.

设 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2) 是问题（1）在不变集 B 上关于两个不同初值的强解，即对任意 $y_0,y_1\in B$ 有

$$(u_1(t),u_{1t}(t),v_1(t),v_{1t}(t))=S(t)y_0,\quad (u_2(t),u_{2t}(t),v_2(t),v_{2t}(t))=S(t)y_1 \tag{52}$$

由于(16)式的所有项对于能量范数 $\|\cdot\|_E$ 所给出的度量 d 都是连续的，其也满足定理 2.10 中的条件. 设 $T>0$. 由于 B 是有界正不变集，由能量等式（12）式有

$$\int_0^T(D(u_1),u_{1t})\mathrm{d}t+\int_0^T(D(v_1),v_{1t})\mathrm{d}t+\int_0^T(D(u_2),u_{2t})\mathrm{d}t+\int_0^T(D(v_2),v_{2t})\mathrm{d}t\leqslant C_B \tag{53}$$

第一步，能量重建. 由（36）式，令

$$\Phi_T(u_1,v_1,u_2,v_2)=\int_0^T\|\nabla\xi\|\cdot\|\xi_t\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\zeta\|\cdot\|\zeta_t\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\xi\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\zeta\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T\|\nabla\xi\|\cdot\|\xi_t\|\mathrm{d}\tau+\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T\|\nabla\zeta\|\cdot\|\zeta_t\|\mathrm{d}\tau+\left|\int_0^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\varphi)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\psi)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\varphi_t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\psi_t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\varphi_t)\mathrm{d}\tau\right|+\left|\int_0^T\mathrm{d}t\int_t^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\psi_t)\mathrm{d}\tau\right|.$$

进一步，根据 Φ_T 的定义有

$$\Phi_T(u_1,v_1,u_2,v_2)\leqslant C_{B,T}\Big\{\int_0^T\|\nabla\xi\|\cdot\|\xi_t\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\zeta\|\cdot\|\zeta_t\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\xi\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|\nabla\zeta\|^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|f_B(u_1)-f_B(u_2)\|\cdot\|\varphi\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|f_S(v_1)-f_S(v_2)\|\cdot\|\psi\|\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^T \| f_B(u_1)-f_B(u_2)\| \cdot \| \varphi_t \| \mathrm{d}t + \int_0^T \| f_S(v_1)-f_S(v_2)\| \cdot \| \psi_t \| \mathrm{d}t\} \tag{54}$$

根据 Cauchy 不等式和紧嵌入定理，取 $0<\alpha<\dfrac{1}{4}$ 可得

$$\int_0^T \| \nabla\xi \| \cdot \| \xi_t \| \mathrm{d}t + \int_0^T \| \nabla\xi \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_\kappa \int_0^T \| \nabla\xi \|^2 \mathrm{d}t + \frac{\kappa}{2}\int_0^T \| \xi_t \|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \| \nabla\xi \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_{B,\kappa}\int_0^T \| A^{\frac{1}{2}-\alpha}\xi \|^2 \mathrm{d}t + \kappa\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \tag{55}$$

$$\int_0^T \| \nabla\zeta \| \cdot \| \zeta_t \| \mathrm{d}t + \int_0^T \| \nabla\zeta \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_\kappa \int_0^T \| \nabla\zeta \|^2 \mathrm{d}t + \frac{\kappa}{2}\int_0^T \| \zeta_t \|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \| \nabla\zeta \|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_{B,\kappa}\int_0^T \| A^{\frac{1}{2}-\alpha}\zeta \|^2 \mathrm{d}t + \kappa\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \tag{56}$$

根据定理 3.1 和假设条件 (4) 对 f_B, f_S 增长的限制及 Sobolev 嵌入定理，设 c 和 $\bar{c}$ 是 Hölder 共轭指数. 对于 $n=1$，令 c 足够大. 则对足够小的常数 β 有

$$\begin{aligned}&\| f_B(u_1)-f_B(u_2)\|^2 = \\ &\int_\Omega | f_B{'}(u_2+\theta(u_1-u_2))(u_1-u_2)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \\ &C\int_\Omega (1+| u_2+\theta(u_1-u_2)|^q)^2 \, | u_1-u_2|^2 \mathrm{d}x \leqslant \\ &C\int_\Omega (1+| u_1|^{2q}+| u_2|^{2q}) \, | u_1-u_2|^2 \mathrm{d}x \leqslant \\ &C[\int_\Omega (1+| u_1|^{2q}+| u_2|^{2q})^c \mathrm{d}x]^{1/c} \cdot \\ &(\int_\Omega | u_1-u_2|^{2\bar{c}} \mathrm{d}x)^{1/\bar{c}} \leqslant \\ &C(R)\| u_1-u_2\|_{2\bar{c}}^2 \leqslant C(R)\| A^{\frac{1}{2}-\beta}\xi \|^2\end{aligned} \tag{57}$$

