一类线性差分方程的最优 Ulam 常数

侯牧林，徐　冰
(四川大学数学学院，成都 610064)

摘　要：在线性差分方程 $x_{n+p}=a_1x_{n+p-1}+\cdots+a_px_n$ 的特征方程有且只有一个根 r 的条件下，本文利用常数变易法给出了该差分方程的通解结构，进而在 $|r|>1$ 的条件下构造了该差分方程的一个特别有界近似解. 最后，本文给出了该差分方程的最优 Ulam 常数.

关键词：通解；Hyers-Ulam 稳定性；最优 Ulam 常数
中图分类号：O175.7　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.031002

On the best Ulam constant for a class of linear difference equations

HOU Mu-Lin, *XU Bing*
(School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: Suppose that the characteristic equation of the linear difference equation $x_{n+p}=a_1x_{n+p-1}+\cdots+a_px_n$ has a unique multiple root r. We in this paper obtain the general solutions of the equation by using the method of variation of constants. When $|r|>1$, we further get the best Ulam constant of the equation by constructing a specific bounded approximate solution of the equation.

Keywords: General solution; Hyers-Ulam stability; Best Ulam constant
(2010 MSC 39A30, 39B62)

1　引　言

1940 年，Ulam 最早提出了函数方程的稳定性问题，即在方程近似解的附近是否存在真解. 1941 年，Hyers 关于 Cauchy 方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的稳定性研究给出了肯定回答[1]. 正因如此，后来的研究者们多将函数方程的此类稳定性称为 Hyers-Ulam 稳定性或 Ulam 稳定性. 当前，关于各类函数方程的 Ulam 稳定性，已有不少研究成果[1-7].

在函数方程的 Ulam 稳定性基础上，人们希望进一步刻画近似解与真解的接近程度，进而产生了最优 Ulam 常数的概念[6]. 例如，对于一类重要的函数方程

$$x_{n+p}=a_1x_{n+p-1}+\cdots+a_px_n \tag{1}$$

人们对其 Ulam 稳定性和最优 Ulam 常数展开了深入研究. 我们有如下的定义：

定义 1.1[5]　若对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和满足

$$\|y_{n+p}-a_1y_{n+p-1}-\cdots-a_py_n\|\leqslant\varepsilon,\quad n\in\mathbf{N}$$

的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，都存在常数 $K>0$ 和满足方程(1)的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$，使得 $\|x_n-y_n\|\leqslant K\varepsilon$，则称方程(1)为 Ulam 稳定的，并称常数 K 为方程的 Ulam 常数.

显然，若 $K_0>K$，则 K_0 也是方程(1)的 Ulam 常数. 记 $\mathscr{K}$ 为方程(1)的所有 Ulam 常数构成的集合. 我们有如下的定义：

定义 1.2[2]　设 $K_*=\inf\mathscr{K}$. 若 K_* 是方程(1)的 Ulam 常数，则称 K_* 为方程(1)的最优 Ulam 常数.

Brzdek 等证明：当且仅当方程(1)的所有特征

收稿日期：2021-12-27
基金项目：国家自然科学基金(11771307)
作者简介：侯牧林(1997－)，男，四川成都人，主要研究方向为微分方程与动力系统. E-mail：1084540314@qq.com

根的模不等于 1 时,方程(1)具有 Ulam 稳定性[4]. 随后,针对所有特征根的模大于 1 的情形, Baias 等首先给出了当 $p\leqslant 3$ 时方程(1)的最优 Ulam 常数[3],之后又对一般的 p 给出了当所有特征根均为单根时方程(1)的最优 Ulam 常数[2].

本文对一般的 p 继续研究方程(1)的最优 Ulam 常数问题. 在方程(1)有且只有一个特征根 r 的条件下,我们首先使用常数变易法给出该方程的通解,进而在 $|r|>1$ 的条件下构造了该方程的一个特别有界近似解,最终给出方程的最优 Ulam 常数.

