2021 年 3 月 四川大学学报(自然科学版) Mar. 2021
第 58 卷 第 2 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 58 No. 2

一类带时变系数的退化抛物系统的奇性

胡 丽，樊明书
(西南交通大学数学学院，成都 610031)

摘 要：本文主要研究一类含时变系数的退化抛物系统在 Neumann 边界条件下的解的奇异性与全局正则性. 利用弱解的比较原理和微分不等式，本文给出了解的整体存在条件与爆破条件.

关键词：抛物方程；爆破；整体解
中图分类号：O175.26 **文献标识码**：A DOI：10.19907/j.0490-6756.2021.021005

Singularity of a class of degenerate parabolic systems with time-dependent coefficients

HU Li, *FAN Ming-Shu*
(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: In this paper, we study the singularity and global regularity of a class of degenerate parabolic systems with time-dependent coefficients and Neumann boundary condition. By using the comparison principle of weak solution and some differential inequalities, we give the conditions for the global existence and blow-up of the solution.

Keywords: Parabolic equation; Blow-up; Global solution
(2010 MSC 35A20, 35K20, 35K40, 35K45, 35K65)

1 引 言

在本文中，我们研究以下的方程组：

$$\begin{cases} u_t=\Delta u^m+k_1(t)f_1(v),(x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ v_t=\Delta v^n+k_2(t)f_2(u),(x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial\gamma}=\dfrac{\partial v}{\partial\gamma}=0,x\in\partial\Omega,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),\ x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个光滑有界区域，$m,n>1$，系数 $k_1(t),k_2(t)$是关于 $t>0$ 的正连续函数. 我们假设非线性项 $f_1(v)$，$f_2(u)$满足 $f_1(v)>0,f_2(u)>0,f_1{}'(v)>0,f_2{}'(u)>0,(u,v>0),f_1(0)=f_2(0)=0$，且初值 $u_0(x),v_0(x)$是非平凡的非负连续函数，在边界$\partial\Omega$ 上为零.

自上世纪 60 年代以来，很多学者对非线性抛物方程的整体解和爆破进行了研究[1-6]. 如，2007 年 Payne 等[7]研究了带 Dirichlet 边界条件的下述半线性抛物问题

$$u_t=\Delta u+f(u),\ (x,t)\in\Omega\times(0,t^*),$$

证明了该方程存在爆破解，并对爆破时间进行了估计. 2016 年，Xia 等[8]研究了半线性抛物方程

$$u_t=\Delta u^m+f(t)g(u),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T),$$

其边界条件为 $u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T)$，证明了解的全局存在性，解在有限时间内爆破，并给出了爆破时间的上下界估计. 同年，Xia 等[9]研

收稿日期：2020-07-24
基金项目：国家自然科学基金(11971331)
作者简介：胡丽(1996－)，女，四川内江人，硕士研究生，主要研究方向为偏微分方程理论. E-mail:707737178@qq.com
通讯作者：樊明书. E-mail:fanmingshu@hotmail.com

究了方程组的相似情形. 其它的相关工作还可参见文献[10-13].

另一方面,在文献[5]中, Du 给出了拟线性退化方程(组)爆破解的处理方法. 受此启发, 我们利用该文中的方法对问题(1)进行研究. 我们将首先建立(1)的局部存在性和比较原理,在此基础上给出(1)的整体存在和爆破的条件. 我们的主要结果如下.

定理 1.1　设 U 是(1)在 Ω_T 上的一个解, $\underline{u}$ 是一个下解, $\bar{u}$ 是一个上解, 且在 $t=0$ 时有 $\underline{u}\leqslant U\leqslant \bar{u}$, 则在 Ω_T 上有 $\underline{u}\leqslant U\leqslant \bar{u}$.

定理 1.2　假设存在正常数 p, q, $\bar{k}_1$ 和 $\bar{k}_2$, 使得 $\xi>0$ 时 $f_1(\xi)\leqslant \xi^p$, $f_2(\xi)\leqslant \xi^q$, 且 $t>0$ 时有 $k_1(t)\leqslant \bar{k}_1$, $k_2(t)\leqslant \bar{k}_2$. 若 $pq<mn$, 则问题(1)的每个古典解都是一个全局解.