其中 $0<\theta<1$. 同理可得

$$\| f_S(v_1)-f_S(v_2)\|^2 \leqslant C(R)\| A^{\frac{1}{2}-\beta}\zeta \|^2 \tag{58}$$

因此，由(57),(58)式我们有

$$\int_0^T \| f_B(u_1)-f_B(u_2)\| \cdot \| \varphi \| \mathrm{d}t + \int_0^T \| f_B(u_1)-f_B(u_2)\| \cdot \| \varphi_t \| \mathrm{d}t \leqslant C_\kappa \int_0^T \| f_B(u_1)-f_B(u_2)\|^2 \mathrm{d}t + \kappa\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \leqslant C_{B,\kappa}\int_0^T \| A^{\frac{1}{2}-\beta}\xi \|^2 \mathrm{d}t + \kappa\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \tag{59}$$

$$\int_0^T \| f_S(v_1)-f_S(v_2)\| \cdot \| \psi \| \mathrm{d}t + \int_0^T \| f_S(v_1)-f_S(v_2)\| \cdot \| \psi_t \| \mathrm{d}t \leqslant C_{B,\kappa}\int_0^T \| A^{\frac{1}{2}-\beta}\zeta \|^2 \mathrm{d}t + \kappa\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \tag{60}$$

结合 (54) ~ (60) 式，我们有

$$\Phi_T(u_1,v_1,u_2,v_2) \leqslant C_{B,\kappa}(T)\int_0^T \| A^{\frac{1}{2}-\omega}\xi \|^2 \mathrm{d}t + C_{B,\kappa}(T)\int_0^T \| A^{\frac{1}{2}-\omega}\zeta \|^2 \mathrm{d}t + 4\kappa\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \tag{61}$$

其中 $\kappa>0$，$\omega=\min\{\alpha,\beta\}$. 根据定理 2.4，设 $J_0 \in C(\mathbf{R}^+)$ 是一个严格增的凹函数，$J_0(s)=C_p^{-\frac{2}{p+2}}s^{\frac{2}{p+2}}$，$p\geqslant 0$，$J_0(0)=0$，使得

$$J_0((\| u+v\|^p(u+v)-\| u\|^p u, v)) \geqslant J_0(C_p\| v\|^{p+2}) = \| v\|^2,\ u,v\in V_2\times V_1 \tag{62}$$

由 Jensen 不等式可得

$$\int_0^T \| \xi_t \|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T J_0(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t \leqslant TJ_0(\frac{1}{T}\int_0^T (D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t) = G_0(\int_0^T (D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t) \tag{63}$$

其中 $G_0(s)=TJ_0(\dfrac{s}{T})$. 同理可得

$$\int_0^T \| \zeta_t \|^2 \mathrm{d}t \leqslant G_0(\int_0^T (D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t) \tag{64}$$

由 Canchy 不等式和 Sobolev 嵌入定理，存在足够小的常数 η，使得当 $0<\eta<\dfrac{1}{2}$ 时有

$$\begin{aligned}&|(D(t,\xi_t),\xi)| \leqslant \| \xi \| (\int_\Omega (\| u_{1t}\|^p u_{1t} - \| u_{2t}\|^p u_{2t})^2 \mathrm{d}x)^{1/2} \leqslant \\ &C\| \xi \| (\| u_{1t}\|^{2p}\| u_{1t}\|^2 + \| u_{2t}\|^{2p}\| u_{2t}\|^2)^{1/2} \leqslant C_B\| \xi \| \leqslant \\ &C_B\| A^{\frac{1}{2}-\eta}\xi \|\end{aligned} \tag{65}$$

同理可得

$$|(D(t,\zeta_t),\zeta)| \leqslant C_B\| A^{\frac{1}{2}-\eta}\zeta \| \tag{66}$$

结合定理 3.2 和 (61) ~ (66) 式，对于任意 $\kappa>0$ 有

$$TE_m(T) + \frac{1}{2}\int_0^T E_m(t)\mathrm{d}t \leqslant C_B\{(G_0+I)(\int_0^T (D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t +$$

$$\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t)+\int_0^T\|A^{\frac{1}{2}-\eta}\xi\|\mathrm{d}t+\int_0^T\|A^{\frac{1}{2}-\eta}\zeta\|\mathrm{d}t+C_{B,T}\int_0^T\|A^{\frac{1}{2}-\omega}\xi\|^2\mathrm{d}t+C_{B,T}\int_0^T\|A^{\frac{1}{2}-\omega}\zeta\|^2\mathrm{d}t\}. \tag{67}$$