2 预备知识

设 $\mathbf{N}$ 为非负整数集, $\mathbf{K}$ 为数域 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$. $(X, \|\cdot\|)$ 为数域$\mathbb{K}$上的 Banach 空间. 本文考虑 Banach 空间 X 上的 p 阶线性差分方程

$$x_{n+p}=a_1x_{n+p-1}+\cdots+a_px_n \tag{2}$$

其中 $a_1,\cdots,a_p\in\mathbb{K}$, $x_0,\cdots,x_{p-1}\in X$. 下面的定理给出了方程(2)具有 Ulam 稳定性的充分条件.

定理 2.1[4] 设 λ_k 为方程(2)的特征方程

$$\lambda^p=a_1\lambda^{p-1}+a_2\lambda^{p-2}+\cdots+a_p$$

的特征根, $k=1,2,\ldots,p$. 若 $|\lambda_k|\neq 1$,则对任意给定的 $\varepsilon>0$ 及 X 中满足条件

$$\|y_{n+p}-a_1y_{n+p-1}-\cdots-a_py_n\|\leqslant\varepsilon$$

的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$,均存在 X 中满足方程(2)的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$,使得

$$\|x_n-y_n\|\leqslant\frac{\varepsilon}{|\prod_{k=1}^{p}(|\lambda_k|-1)|}.$$

3 主要结果

为简便起见,本文补充定义

$$\sum_{j=0}^{-1}:=0,\ \prod_{m=1}^{0}:=1.$$

引理 3.1 设 $p\geqslant 2$. 定义

$$W(n+1):=\begin{vmatrix}1 & (n+1) & \cdots & (n+1)^{p-1}\\ 1 & (n+2) & \cdots & (n+2)^{p-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & (n+p) & \cdots & (n+p)^{p-1}\end{vmatrix},$$

$W_k(n+1)$为行列式 $W(n+1)$中第 p 行第k 列的代数余子式, $k=1,\ldots,p$. 则有以下结论:

$$\text{(i)}\ \begin{cases}W(n+1)=\prod_{m=1}^{p-1}m!,\\ W_1(n+1)=\\ \quad(-1)^{p+1}\prod_{m=1}^{p-2}m!\prod_{i=1}^{p-1}(n+i);\end{cases}$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{p}W_k(n+1)x^{k-1}=\prod_{m=1}^{p-2}m!\prod_{i=1}^{p-1}(x-(n+i));$$

(iii) $$W_k(n+1)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant p-1}\frac{W_1(n+1)}{(-1)^{k-1}\prod_{j=1}^{k-1}(n+i_j)},$$

其中 $k=1,\ldots,p$.

证明 (i) 显然有 $W(n+1)$为 p 阶范德蒙行列式,从而

$$W(n+1)=\prod_{m=1}^{p-1}m!.$$

由 $W_1(n+1)$的定义可知,

$$W_1(n+1)=(-1)^{p+1}\begin{vmatrix}n+1 & \cdots & (n+1)^{p-1}\\ n+2 & \cdots & (n+2)^{p-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ n+p-1 & \cdots & (n+p-1)^{p-1}\end{vmatrix},$$

从而

$$W_1(n+1)=(-1)^{p+1}\prod_{m=1}^{p-2}m!\prod_{i=1}^{p-1}(n+i).$$

故结论(i)成立.

(ii) 考虑辅助函数

$$g_n(x):=\begin{vmatrix}1 & (n+1) & \cdots & (n+1)^{p-1}\\ 1 & (n+2) & \cdots & (n+2)^{p-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & (n+p-1) & \cdots & (n+p-1)^{p-1}\\ x^0 & x^1 & \cdots & x^{p-1}\end{vmatrix} \tag{3}$$

式(3)右端的行列式也是范德蒙行列式,从而有

$$g_n(x)=\prod_{m=1}^{p-2}m!\prod_{i=1}^{p-1}(x-(n+i)).$$

由 $W_k(n+1)$定义可知, $W_k(n+1)$也为式(3)右端行列式中第 p 行第k 列的代数余子式. 因此,按式(3)右端行列式的最后一行展开得

$$\sum_{k=1}^{p}W_k(n+1)x^{k-1}=g_n(x)=\prod_{m=1}^{p-2}m!\prod_{i=1}^{p-1}(x-(n+i)) \tag{4}$$

(iii) 由式(4)可知, $W_k(n+1)$为多项式函数 $g_n(x)$中 x 的第 $k-1$ 次项的系数. 由多项式乘法原理易推知结论(iii)成立. 证毕.