定理 1.3　假设存在正常数 p,q 及 $\xi>0$ 使得 $f_1(\xi)\geqslant \xi^p$, $f_2(\xi)\geqslant \xi^q$ 成立, 且 $k_1=\min\{\inf k_1(t),\inf k_2(t)\}>0$. 若 $pq>mn$, 则问题(1)的每个古典解对大的初值 $u_0(x),v_0(x)$ 在有限时间内爆破.

2　比较原理

在本节中我们证明定理 1.1. 固定 $\varepsilon>0$ 并定义 u_0,v_0 为

$$u_0=u(x,0)+\varepsilon,\ v_0=v(x,0)+\varepsilon \tag{2}$$

对 $n=1,2,3,\cdots$, 归纳定义 u_n,v_n 为下述问题的解:

$$\begin{cases} u_{n,t}=\Delta u_n^m+k_1(t)f_1(v_{n-1}),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ v_{n,t}=\Delta v_n^m+k_2(t)f_2(u_{n-1}),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial\gamma}=\dfrac{\partial v_n}{\partial\gamma}=0,\ x\in\partial\Omega,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ u_n(x,0)=u(x,0)+\dfrac{\varepsilon}{n}, \\ v_n(x,0)=v(x,0)+\dfrac{\varepsilon}{n},\ x\in\Omega \end{cases} \tag{3}$$

容易看出, $u_n\leqslant u_{n-1},v_n\leqslant v_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$. 对 $n=1$, 该不等式是我们的假设. 换言之, 我们假设 $u_0\geqslant u_1,v_0\geqslant v_1$. 设该不等式对 $n-1$ 成立, 即

$$u_{n-1}\leqslant u_{n-2},v_{n-1}\leqslant v_{n-2}.$$

那么

$$u_{n-1,t}-\Delta u_{n-1}(x)^m-k_1(t)f_1(v_{n-1})\geqslant$$
$$u_{n-1,t}-\Delta u_{n-1}(x)^m-k_1(t)f_1(v_{n-2})=0,$$
$$v_{n-1,t}-\Delta v_{n-1}(x)^n-k_2(t)f_2(u_{n-1})\geqslant$$
$$v_{n-1,t}-\Delta v_{n-1}(x)^n-k_2(t)f_2(u_{n-2})=0,$$
$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\gamma}\geqslant\frac{\partial u_n}{\partial\gamma},\ \frac{\partial v_{n-1}}{\partial\gamma}\geqslant\frac{\partial v_n}{\partial\gamma},$$
$$u_{n-1}(x,0)\geqslant u_n(x,0),\ v_{n-1}(x,0)\geqslant v_n(x,0).$$

因而(u_{n-1},v_{n-1})是问题(3)的一个上解,从而

$$u_n\leqslant u_{n-1},v_n\leqslant v_{n-1}.$$

定义

$$I_\Omega(u,v,\chi)=\int_\Omega u(x,t)\chi(x,t)\mathrm{d}x-\int_\Omega u(x,0)\chi(x,0)\mathrm{d}x-\int_0^t\int_\Omega u^m\Delta\chi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\chi\frac{\partial u^m}{\partial\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_0^t\int_{\partial\Omega}u^m\frac{\partial\chi}{\partial\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_0^t\int_\Omega u\chi_s\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_0^t\int_\Omega k_1(t)f_1(v)\chi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

$$J_\Omega(u,v,\chi)=\int_\Omega v(x,t)\chi(x,t)\mathrm{d}x-\int_\Omega v(x,0)\chi(x,0)\mathrm{d}x-\int_0^t\int_\Omega v^n\Delta\chi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\chi\frac{\partial v^n}{\partial\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_0^t\int_{\partial\Omega}v^n\frac{\partial\chi}{\partial\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_0^t\int_\Omega v\chi_s\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\int_0^t\int_\Omega k_1(t)f_1(u)\chi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

当 $I_\Omega(u,v,\chi)=J_\Omega(u,v,\chi)=0$ 时,我们称(u,v)是(1)的弱解.