第二步，处理阻尼. 对于 (67) 式，令 $\delta=\min\{\omega,\eta\}$. 则

$$E_m(T)\leqslant C_{B,T}(G_0+I)(\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t)+C_{B,T}\int_0^T\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi\|\mathrm{d}t+C_{B,T}\int_0^T\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta\|\mathrm{d}t\leqslant C_{B,T}(G_0+I)(\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t)+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi(t)\|+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta(t)\|) \tag{68}$$

设 $Q_0(s)$ 是一个严格增的凸函数，$Q_0(s)=(G_0+I)^{-1}(\frac{s}{2C_{B,T}})$，且对任意 $s\geqslant0$ 有 $(G_0+I)^{-1}(s)\leqslant s$. 则由 (67) 式得

$$Q_0(E_m(T))=(G_0+I)^{-1}(\frac{E_m(T)}{2C_{B,T}})\leqslant(G_0+I)^{-1}\{\frac{1}{2}(G_0+I)(\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t)+\frac{1}{2}(\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi(t)\|+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta(t)\|)\}\leqslant\frac{1}{2}\{\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}t+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}t\}+\frac{1}{2}\{\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi(t)\|+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta(t)\|\} \tag{69}$$

根据 (45)(50)(51)(57) 式和紧嵌入定理有

$$\int_0^T(D(t,\xi_t),\xi_t)\mathrm{d}\tau+\int_0^T(D(t,\zeta_t),\zeta_t)\mathrm{d}\tau=E_m(0)-E_m(T)-\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)\mathrm{d}\tau+\int_0^T(k^2(u_1-v_1)^+-k^2(u_2-v_2)^+,\xi_t)\mathrm{d}\tau-\int_0^T(f_B(u_1)-f_B(u_2),\xi_t)\mathrm{d}\tau-\int_0^T(f_S(v_1)-f_S(v_2),\zeta_t)\mathrm{d}\tau\leqslant E_m(0)-E_m(T)+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi(t)\|+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta(t)\|) \tag{70}$$

则由(69) 式可得

$$E_m(T)+2Q_0(E_m(T))\leqslant E_m(0)-E_m(T)+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi(t)\|+\sup_{t\in[0,T]}\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta(t)\|) \tag{71}$$

由于 $\xi(t),\zeta(t)$ 是一致有界的，且 $D(A^{\frac{1}{2}})\hookrightarrow\hookrightarrow D(A^{\frac{1}{2}-\delta})\hookrightarrow\hookrightarrow V_0$，则由插值不等式得

$$\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\xi(t)\|\leqslant\|\xi(t)\|^{\eta_1}_{D(A^{\frac{1}{2}})}\cdot\|\xi(t)\|^{1-\eta_1}\leqslant C_R\|\xi(t)\|^{1-\eta_1},\ 0<\eta_1<1 \tag{72}$$

$$\|A^{\frac{1}{2}-\delta}\zeta(t)\|\leqslant\|\zeta(t)\|^{\eta_2}_{D(A^{\frac{1}{2}})}\cdot\|\zeta(t)\|^{1-\eta_2}\leqslant C_R\|\zeta(t)\|^{1-\eta_2},\ 0<\eta_2<1 \tag{73}$$

则对于任意的 $\tau\in(0,1]$ 有

$$E_m(T)+2Q_0(E_m(T))\leqslant E_m(0)+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|\xi(t)\|^{\tau}+\sup_{t\in[0,T]}\|\zeta(t)\|^{\tau}) \tag{74}$$

于是

$$\|S(T)y_1-S(T)y_2\|^2_H\leqslant2[I+2Q_0]^{-1}\{\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|^2+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|\xi(t)\|^{\tau}+\sup_{t\in[0,T]}\|\zeta(t)\|^{\tau})\}\leqslant2[I+2Q_0]^{-1}\{\frac{1}{2}(\|y_1-y_2\|+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|\xi(t)\|^{\tau}+\sup_{t\in[0,T]}\|\zeta(t)\|^{\tau})1/2)^2\} \tag{75}$$

