不定权三阶周期边值问题正解的存在性

薄志伟
（西安电子科技大学数学与统计学院，西安 710126）

摘　要：本文研究了不定权三阶周期边值问题

$$\begin{cases} u'''(x)+k_2u''(x)+k_1u'(x)+k_0u(x)=\lambda a(x)f(u),\ x\in(0,1), \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),\ i=0,1,2 \end{cases}$$

正解的存在性，其中的参数 $\lambda>0$，$k_1\in(0,\pi^2)$，$k_2\in(0,+\infty)$，$k_0=k_1k_2$，权函数 $a\in C([0,1],\mathbf{R})$ 允许变号，$f\in C([0,\infty),\mathbf{R})$ 且 $f(0)>0$. 主要结果的证明基于 Leray-Schauder 不动点定理.

关键词：三阶常微分方程；周期边值问题；不定权；正解
中图分类号：O175.8　　**文献标识码**：A　　DOI：10.19907/j.0490-6756.2022.061005

Existence of positive solutions for third order periodic boundary value problems with indefinite weight

BO Zhi-Wei
(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, China)

Abstract: This paper aims at the existence of positive solutions for the third order periodic boundary value problem with indefinite weight

$$\begin{cases} u'''(x)+k_2u''(x)+k_1u'(x)+k_0u(x)=\lambda a(x)f(u), x\in(0,1), \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1), i=0,1,2, \end{cases}$$

where λ is a positive parameter, $k_1\in(0,\pi^2)$, $k_2\in(0,+\infty)$, $k_0=k_1k_2$, the weight function $a\in C([0,1],\mathbf{R})$ with indefinite sign, $f\in C([0,\infty),\mathbf{R})$ and $f(0)>0$. The proof of the main results is based on the Leray-Schauder fixed point theorem.

Keywords: Third-order ordinary differential equation; Periodic boundary value problem; Indefinite weight; Positive solution
(2010 MSC 34B15)

1　引　言

三阶周期边值问题在诸如三层梁、电磁波、地球引力吹积的涨潮[1]等领域中均有重要应用，其正解的存在性问题基本且重要. 近年来，关于三阶周期边值问题的相关研究已经有了一些成果[2-11]，如 Chu 等[10]利用锥上的 Krasnoselskii 不动点定理获得了三阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)+\rho u(t)=f(t,u(t)), t\in(0,2\pi), \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi), i=0,1,2 \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $\rho\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 为常数，$f\in C([0,2\pi]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$，Li 等[11]运用锥上的不动点定理获得了三阶周期边值问题

$$\begin{cases} -u'''(t)+\rho u(t)=\lambda a(t)f(t,u(t)), t\in(0,2\pi), \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(2\pi), i=0,1,2 \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期：2022-01-08
基金项目：国家自然科学基金(12061064)
作者简介：薄志伟(1996－)，男，山西大同人，硕士研究生，主要从事常微分方程边值问题的研究. E-mail：bozhiwei2021@163.com

正解的存在性及多解性,其中 $\lambda>0,\rho\in(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 为常数,$f\in C([0,2\pi]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$,$a\in C([0,2\pi],[0,+\infty))$. 然而,值得注意的是,文献[10]的结果是在无参数条件下得到的,文献[11]的结果则是在权函数 $a(t)$ 为正的条件下得到的,且问题(1)(2)都不含一阶导数项和二阶导数项. 鉴于此,受文献[12]的启发本文研究更一般的三阶周期边值问题

$$\begin{cases}u'''(x)+k_2u''(x)+k_1u'(x)+k_0u(x)=\\ \quad\lambda a(x)f(u),x\in(0,1),\\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),i=0,1,2\end{cases}\tag{3}$$

正解的存在性,其中的权函数 $a\in C[0,1]$ 允许变号.