设 η 满足

$$\begin{cases} \eta_s+\varphi(\underline{u},u_n)\Delta\eta=0,\ x\in\Omega,s<t, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0,\ x\in\Omega,s<t, \end{cases}$$

其中 ψ 满足$(\underline{u}-u_n)\varphi(\underline{u},u_n)=\underline{u}^m-u_n^m$. 那么

$$\int_\Omega(\underline{u}-u_n)\eta\mathrm{d}x\leqslant\int_0^t\int_\Omega k_1(s)(f_1(\underline{v})-f_1(v_{n-1}))\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant 0,$$

且

$$\int_0^t\int_\Omega(\underline{u}-u_1)\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\int_\Omega k_1(s)(f_1(\underline{v})-f_1(v_0))\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant 0.$$

因此

$$\underline{u}\leqslant u_2,\underline{u}\leqslant u_3,\ldots,\underline{u}\leqslant u_n.$$

同理,

$$\underline{v}\leqslant v_2,\underline{v}\leqslant v_3,\cdots\underline{v}\leqslant v_n.$$

这意味着

$$\int_\Omega(\underline{u}-u_n)\eta\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

类似地, 我们还有 $\underline{v}-v_n\leqslant 0$. 定理 1.1 得证.

3　整体解的存在性

为了后面证明方便，我们首先不加证明地引入下边两个引理. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} m & -p \\ -q & n \end{pmatrix},\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}.$$

引理 3.1　若 $pq<mn$，则存在正常数 l_1,l_2 使得 $A\boldsymbol{L}=(1,1)^T$ 且 $A(c\boldsymbol{L})>(0,0)^T$ 对所有 $c>0$ 成立.

引理 3.2　若 $pq>mn$，则存在正常数 l_1,l_2 使得 $A\boldsymbol{L}<(0,0)^T$ 且 $A(c\boldsymbol{L})<(0,0)^T$ 对所有 $c>0$ 成立.

定理 1.2 的证明　我们构造在 $T>0$ 时问题(1)的有界的上解 $(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))$.

设 $\varphi(x)$是

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x)=1,\ x\in\Omega, \\ \varphi(x)=0,\ x\in\Omega \end{cases} \tag{4}$$

的一个解. 又设 $C=\max_{\bar{\Omega}}\varphi(x)$. 显然，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant C$. 我们构造$(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t))$为

$$\begin{cases} \bar{u}=(K(\varphi(x)+1))^{l_1}, \\ \bar{v}=(K(\varphi(X+1)))^{l_2} \end{cases} \tag{5}$$

其中 l_1,l_2 满足 $ml_1<1,nl_2<1$，而 $K>0$ 稍后再确定. 显然，$(\bar{u},\bar{v})$ 对任意 $t>0$ 是有界的，$\bar{u}\geqslant K^{l_1}$，$\bar{v}\geqslant K^{l_2}$. 这样，我们有

$$\begin{aligned} &\bar{u}_t-\Delta\bar{u}^m=-ml_1K^{ml_1}\{(ml_1-1)\cdot \\ &\quad (1+\varphi(x))^{ml_1-2}|\nabla\varphi(x)|^2+ \\ &\quad (1+\varphi(x))^{ml_1-1}\Delta\varphi(x)\}\geqslant \\ &\quad -ml_1K^{ml_1}(1+\varphi(x))^{ml_1-1}\Delta\varphi(x)= \\ &\quad ml_1K^{ml_1}(1+\varphi(x))^{ml_1-1}\geqslant \\ &\quad ml_1K^{ml_1}(1+C)^{ml_1-1} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &k_1(t)f_1(\bar{v})\leqslant\bar{k}_1(K(1+\varphi(x)))^{pl_2}\leqslant \\ &\quad \bar{k}_1(K(1+C))^{pl_2} \end{aligned} \tag{7}$$