引理 3.2 设 $p\geqslant 1$, $n\in\mathbf{N}$. 若 r 为方程(2)的特征方程

$$\lambda^p=a_1\lambda^{p-1}+a_2\lambda^{p-2}+\cdots+a_p$$

的 p 重根,则方程

$$y_{n+p}=a_1 y_{n+p-1}+\cdots+a_p y_n+b_n \tag{5}$$
的通解为
$$y_n = \sum_{k=1}^{p} n^{k-1} r^n C_k + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)\Big) r^{n-j-p} b_j,$$
其中$\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为 X 中的序列，$C_1,\cdots,C_p$ 为 X 中的任意常数.

证明　当 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ 时，X 为复 Banach 空间. 此时我们有 $r\in\mathbf{K}$. 当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时，X 为实 Banach 空间. 由实系数多项式方程的性质可知，此时一定有 $r\in\mathbf{R}$，从而有 $r\in\mathbf{K}$.

设 x_n 为齐次方程(2)的通解，$y_n^{(P)}$ 为方程(5)的一个特解. 由已知条件，$r^n,nr^n,\cdots,n^{p-1}r^n$ 是齐次方程(2)的一个基本解组. 由线性方程基本理论可知方程(5)的通解为
$$y_n=x_n+y_n^{(P)} \tag{6}$$
其中
$$x_n = \sum_{k=1}^{p} n^{k-1} r^n C_k \tag{7}$$
为求出方程(5)一个特解，我们利用常数变易法. 设方程(5)的特解 $y_n^{(P)}$ 满足
$$y_n^{(P)} = \sum_{k=1}^{p} n^{k-1} r^n C_k(n) \tag{8}$$
其中 $C_1(n),C_2(n),\ldots,C_p(n)$为待定系数. 令
$$\Delta C_k(n)=C_k(n+1)-C_k(n),k=1,\ldots,p.$$
当 $p=1$, $n\in\mathbf{N}$ 时，特征根 r 即为系数a_1. 将特解 $y_n^{(P)}=r^nC_1(n)$代入方程(5)可得
$$r^{n+1}C_1(n+1)=r^{n+1}C_1(n)+b_n,$$
从而有
$$\Delta C_1(n)=\frac{b_n}{r^{n+1}}.$$
因此，特解 $y_n^{(P)}$ 的系数为
$$C_1(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{b_j}{r^{j+1}}.$$
此时方程(5)的通解为
$$y_n = r^n C_1 + \sum_{j=0}^{n-1} r^{n-j-1} b_j \tag{9}$$
当 $p\geqslant 2$, $n\in\mathbf{N}$ 时，由于 $r^n,nr^n,\cdots,n^{p-1}r^n$ 是齐次方程(2)的一个基本解组，因此一定可以选出一组 $C_1(n),C_2(n),\cdots,C_p(n)$，使得
$$\sum_{k=1}^{p}(n+j)^{k-1}r^{n+j}\Delta C_k(n)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant p-1 \tag{10}$$
由式(8)和(10)可得
$$y_{n+1}^{(P)} = \sum_{k=1}^{p}(n+1)^{k-1}r^{n+1}C_k(n+1) = \sum_{k=1}^{p}(n+1)^{k-1}r^{n+1}C_k(n) + \sum_{k=1}^{p}(n+1)^{k-1}r^{n+1}\Delta C_k(n) = \sum_{k=1}^{p}(n+1)^{k-1}r^{n+1}C_k(n).$$
依此类推，易知
$$y_{n+j}^{(P)} = \sum_{k=1}^{p}(n+j)^{k-1}r^{n+j}C_k(n),\quad 1\leqslant j\leqslant p-1 \tag{11}$$
事实上，不妨假设当 $j=q$ 时有
$$y_{n+q}^{(P)} = \sum_{k=1}^{p}(n+q)^{k-1}r^{n+q}C_k(n)$$
成立. 则当 $j=q+1$ 时，有
$$y_{n+q+1}^{(P)} = \sum_{k=1}^{p}(n+q+1)^{k-1}r^{n+q+1}C_k(n+1) = \sum_{k=1}^{p}(n+q+1)^{k-1}r^{n+q+1}(C_k(n)+\Delta C_k(n)) = \sum_{k=1}^{p}(n+q+1)^{k-1}r^{n+q+1}C_k(n).$$
由归纳法知式(11)成立.