本文总假定:

(H_1) $f\in C([0,+\infty),\mathbf{R})$ 且 $f(0)>0$;

(H_2) $k_1\in(0,\pi^2)$,$k_2>0$,$k_0=k_1k_2$,且 $a\in C[0,1]$ 允许变号.

本文的主要结果如下:

定理 1.1　令(H_1),(H_2)成立. 假设

(H_3) 存在 $\mu>0$ 使得

$$\int_0^1 G(x,s)a^+(s)\mathrm{d}s\geqslant(1+\mu)\int_0^1 G(x,s)a^-(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$a^+(s)=\max\{a(s),0\},$$
$$a^-(s)=\max\{-a(s),0\},$$

则存在 $\lambda_1>0$,使得当 $0<\lambda<\lambda_1$ 时问题(3)存在一个正解.

2　预备知识

定义 Banach 空间 $E=C[0,1]$,其范数定义为 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|u|$. 令线性算子 $L:D(L)\to E$ 为

$$L(u):=u'''(x)+k_2u''(x)+k_1u'(x)+k_0u(x),\quad u\in D(L),$$

其中

$$D(L):=\{u\in C^3[0,1]:u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),i=0,1,2\}.$$

引理 2.1　令 $k_1\in(0,\pi^2)$,$k_2\in(0,+\infty)$,$k_0=k_1k_2$. 则线性问题

$$\begin{cases}u'''(x)+k_2u''(x)+k_1u'(x)+k_0u(x)=0,\\ \quad x\in(0,1),\\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),i=0,1,2\end{cases}$$

的格林函数为

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{k_1}\,\mathrm{e}^{k_2(-x+s+1)}\sin(\frac{\sqrt{k_1}}{2})+(\mathrm{e}^{k_2}-1)(k_2\cos(\sqrt{k_1}(x-s-\frac{1}{2}))+\sqrt{k_1}\sin(\sqrt{k_1}(x-s-\frac{1}{2})))}{2\sqrt{k_1}(\mathrm{e}^{k_2}-1)\sin(\frac{\sqrt{k_1}}{2})(k_2^2+k_1)},\\ \quad 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{2\sqrt{k_1}\,\mathrm{e}^{k_2(-x+s)}\sin(\frac{\sqrt{k_1}}{2})+(\mathrm{e}^{k_2}-1)(k_2\cos(\sqrt{k_1}(x-s+\frac{1}{2}))+\sqrt{k_1}\sin(\sqrt{k_1}(x-s+\frac{1}{2})))}{2\sqrt{k_1}(\mathrm{e}^{k_2}-1)\sin(\frac{\sqrt{k_1}}{2})(k_2^2+k_1)},\\ \quad 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1\end{cases}\tag{4}$$

且 $G(x,s)>0,(x,s)\in[0,1]\times[0,1]$.

证明　定义线性算子 $L_1:D(L_1)\to E$ 为 $L_1u:=u''+k_1u$,其中

$$D(L_1):=\{u\in C^2[0,1]:u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),\ i=0,1\}.$$

则 $L_1u=0$ 的格林函数为

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\sqrt{k_1}(t-s-\frac{1}{2}))}{2\sqrt{k_1}\sin\frac{\sqrt{k_1}}{2}},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{\cos(\sqrt{k_1}(t-s+\frac{1}{2}))}{2\sqrt{k_1}\sin\frac{\sqrt{k_1}}{2}},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

定义一个线性算子 $L_2:D(L_2)\to E$ 为 $L_2u:=u'+k_2u$,其中

$$D(L_2):=\{u\in C^1[0,1]:u(0)=u(1)\}.$$

则 $L_2u=0$ 的格林函数为

$$G_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{e^{k_2(1+s-t)}}{e^{k_2}-1},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{e^{k_2(s-t)}}{e^{k_2}-1},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

显然，$Lu=L_2(L_1u)$. 所以 $Lu=0$ 的格林函数为

$$G(x,s):=\int_0^1 G_2(x,t)G_1(t,s)\mathrm{d}t,(x,s)\in[0,1]\times[0,1].$$

计算可得式(4). 进一步，因 $k_1\in(0,\pi^2)$，$k_2>0$，故 $G_i(t,s)>0$，$(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，$i=1,2$. 从而 $G(x,s)>0$，$(x,s)\in[0,1]\times[0,1]$. 证毕.