类似可得

$$\begin{aligned} &\bar{v}_t-\Delta\bar{v}^n=-nl_2K^{nl_2}((nl_2-1)(1+\varphi(x))^{nl_2-2}\cdot \\ &\quad |\nabla\varphi(x)|^2+(1+\varphi(x))^{nl_2-1}\Delta\varphi(x))\geqslant \\ &\quad nl_2K^{nl_2}(1+C)^{nl_2-1} \end{aligned} \tag{8}$$

及

$$\begin{aligned} &k_2(t)f_2(\bar{u})\leqslant\bar{k}_2\bar{u}^q\leqslant\bar{k}_2(K(1+\varphi(x)))^{ql_1}\leqslant \\ &\quad \bar{k}_2(K(1+C))^{ql_1} \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$K_1=\left(\frac{\overline{k_1}}{ml_1}(1+C)^{pl_2-ml_1+1}\right)^{1/(ml_1-pl_2)},$$

$$K_2=\left(\frac{\overline{k_2}}{nl_2}(1+C)^{ql_1-nl_2+1}\right)^{1/(nl_2-ql_1)} \tag{10}$$

若 $pq<mn$，由引理 3.1 知存在两个正常数 $l_1>0$，$l_2>0$，使得 $ml_1-pl_2>0$，$nl_2-ql_1>0$ 且 $ml_1<1$，$nl_2<1$. 从而我们可以选择充分大的 K 使得 $K>\max\{K_1,K_2\}$，且

$$\begin{aligned} &(K(\varphi(x)+1))^{l_1}\geqslant u_0(x), \\ &\quad (K(\varphi(x)+1))^{l_2}\geqslant v_0(x) \end{aligned} \tag{11}$$

由式(6)～(11)可知由(5)定义的$(\bar{u},\bar{v})$是问题(1)的一个正的上解. 我们得到$(u,v)\leqslant(\bar{u},\bar{v})$. 这意味着 (1)的每个古典解$(u,v)$都全局存在. 证毕.

4　解的有限时间爆破

在定理 1.3 的证明中，我们采用 Du 在文献[5]中的证明思想.

首先，由比较原理，我们构造问题(1)在 Ω 的某个子区域内的上解，其中 $u,v>0$.

设 $\psi(x)$是一个平凡的非负连续函数且在$\partial\Omega$上为零. 不失一般性，我们假定 $0\in\Omega$ 且 $\psi(0)>0$. 接下来，我们构造问题(1)的一个爆破上解. 记

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t)=\dfrac{1}{(T-t)^{l_1}}\omega^{\frac{1}{m}}\left(\dfrac{|x|}{(T-t)^{\alpha}}\right), \\ \underline{v}(x,t)=\dfrac{1}{(T-t)^{l_2}}\omega^{\frac{1}{n}}\left(\dfrac{|x|}{(T-t)^{\alpha}}\right) \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\omega(r)=\frac{R^3}{12}-\frac{R}{4}r^2+\frac{1}{6}r^3,$$

$$r=\frac{|x|}{(T-t)^{\alpha}},\ 0\leqslant r\leqslant R.$$

l_1,l_2,α 和 $T>0$ 的值我们稍后确定. 简单计算可得 $0\leqslant\omega(r)\leqslant R^3/12$，且 $\omega(r)$是非增函数，因为 $\omega'(r)=\dfrac{r(R-r)}{2}\leqslant 0$.

对充分小的 T，记

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\underline{u}(\cdot,t)=\operatorname{supp}\underline{v}(\cdot,t)= \\ &\quad B(0,R(T-t)^{\alpha})\subset B(0,RT^{\alpha})\subset\Omega \end{aligned} \tag{13}$$