特别地，在式(11)中，当 $j=p-1$ 时有
$$y_{n+p-1}^{(P)} = \sum_{k=1}^{p}(n+p-1)^{k-1}r^{n+p-1}C_k(n).$$
因此
$$y_{n+p}^{(P)} = \sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}C_k(n+1) = \sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}C_k(n) + \sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}\Delta C_k(n).$$
将 $y_n^{(P)},y_{n+1}^{(P)},\cdots,y_{n+p}^{(P)}$代入方程(5)，得
$$\sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}C_k(n) + \sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}\Delta C_k(n) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}a_j(n+p-j)^{(k-1)}r^{n+p-j}C_k(n)+b_n.$$
整理得
$$\sum_{k=1}^{p}\Big[(n+p)^{k-1}r^{n+p} - \sum_{j=1}^{p}a_j(n+p-j)^{k-1}r^{n+p-j}\Big]C_k(n) + \sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}\Delta C_k(n) = b_n.$$

由于 $r^n, nr^n, \cdots, n^{p-1}r^n$ 是齐次方程(2)的一个基本解组，故对每个 $k=1,\ldots,p$ 都有

$$(n+p)^{k-1}r^{n+p}-\sum_{j=1}^{p}a_j\,(n+p-j)^{k-1}r^{n+p-j}=0 \tag{12}$$

因此，将式(12)代入上述等式化简可得

$$\sum_{k=1}^{p}(n+p)^{k-1}r^{n+p}\Delta C_k(n)=b_n \tag{13}$$

由式(10)和(13)可知，待定系数 $C_1(n),\cdots,C_p(n)$ 满足 Casorati 矩阵方程[7]，即对每个 $n\in\mathbf{N}$ 都有

$$\begin{pmatrix} r^{n+1} & \cdots(^n+1)p-1r^{n+1} \\ r^{n+2} & \cdots(^n+2)p-1r^{n+2} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ r^{n+p} & \cdots(^n+p)p-1r^{n+p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta C_1(n)\\ \Delta C_2(n)\\ \cdots \\ \Delta C_p(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \cdots\\ b_n\end{pmatrix} \tag{14}$$

由克拉默法则可知，对每个 $k=1,\ldots,p,n\in\mathbf{N}$，方程(14)存在唯一解

$$\Delta C_k(n)=\frac{W_k(n+1)}{W(n+1)}\frac{b_n}{r^{n+p}}.$$

进而可得特解 $y_n^{(P)}$ 的各项系数为

$$C_k(n)=\frac{1}{W(n+1)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{W_k(j+1)b_j}{r^{j+p}}.$$

因此，方程(5)的一个特解为

$$y_n^{(P)}=\sum_{k=1}^{p}C_k(n)n^{k-1}r^n=$$
$$\frac{1}{W(n+1)}\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{W_k(j+1)b_j}{r^{j+p}}n^{k-1}r^n=$$
$$\frac{1}{W(n+1)}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{p}W_k(j+1)n^{k-1}\Big)r^{n-j-p}b_j.$$

由引理 3.1 中的结论(i)和(ii)可得

$$y_n^{(P)}=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)r^{n-j-p}b_j\Big) \tag{15}$$

由式(6)和(15)可知，此时方程(5)的通解为

$$y_n=\sum_{k=1}^{p}n^{k-1}r^nC_k+$$
$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)\Big)r^{n-j-p}b_j \tag{16}$$

此外，由 $\prod_{i=1}^{0}:=1$ 可知，$p=1$ 时的通解(9)亦可表示为式(16)的形式. 因此，对 $p\geqslant 1$，方程(5)的通解为

$$y_n=\sum_{k=1}^{p}n^{k-1}r^nC_k+$$
$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)\Big)r^{n-j-p}b_j.$$

证毕.