引理 2.2 (Leray-Schauder 不动点定理)[13] 假设算子 $T:E\to E$ 是全连续的. 若集合

$$\{\|x\|\,|\,x\in E,x=\theta Tx,0<\theta<1\}$$

有界，则 T 在闭球 $A\subset E$ 中必存在不动点，其中

$$A=\{x\,|\,x\in E,\|x\|\leqslant R\},$$
$$R=\sup\{\|x\|\,|\,x=\theta Tx,0<\theta<1\}.$$

引理 2.3 给定常数 δ，$0<\delta<1$. 则存在一个正数 $\bar\lambda$，满足当 $0<\lambda<\bar\lambda$ 时问题

$$\begin{cases}u'''(x)+k_2u''(x)+k_1u'(x)+k_0u(x)=\\ \quad\lambda a^+(x)f(u),x\in(0,1),\\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),i=0,1,2\end{cases}\tag{5}$$

有一个正解 $\tilde u_\lambda$，使得当 $\lambda\to 0$ 时 $\|\tilde u_\lambda\|\to 0$，且

$$\tilde u_\lambda(x)\geqslant\lambda\delta f(0)p(x),x\in(0,1),$$

其中

$$p(x)=\int_0^1 G(x,s)a^+(s)\mathrm{d}s.$$

证明　对任意的 $u\in E$，令

$$\tilde Tu(x)=\lambda\int_0^1 G(x,s)a^+(s)f(u(s))\mathrm{d}s,\quad x\in(0,1)\tag{6}$$

显然 $\tilde T:E\to E$ 是全连续算子，且问题(5)的解等价于 $\tilde T$ 的不动点. 由(H_1)可知，存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$f(x)\geqslant\delta f(0),0\leqslant x\leqslant\varepsilon\tag{7}$$

设 $\lambda<\dfrac{\varepsilon}{2\|p\|\tilde f(\varepsilon)}$，其中 $\tilde f(t)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}f(s)$. 则

$$\frac{\tilde f(\varepsilon)}{\varepsilon}<\frac{1}{2\lambda\|p\|}.$$

易知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tilde f(x)}{x}=+\infty$. 由介值定理可知，存在 $A_\lambda\in(0,\varepsilon)$ 使得

$$\frac{\tilde f(A_\lambda)}{A_\lambda}=\frac{1}{2\lambda\|p\|}.$$

构造同伦族 $u=\theta\tilde Tu$，$u\in E$，$\theta\in(0,1)$. 则由式(6)可得

$$\|u\|=\theta\|\tilde Tu\|\leqslant\lambda\|p\|\tilde f(\|u\|),$$

即

$$\frac{\tilde f(\|u\|)}{\|u\|}\geqslant\frac{1}{\lambda\|p\|}.$$

故 $\|u\|<A_\lambda$，且当 $\lambda\to 0$ 时 $A_\lambda\to 0$. 由引理 2.2 可知，$\tilde T$ 有一个不动点 $\tilde u_\lambda$，满足 $\|\tilde u_\lambda\|<A_\lambda<\varepsilon$. 故 $\lambda\to 0$，$\|\tilde u_\lambda\|\to 0$. 结合式(7)可得

$$\tilde u_\lambda=\lambda\int_0^1 G(x,s)a^+(s)f(\tilde u_\lambda(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\delta f(0)p(x),x\in(0,1).$$

证毕.