取 $\tau'\in(0,\frac{1}{2}]$. 则有

$$\|S(T)y_1-S(T)y_2\|_H\leqslant\sqrt{2}[[I+2Q_0]^{-1}\{\frac{1}{2}(\|y_1-y_2\|+C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|\xi(t)\|^{\tau'}+\sup_{t\in[0,T]}\|\zeta(t)\|^{\tau'}))2\}]^{1/2} \tag{76}$$

令 $r(s)=\sqrt{2}((I+2Q_0)^{-1}(\frac{s^2}{2}))^{1/2}$,

$$\chi_B^T(\{S_\tau y_1\},\{S_\tau y_2\})=C_{B,T}(\sup_{t\in[0,T]}\|u_1(t)-u_2(t)\|^{\tau'}+\sup_{t\in[0,T]}\|v_1(t)-v_2(t)\|^{\tau'}) \tag{77}$$

我们有

$$\|S(T)y_1-S(T)y_2\|_H\leqslant r(\|y_1-y_2\|+\chi_B^T(\{S_\tau y_1\},\{S_\tau y_2\})) \tag{78}$$

显然，函数 r 满足定理 2.10 的全部条件.

最后，根据文献[10]的类似证明知，问题 (1)

在$[0,T]$上的所有解的伪度量χ_B^T是准紧的. 因此,由定理 2.10 可知系统$(H,S(t))$是渐近光滑的. 证毕.

最后,由定理 3.1 和命题 3.3 即得我们的主要结论:

定理 3.4 假设条件 (3)(4) 成立. 则由问题 (1) 生成的动力系统$(H,S(t))$在空间H上拥有紧的全局吸引子.

参考文献:

[1] Ahmed N U, Harbi H. Mathematical analysis of dynamical models of suspension bridge [J]. SIAM J Appl Math, 1998, 58: 853.

[2] Ma Q Z, Zhong C K. Existence of global attractors for the coupled system of suspension bridge equations [J]. J Math Anal Appl, 2005, 308: 365.

[3] Zhong C K, Ma Q Z, Sun C Y. Existence of strong solutions and global attractors for the suspension bridge equations [J]. Nonlinear Anal-Theor, 2007, 67: 442.

[4] Park J Y, Kang J R. Global attractors for the suspension bridge equations [J]. Quart Appl Math, 2011, 69: 465.

[5] Ma Q Z, Zhong C K. Existence of strong solutions and global attractors for the coupled suspension bridge equations [J]. J Diff Equat, 2009, 246: 3755.

[6] Kang J R. Long-time behavior of a suspension bridge equations with past history [J]. Appl Math Comput, 2015, 265: 509.

[7] Kang J R. Global attractor for suspension bridge equations with memory [J]. Math Methods Appl Sci, 2016, 39: 762.

[8] Ma Q Z, Wang S P, Chen X B. Uniform compact attractors for the coupled suspension bridge equations [J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 6604.

[9] Wang S P, Ma Q Z. Existence of pullback attractors for the non-autonomous suspension bridge equation with time delay [J]. Discrete Cont Dyn Syst-Ser B, 2019, 22: 1.

[10] Zhao C X, Zhao C Y, Zhong C K. The global attractor for a class of extensible beams with nonlocal weak damping [J]. Discrete Cont Dyn Syst Ser B, 2020, 25: 935.

[11] Pata V, Zelik S. Smooth attractors for strongly damped wave equations [J]. Nonlinearity, 2006, 19: 7.

[12] Chueshov I, Lasiecka I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping [J]. Mem Amer Math Soc, 2008, 195: 912.

[13] Xu L, Zhang J J, Ma Q Z. Existence of pullback D-attractors for non-autonomous suspension bridge equation of Kirchhoff -type [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2020, 57: 657.

[14] Showalter R E. Monotone operators in banach spaces and nonlinear partial differential equations [M]. Providence: AMS, 1997.

[15] Bochicchio I, Giorgi C, Vuk E. Long-term damped dynamics of the extensible suspension bridge [J]. Inter J Diff Equat, 2010, 2010: 1.

[16] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ [J]. Ann Mat Pure Appl, 1987, 146: 65.

[17] Wang Y, Zhang J W. Long-time dynamics of solutions for a class of coupling beam equations with Nonlinear boundary condition [J]. Math Appl, 2020, 33: 25.

引用本文格式:

中　文:王露露,马巧珍. 带非局部弱阻尼项的耦合吊桥方程的全局吸引子[J]. 四川大学学报:自然科学版,2021,58:021006.

英　文:Wang L L, Ma Q Z. Global attractors of coupled suspension bridge equations with nonlocal weak damping term [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2021, 58: 021006.