显然，当 $t\to T$ 时，$(\underline{u},\underline{v})$在 $x=0$ 处无界. 直接计算可得

$$\begin{aligned} &\bar{u}_t-\Delta u^m=\frac{ml_1\omega^{\frac{1}{m}}(r)+\alpha r\omega'(r)\omega^{\frac{1-m}{m}}}{m(T-t)^{l_1+1}}+ \\ &\quad \frac{R-2r}{2(T-t)^{ml_1+2\alpha}}+\frac{(n-1)(R-r)}{2(T-t)^{ml_1+\alpha}}\leqslant \\ &\quad \frac{l_1\left(\frac{R^3}{12}\right)^{1/m}}{(T-t)^{l_1+1}}+\frac{NR-(N+1)r}{2(T-t)^{ml_1+2\alpha}} \end{aligned} \tag{14}$$

且

$$\bar{v}_t-\Delta v^n\leqslant\frac{l_2\left(\frac{R^3}{12}\right)^{1/n}}{(T-t)^{l_2+1}}+\frac{NR-(N+1)r}{2(T-t)^{nl_2+2\alpha}} \tag{15}$$

其中 $T>0$ 充分小.

情形 1　$0\leqslant r\leqslant \frac{NR}{N+1}$. 我们有 $\omega(r)\geqslant \frac{(3N+1)R^3}{12(N+1)^3}$. 于是

$$k_1(t)f_1(\underline{v})\geqslant k_1(t)\underline{v}^p(x,t)= k_1(t)\frac{1}{(T-t)^{pl_2}}\omega^{\frac{p}{n}}(r)\geqslant \frac{\underline{k}}{(T-t)^{pl_2}}\left(\frac{(3N+1)R^3}{12(N+1)^3}\right)^{p/n} \tag{16}$$

$$k_2(t)f_2(\underline{u})\geqslant k_2(t)\underline{u}^q(x,t)= k_2(t)\frac{1}{(T-t)^{ql_1}}\omega^{\frac{q}{m}}(r)\geqslant \frac{\underline{k}}{(T-t)^{ql_1}}\left(\frac{(3N+1)R^3}{12(N+1)^3}\right)^{q/m} \tag{17}$$

从而

$$\underline{u}_t(x,t)-\Delta\underline{u}^m(x,t)-k_1(t)f_1(\underline{v})\leqslant \frac{l_1\left(\frac{R^3}{12}\right)^{1/m}}{(T-t)^{l_1+1}}-\frac{\underline{k}}{(T-t)^{pl_2}}\left(\frac{(3N+1)R^3}{12(N+1)^3}\right)^{p/n} \tag{18}$$

$$\underline{v}_t(x,t)-\Delta\underline{v}^m(x,t)-k_2(t)f_2(\underline{u})\leqslant \frac{l_2\left(\frac{R^3}{12}\right)^{1/n}}{(T-t)^{l_2+1}}-\frac{\underline{k}}{(T-t)^{ql_1}}\left(\frac{(3N+1)R^3}{12(N+1)^3}\right)^{q/m} \tag{19}$$

情形 2　$\frac{NR}{N+1}\leqslant r\leqslant R$. 则

$$\underline{u}_t(x,t)-\Delta\underline{u}^m(x,t)-k_1(t)f_1(\underline{v})\leqslant \frac{l_1\left(\frac{R^3}{12}\right)^{1/m}}{(T-t)^{l_1+1}}+\frac{NR-(N+1)r}{2(T-t)^{ml_1+2\alpha}} \tag{20}$$

$$\underline{v}_t(x,t)-\Delta\underline{v}^m(x,t)-k_2(t)f_2(\underline{u})\leqslant \frac{l_2\left(\frac{R^3}{12}\right)^{1/n}}{(T-t)^{l_2+1}}+\frac{NR-(N+1)r}{2(T-t)^{ml_2+2\alpha}} \tag{21}$$

如果 $pq>mn$，由引理 3.2 知存在两个正常数 l_1，l_2，使得

$$ml_1-pl_2<-1,\ nl_2-ql_1<-1,$$
$$(m-1)l_1>1,\ (n-1)l_2>1.$$

这样,我们得到

$$pl_2>ml_1+1>l_1+1,\ ql_1>nl_2+1>l_2+1$$
$$pl_2>ml_1+1>l_1+1,\ ql_1>nl_2+1>l_2+1.$$