3　主要结果的证明

令 $q(x)=\int_0^1 G(x,s)a^-(s)\mathrm{d}s$. 由条件($H_2$)可知，存在 $\alpha,\beta\in(0,1)$，$s\in(0,\alpha)$ 使得

$$q(x)|f(s)|\leqslant\beta p(x)f(0),x\in(0,1).$$

由(H_1)可知，当 $s\in(0,\alpha)$ 时，

$$|f(s)|\leqslant(\frac{\mu+2}{2})f(0).$$

取 $\beta=\dfrac{\mu+2}{2+2\mu}$. 结合($H_3$)可得

$$|f(s)|q(x)\leqslant\beta p(x)f(0).$$

固定 $\delta\in(\beta,1)$. 由 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\|\tilde u_\lambda\|=0$，存在 $\lambda_1>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_1$ 时有

$$\|\tilde u_\lambda\|+\lambda\delta f(0)\|p\|\leqslant\alpha\tag{8}$$

且 $\tilde u_\lambda$ 是问题(5)的解. 由假设(H_1)可得，f 在区间$[-\alpha,\alpha]$上是一致连续的，即对于 $x,y\in[-\alpha,\alpha]$，当 $|x-y|\leqslant\lambda_1\delta f(0)\|p\|$ 时有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant f(0)(\frac{\delta-\beta}{2})\tag{9}$$

当 $\lambda<\lambda_1$ 时，设问题(3)的解为

$$u=\tilde u_\lambda+v_\lambda\tag{10}$$

将式(10)代入式(3)得

$$(\tilde u_\lambda+v_\lambda)'''(x)+k_2(\tilde u_\lambda+v_\lambda)''(x)+k_1(\tilde u_\lambda+v_\lambda)'(x)+k_0(\tilde u_\lambda+v_\lambda)(x)=\lambda a(x)f(\tilde u_\lambda+v_\lambda)\tag{11}$$

由引理 2.3，有

$$(\tilde u_\lambda)'''(x)+k_2(\tilde u_\lambda)''(x)+k_1(\tilde u_\lambda)'(x)+k_0(\tilde u_\lambda)(x)=\lambda a^+(x)f(\tilde u_\lambda)\tag{12}$$

结合式(11)(12)可得

$$\begin{cases} v_\lambda'''(x)+k_2 v_\lambda''(x)+k_1 v_\lambda'(x)+k_0 v_\lambda(x)= \\ \quad \lambda a^+(x)[f(\tilde{u}_\lambda+v_\lambda)-f(\tilde{u}_\lambda)]- \\ \quad \lambda a^-(x)f(\tilde{u}_\lambda+v_\lambda),x\in(0,1), \\ v_\lambda^{(i)}(0)=v_\lambda^{(i)}(1),\ i=0,1,2. \end{cases}$$

令 $v=Hw,\ w\in E$. 则

$$Hw=\lambda\int_0^1 G(x,s)a^+(s)(f(\tilde{u}_\lambda+w)- f(\tilde{u}_\lambda))\mathrm{d}s-\lambda\int_0^1 G(x,s)a^-(s)f(\tilde{u}_\lambda+w)\mathrm{d}s.$$

显然,$H:E\to E$ 是全连续算子. 令 $v=\gamma Hv$,其中 $v\in E,\gamma\in(0,1)$,

$$v=\gamma Hv=\gamma\lambda\int_0^1 G(x,s)a^+(s)(f(\tilde{u}_\lambda+v)- f(\tilde{u}_\lambda))\mathrm{d}s-\gamma\lambda\int_0^1 G(x,s)a^-(s)f(\tilde{u}_\lambda+v)\mathrm{d}s.$$

反设 $\|v\|=\lambda\delta f(0)\|p\|$. 结合式(8)(9)有

$$\|\tilde{u}_\lambda+v\|\leqslant\|\tilde{u}_\lambda\|+\|v\|\leqslant\alpha,$$

$$\|f(\tilde{u}_\lambda+v)-f(\tilde{u}_\lambda)\|\leqslant f(0)\frac{\delta-\beta}{2}.$$