定理 3.3　设 $p\geqslant 1$，$n\in\mathbf{N}$，r 为方程(2)的特征方程

$$\lambda^p=a_1\lambda^{p-1}+a_2\lambda^{p-2}+\cdots+a_p$$

的 p 重根，且 $|r|>1$. 则方程(2)的最优 Ulam 常数为 $\frac{1}{(|r|-1)^p}$.

证明　由定理 2.1 可知，方程(2)此时是 Ulam 稳定的，且 Ulam 常数为 $\frac{1}{(|r|-1)^p}$. 下证

$$K_*=\frac{1}{(|r|-1)^p}.$$

反证法. 反设此时方程(2)存在另一个 Ulam 常数 $K<\frac{1}{(|r|-1)^p}$. 对 $u\in X$，$\|u\|=1$，定义序列

$$b_n:=\frac{r^{n+p-1}}{|r|^{n+p-1}}u\varepsilon, \tag{17}$$

可知 $b_n\in X$，$\|b_n\|=\varepsilon$.

当 $p=1$ 时，由于 $|r|>1$ 且 $\|b_n\|=\varepsilon$，可以定义 X 中的序列

$$y_n^*:=r^nC_1^*+\sum_{j=0}^{n-1}r^{n-j-1}b_j,$$

其中

$$C_1^*:=-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j}{r^{j+1}}.$$

由引理 3.2，此时 y_n^* 为方程(5)的一个特解. 对 y_n^* 化简可得

$$y_n^*=-\sum_{j=n}^{\infty}r^{n-j-1}b_j \tag{18}$$

当 $p\geqslant 2$ 时，考虑正项级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{W_1(j+1)}{r^{j+p}}\right|$.

由引理 3.1 中的结论(i)可知

$$\lim_{j\to\infty}\frac{|W_1(j+2)r^j|}{|W_1(j+1)r^{j+1}|}=\lim_{j\to\infty}\frac{j+p}{(j+1)|r|}=$$
$$\frac{1}{|r|}<1.$$

由达朗贝尔判别法，级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{W_1(j+1)}{r^{j+p}}$ 是绝对收敛的. 由引理 3.1 中的结论(iii)，对每个 $k=2,\ldots,p$ 有

$$|W_k(j+1)|\leqslant\frac{(p-1)^{k-1}}{(j+1)^{k-1}}|W_1(j+1)|\leqslant$$
$$(p-1)^{k-1}|W_1(j+1)|.$$

因此，级数 $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{W_k(j+1)}{r^{j+p}}$ 对每个 $k=1,\ldots,p$ 都绝对收敛. 令

$$C_k^* := -\frac{1}{\prod_{m=1}^{p-1} m!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{W_k(j+1)b_j}{r^{j+p}},$$
$$k=1,\dots,p.$$

定义 X 中的序列

$$y_n^* := \sum_{k=1}^{p} n^{k-1}r^n C_k^* + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)r^{n-j-p}b_j\right).$$

由引理 3.2 可知，此时 y_n^* 为方程(5)的一个特解. 由引理 3.1 中的结论(ii)可知

$$\sum_{k=1}^{p} n^{k-1}r^n C_k^* = \frac{-1}{\prod_{m=1}^{p-1} m!}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{p}(W_k(j+1)n^{k-1})r^{n-j-p}b_j = \frac{-1}{(p-1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)r^{n-j-p}b_j\right).$$

对 y_n^* 化简可得

$$y_n^* = \frac{-1}{(p-1)!}\sum_{j=n}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)r^{n-j-p}b_j\right) \tag{19}$$

此外，由 $\prod_{i=1}^{0}:=1$ 可知，$p=1$ 时的特解(18)亦可表示为式(19)的形式. 因此，对 $p\geqslant 1$，

$$y_n^* = \frac{-1}{(p-1)!}\sum_{j=n}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{p-1}(n-j-i)r^{n-j-p}b_j\right),$$