因此，(13)式对充分小的 $\alpha>0$ 和 $T>0$ 成立. 应用式(18)～(21)得

$$\begin{cases}\underline{u}_t(x,t)-\Delta\underline{u}^m(x,t)-k_1(t)f_1(\underline{v})\leqslant 0,\\ \underline{v}_t(x,t)-\Delta\underline{v}^m(x,t)-k_2(t)f_2(\underline{u})\leqslant 0\end{cases} \tag{22}$$

我们断言存在两个正常数 ρ 和 ε，使得 $\psi(x)>\varepsilon$ 对所有 $x\in B(0,\rho)\subset\Omega$ 成立. 这是因为，$\psi(x)$ 是一个非平凡的非负连续函数且 $\psi(0)>0$. 选择充分小得 T 可以保证 $B(0,R(T-t)^\alpha)\subset B(0,\rho)$，从而 $\underline{u}\leqslant 0,\underline{v}\leqslant 0$ 在 $\partial B(0,R(T-t)^\alpha)\times(0,T)$ 上成立. 由式(13)，我们有

$$\underline{u}(x,0)\leqslant \bar{M}\psi(x),\ \underline{v}(x,0)\leqslant \bar{M}\psi(x)$$

对充分大得 $\bar{M}$ 成立. 由比较原理，当 $u_0(x)\leqslant\bar{M}\psi(x)$，$v_0(x)\leqslant\bar{M}\psi(x)$ 时有 $(\underline{u},\underline{v})\leqslant(u,v)$. 这意味着问题(1)的解 (u,v) 在有限时间内爆破. 证毕.

参考文献:

[1] Lira C, Pérez M J. Blow-up for some nonautonomous differential equations and inequalities with deviating arguments [J]. Bol Soc Mat Mex, 2020, 26: 495.

[2] Liao M, Liu Q, Ye H. Global existence and blow-up of weak solutions for a class of fractional p-Laplacian evolution equations [J]. Adv Nonlinear Anal, 2020, 9: 1.

[3] Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$ [J]. J Fac Sci Univ Tokyo Sect, 1966, 113 : 109.

[4] Fan M S, Xia A Y, Li S. Asymptotic stability for a nonlocal parabolic problem [J]. Appl Math Comput, 2014, 243: 740.

[5] Du L L. Blow-up for a degenerate reaction-diffusion system with nonlinear nonlocal sources [J]. J Comput Appl Math, 2007, 202: 237.

[6] 李慧芳，庞凤琴，王玉兰. 一类具有记忆边界条件的抛物型方程组解的性质 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2016，53：483.

[7] Payne L E, Schaefer P W. Lower bound for blow-up time in parabolic system under Dirichlet conditions [J]. J Math Anal Appl, 2007, 328: 1196.

[8] Xia A Y, Pu X X, Li S. Singularity analysis for a class of porous medium equation with time-dependent coefficients [J]. Adv Math Phys, 2016, 32: 1.

[9] Xia A Y, Pu X X, Li S. Global existence and nonexistence for a class of parabolic system with time-dependent coefficients [J]. Bound Value Probl, 2016, 35: 1.

[10] Jeffrey R A, Keng D. Global solvability for the porous medium equation with boundary flux governed by nonlinear memory [J]. J Math Anal Appl, 2015, 423: 1183.

[11] Payne L E, Philippin G A. Blow-up phenamena for

a class of parabolic system with time dependent coefficients [J]. Appl Math, 2012, 3: 325.

[12] Du L L, Fan M S. Thermal runaway for a nonlinear diffusion model in thermal electricity [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2013, 33: 2349.

[13] Du L L, Yao Z A. Note on non-simultaneous blow-up for a reaction-diffusion system [J]. Appl Math Lett, 2008, 21: 81.

引用本文格式：

中　文：胡丽，樊明书. 一类带时变系数的退化抛物系统的奇性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2021，58：021005.

英　文：Hu L，Fan M S. Singularity of a class of degenerate parabolic systems with time-dependent coefficients [J]. J Sichuan Univ：Nat Sci Ed，2021，58：021005.