从而

$$|v|\leqslant\lambda\int_0^1 G(x,s)a^+(s)|f(\tilde{u}_\lambda+v)- f(\tilde{u}_\lambda)|\mathrm{d}s+\lambda\int_0^1 G(x,s)a^-(s)|f(\tilde{u}_\lambda+v)|\mathrm{d}s\leqslant \lambda\frac{\delta-\beta}{2}f(0)p(x)+\lambda\beta f(0)p(x)= \lambda\frac{\delta+\beta}{2}f(0)p(x).$$

因此,我们有

$$\|v\|\leqslant\lambda\frac{\delta+\beta}{2}f(0)\|p\|<\lambda\delta f(0)\|p\|.$$

这与假设矛盾. 故 $\|v\|\neq\lambda\delta f(0)\|p\|$,从而

$$\|v\|<\lambda\delta f(0)\|p\|.$$

由引理 2.2,H 有不动点 v_λ,

$$u_\lambda=\tilde{u}_\lambda+v_\lambda\geqslant\tilde{u}_\lambda-|v_\lambda|\geqslant\lambda\delta f(0)p(x)- \lambda\frac{\delta+\beta}{2}f(0)p(x)=\lambda\frac{\delta-\beta}{2}f(0)p(x)>0.$$

所以 u_λ 是问题(3)的正解. 证毕.

4 应 用

考虑问题

$$\begin{cases} u'''(x)+u''(x)+u'(x)+u(x)= \\ \quad \lambda(-x+\frac{9}{10})f(u),\ x\in(0,1), \\ u^{(i)}(0)=u^{(i)}(1),i=0,1,2 \end{cases}$$

正解的存在性,其中 $f(0)>0$. 由 $k_0=k_1=k_2=1$, $f(0)>0$知,该问题满足条件(H_1)和(H_2). 令 $\mu=10,a(x)=-x+\frac{9}{10}$. 则

$$a^+(x)=\begin{cases} -x+\frac{9}{10},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{9}{10}, \\ 0,\ \frac{9}{10}<x\leqslant 1, \end{cases}$$

$$a^-(x)=\begin{cases} x-\frac{9}{10},\ \frac{9}{10}\leqslant x\leqslant 1, \\ 0,\ 0\leqslant x<\frac{9}{10}. \end{cases}$$

将 $k_0=k_1=k_2=1$ 代入式(4),得

$$G(x,s)=\begin{cases} \dfrac{2\mathrm{e}^{-x+s+1}\sin(\frac{1}{2})+(\mathrm{e}-1)\cos(x-s-\frac{1}{2})+\sin(x-s-\frac{1}{2})}{4(\mathrm{e}-1)\sin\frac{1}{2}},\ 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{2\mathrm{e}^{-x+s}\sin(\frac{1}{2})+(\mathrm{e}-1)\cos(x-s+\frac{1}{2})+\sin(x-s+\frac{1}{2})}{4(\mathrm{e}-1)\sin\frac{1}{2}},\ 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1. \end{cases}$$

设

$$Y=\frac{\int_0^1 G(x,s)a^+(s)\mathrm{d}s}{\int_0^1 G(x,s)a^-(s)\mathrm{d}s}.$$

结合式(14)(15)可得

$$Y=\frac{\int_0^{0.9} G(x,s)a^+(s)\mathrm{d}s}{\int_{0.9}^1 G(x,s)a^-(s)\mathrm{d}s}.$$

接下来我们由分段法使用 Matlab 软件求 Y 的最小值.