为方程(5)的一个特解. 记 $s=j-n$. 则有

$$y_n^* = \frac{-1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(-s-i)b_{s+n}}{r^{s+p}} = (-1)^p\frac{1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)b_{s+n}}{r^{s+p}} \tag{20}$$

因幂级数 $\sum_{s=0}^{\infty}x^s$ 在 $|x|<1$ 上一致收敛，且

$$\sum_{s=0}^{\infty}x^s = \frac{1}{1-x},\ |x|<1$$

在(20)式两端同时关于 x 求 $p-1$ 次导得

$$\sum_{s=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)x^s = (p-1)!\frac{1}{(1-x)^p},$$
$$|x|<1.$$

由 $|r|>1$ 有

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)}{|r|}^{s+p} = (p-1)!\frac{1}{(|r|-1)^p} \tag{21}$$

再由式(20)和(21)得

$$\|y_n^*\| \leqslant \frac{1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)}{|r|^{s+p}}\|b_{s+n}\| = \frac{1}{(|r|-1)^p}\varepsilon.$$

故序列 $\{y_n^*\}_{n\in\mathbf{N}}$ 有界.

现在，由于 y_n^* 为方程(5)的一个解，我们有

$$\|y_{n+p}^* - a_1 y_{n+p-1}^* - \cdots - a_p y_n^*\| = \|b_n\| = \varepsilon.$$

由方程(1)的 Ulam 稳定性可知，对 Ulam 常数 K 和方程(1)的近似解 y_n^*，一定存在方程(1)的一个真解

$$x_n^* = \sum_{i=1}^{p} n^{i-1}r^n C_i,$$

使得

$$\|x_n^* - y_n^*\| \leqslant K\varepsilon \tag{22}$$

由于 $\{y_n^*\}_{n\in\mathbf{N}}$ 有界，所以 $\{x_n^*\}_{n\in\mathbf{N}}$ 有界. 又因 $|r|>1$，故必有 $C_i=0, i=1,\cdots,p$，即 $x_n^*=0$. 因此，式(22)意味着 $\|y_n^*\|\leqslant K\varepsilon$，$n\in\mathbf{N}$. 特别地，当 $n=1$ 时，我们有 $\|y_1^*\|\leqslant K\varepsilon$. 而由式(20)，式(17)及式(21)可得

$$\|y_1^*\| = \left\|\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)b_{1+s}}{r^{s+p}}\right\| = \left\|\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)}{r^{s+p}}\frac{r^{s+p}u\varepsilon}{|r|^{s+p}}\right\| = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(s+i)}{|r|^{s+p}}\varepsilon\|u\| = \frac{1}{(|r|-1)^p}\varepsilon,$$

从而有

$$\frac{1}{(|r|-1)^p}\varepsilon \leqslant K\varepsilon.$$

这与假设 $K<\frac{1}{(|r|-1)^p}$ 矛盾. 因而方程(2)的最优 Ulam 常数为 $\frac{1}{(|r|-1)^p}$. 证毕.

参考文献：

[1] Hyers D H. On the stability of the linear functional equation [J]. Proc Nat Acad Sci, 1941, 27: 222.

[2] Baisa A R, Popa D. On the best Ulam constant of a higher order linear difference equation [J]. B Sci Math, 2021, 166: 102928.

[3] Baisa A R, Popa D. On Ulam stability of a third order linear difference equation in Banach spaces [J]. Aequat Math, 2020, 94: 1151.

[4] Brzdek J, Popa D, Xu B. Remarks on stability of linear recurrence of higher order [J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 1459.

[5] Agarwal R P, Xu B, Zhang W. Stability of func-

tional equations in single variable [J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 852.

[6] Hyers D H, Isac G, Rassias T M. Stability of functional equations in several variables [M]. Basle: Birkhauser, 1998.

[7] Elyadi S. An introduction to difference equations [M]. New York: Dover Publications, 1967.

引用本文格式:

中　文:侯牧林,徐冰. 一类线性差分方程的最优 Ulam 常数[J]. 四川大学学报:自然科学版,2022,59:031002.

英　文:Hou M L, Xu B. On the best Ulam constant for a class of linear difference equations [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 031002.