当 $0\leqslant x<0.9$ 时,令

$$I_1=\int_0^x[2\sin(0.5)e^{-x+s+1}+(e-1)(\cos(x-s-0.5)+\sin(x-s-0.5))](-s+0.9)ds,$$

$$I_2=\int_x^{0.9}[2\sin(0.5)e^{-x+s}+(e-1)(\cos(x-s+0.5)+\sin(x-s+0.5))](-s+0.9)ds,$$

$$I_3=\int_{0.9}^1[2\sin(0.5)e^{-x+s}+(e-1)(\cos(x-s-0.5)+\sin(x-s-0.5))](s-0.9)ds.$$

此时有 $Y=(I_1+I_2)/I_3$. 借助 Matlab 软件计算可得当 $x=0.6564$ 时最小值 $Y_1=80.3131$.

当 $0.9\leqslant x\leqslant 1$ 时，令

$$J_1=\int_0^{0.9}[2\sin(0.5)e^{-x+s+1}+(e-1)(\cos(x-s-0.5)+\sin(x-s-0.5))](-s+0.9)ds,$$

$$J_2=\int_{0.9}^x[2\sin(0.5)e^{-x+s+1}+(e-1)(\cos(x-s-0.5)+\sin(x-s-0.5))](s-0.9)ds,$$

$$J_3=\int_x^1[2\sin(0.5)e^{-x+s}+(e-1)(\cos(x-s+0.5)+\sin(x-s+0.5))](s-0.9)ds.$$

此时有 $Y=J_1/(J_2+J_3)$. 借助 Matlab 软件计算可得，当 $x=0.9000$ 时，最小值 $Y_2=80.9832$. 综上，有 $Y\geqslant 80.3131>11$. 从而

$$\int_0^1 G(x,s)a^+(s)ds\geqslant 11\int_0^1 G(x,s)a^-(s)ds,$$

即条件(H_3)成立. 由定理 1.1 可知问题存在正解.

参考文献：

[1] Gregus M. Third order linear differential equations [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1987.

[2] Yu H X, Pai M H. Solvability of a nonlinear third-order periodic boundary value problem [J]. Appl Math Lett, 2010, 23: 892.

[3] Hakl R. Periodic boundary-value problem for third-order linear functional differential equations [J]. UKR Math J+, 2008, 60: 481.

[4] Kong L B, Wang S T, Wang J Y. Positive solution of a singular nonlinear third order periodic boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 2001, 132: 247.

[5] Mukhigulashvili S. On a periodic boundary value problem for third order linear functional differential equations [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2007, 66: 527.

[6] Baslandze S R, Kiguradze I T. On the unique solvability of a periodic boundary value problem for third-order linear differential equations [J]. Diff Equatt, 2006, 42: 165.

[7] Chen Y L, Ren J L, Stefen S. Green′s function third-order differential equation [J]. Rocky Mountain J Math, 2011, 41: 1417.

[8] 邓正平，李永祥. 一类三阶非线性微分方程周期边值问题解的存在性 [J]. 四川大学学报：自然科学版，2019，56：792.

[9] 何燕琴，韩晓玲. 一类带积分边界条件的三阶边值问题正解的存在唯一性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2020，57：852.

[10] Chu J F, Zhou Z C. Positive solutions for singular nonlinear third-order periodic boundary value problems [J]. Nonlinear Anal: Theor, 2006, 64: 1528.

[11] Li D, Pei M H, Yang Z. Existence and multiplicity of positive solutions of third-order periodic boundary value problems with one-parameter [J]. J Nonlinear Funct Anal, 2020, 2020: 1.

[12] Hai D D. Positive solutions to a class of elliptic boundary value problems [J]. J Math Anal Appl, 1998, 227: 195.

[13] 徐登州，马如云. 线性微分方程的非线性扰动 [M]. 北京：科学出版社，2008.

引用本文格式：

中　文：薄志伟. 不定权三阶周期边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报：自然科学版，2022，59：061005.

英　文：Bo Z W. Existence of positive solutions for third order periodic boundary value problems with indefinite weight [J]. J Sichuan Univ: Nat Sci Ed, 2022, 59: 061005.